Ano lectivo 2006/07 **Exame de Geometria Diferencial**

Duração: 2h30m 5/7/07

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

---

1. Determine:

   (a) Uma parametrização da curva de nível definida pela equação cartesiana $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

   (b) Para a espiral logarítmica $\gamma(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t)$, o ângulo em cada t entre o vector $\gamma(t)$ e o vector tangente a γ no ponto $\gamma(t)$.

   (c) Uma reparametrização por comprimento de arco da hélice $\gamma(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, $t\in\mathbb{R}$.

   (d) O comprimento de arco da ciclóide $\gamma(t)=2(t-\sin t, 1-\cos t)$ correspondente a uma revolução completa da circunferência que a gera.

2. Sejam r,a,b,c constantes reais, com $r\neq 0$, e considere a curva $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t, a\sin t+b\cos t+c)$.

   (a) Prove que γ é uma curva plana.

   (b) Será possível que $\gamma(\mathbb{R})$ seja circular?

3. Considere o conjunto $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y^3+y-4z=0\}$.

   (a) Mostre que S é uma superfície.

   (b) Determine os pontos de S onde o plano tangente é paralelo à recta definida pelas equações $x=0$, $y=z$.

4. Seja

$$\begin{array}{rccc}\sigma: & \mathbb{R}\times(-\pi,\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\cos v, \sin v, u)\end{array}$$

   uma parametrização do cilindro $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ e seja P a superfície plana $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1, -\pi<y<\pi\}$. Considere o difeomorfismo $f:C\to P$ que a cada ponto $\sigma(u,v)$ do cilindro faz corresponder o ponto $(1,v,u)$ de P.

   (a) Mostre que f é uma isometria.

   (b) Qual é a distância, em C, entre os pontos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-2\right)$ e $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3\right)$? Determine uma parametrização de uma curva em C, com esse comprimento, que os una.

5. Seja $\gamma:(0,1)\to\mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula, e considere a superfície S_γ parametrizada por

$$\begin{array}{rccc}\sigma: & (0,1)\times(0,1) & \longrightarrow & S_\gamma \\ & (s,u) & \longmapsto & \gamma(s)+u\,T_\gamma(s).\end{array}$$

   (a) Prove que, para cada $s_0\in(0,1)$, todos os pontos $\sigma(s_0,u)$, com $u\in(0,1)$, admitem o mesmo plano tangente.

   (b) Seja $p=\sigma(s,u)$ um ponto arbitrário de S_γ. Mostre que $K(p)=0$ e $H(p)=\dfrac{\tau_\gamma(s)}{2u\,\kappa_\gamma(s)}$. Classifique os pontos de S_γ.
