Ano lectivo 2006/07 **Exame de Geometria Diferencial**

5/7/07

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m Soluções

---

1. Determine:

   (a) Uma parametrização da curva de nível definida pela equação cartesiana $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

   (b) Para a espiral logarítmica $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, o ângulo em cada t entre o vector $\gamma(t)$ e o vector tangente a γ no ponto $\gamma(t)$.

   (c) Uma reparametrização por comprimento de arco da hélice $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (d) O comprimento de arco da ciclóide $\gamma(t) = 2(t - \sin t, 1 - \cos t)$ correspondente a uma revolução completa da circunferência que a gera.

Solução

2. Sejam r, a, b, c constantes reais, com $r \neq 0$, e considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, a \sin t + b \cos t + c)$.

   (a) Prove que γ é uma curva plana.

   (b) Será possível que $\gamma(\mathbb{R})$ seja circular?

Solução

3. Considere o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^3 + y - 4z = 0\}$.

   (a) Mostre que S é uma superfície.

   (b) Determine os pontos de S onde o plano tangente é paralelo à recta definida pelas equações $x = 0$, $y = z$.

Solução

4. Seja

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (\cos v, \sin v, u) \end{array}$$

   uma parametrização do cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e seja P a superfície plana $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, -\pi < y < \pi\}$. Considere o difeomorfismo $f : C \to P$ que a cada ponto $\sigma(u, v)$ do cilindro faz corresponder o ponto $(1, v, u)$ de P.

   (a) Mostre que f é uma isometria.

   (b) Qual é a distância, em C, entre os pontos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right)$? Determine uma parametrização de uma curva em C, com esse comprimento, que os una.

Solução

5. Seja $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula, e considere a superfície S_γ parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & (0,1)\times(0,1) & \longrightarrow & S_\gamma \\ & (s,u) & \longmapsto & \gamma(s) + u\,T_\gamma(s). \end{array}$$

(a) Prove que, para cada $s_0 \in (0,1)$, todos os pontos $\sigma(s_0,u)$, com $u \in (0,1)$, admitem o mesmo plano tangente.

(b) Seja $p = \sigma(s,u)$ um ponto arbitrário de S_γ. Mostre que $K(p) = 0$ e $H(p) = \dfrac{\tau_\gamma(s)}{2u\,\kappa_\gamma(s)}$. Classifique os pontos de S_γ.

Solução

Sugestão de resolução

---

1. (a) Numa parametrização $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ da elipse $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$ as componentes γ_1 e γ_2 terão que satisfazer

$$\frac{\gamma_1(t)^2}{4} + \frac{\gamma_2(t)^2}{9} = 1$$

(para todos os valores de t no intervalo onde a curva está definida). Como

$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \frac{(2\cos t)^2}{4} + \frac{(3\sin t)^2}{9},$$

uma solução óbvia será $\gamma_1(t) = 2\cos t$ e $\gamma_2(t) = 3\sin t$.

(b) Sendo $\theta(t)$ esse ângulo, temos

$$\begin{aligned}
\cos\theta(t) &= \frac{(\gamma(t) \mid T(t))}{\|\gamma(t)\|} = \frac{(\gamma(t) \mid \gamma'(t))}{\|\gamma(t)\| \, \|\gamma'(t)\|} \\
&= \frac{((e^t\cos t, e^t \sin t) \mid (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t)))}{e^t(e^t\sqrt{2})} \\
&= \frac{e^{2t}}{\sqrt{2}\, e^{2t}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$.

(c) Como $\gamma'(t) = (e^t\cos t - e^t \sin t, e^t\sin t + e^t\cos t, e^t)$, então

$$\|\gamma'(t)\|^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{2t} = e^{2t} + e^{2t} + e^{2t} = 3e^{2t}.$$

Portanto, a função comprimento de arco a partir de $\gamma(0) = (1,0,1)$ é dada por

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = \int_0^t \sqrt{3}\, e^u\, du = \sqrt{3}\, [e^u]_{u=0}^{u=t} = \sqrt{3}\,(e^t - 1).$$

Trata-se de uma função estritamente crescente. Como $\lim_{t\to+\infty} s(t) = +\infty$ e $\lim_{t\to-\infty} s(t) = -\sqrt{3}$, então $s(\mathbb{R}) = (-\sqrt{3}, +\infty)$ e $s : \mathbb{R} \to (-\sqrt{3}, +\infty)$ é uma bijecção. Determinemos a sua função inversa. Como

$$\sqrt{3}\,(e^t - 1) = u \Leftrightarrow e^t = \frac{u}{\sqrt{3}} + 1 \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{u}{\sqrt{3}} + 1\right),$$

então $s^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{\sqrt{3}} + 1\right)$.

Finalmente, a composição $\gamma \circ s^{-1} : (-\sqrt{3}, +\infty) \to \mathbb{R}$ é a reparametrização por comprimento de arco pedida:

$$(\gamma \circ s^{-1})(u) = \left((\frac{u}{\sqrt{3}} + 1)\cos(\ln(\frac{u}{\sqrt{3}} + 1)), (\frac{u}{\sqrt{3}} + 1)\sin(\ln(\frac{u}{\sqrt{3}} + 1)), \frac{u}{\sqrt{3}} + 1 \right).$$

(d) O parâmetro t na parametrização $\gamma(t) = 2(t-\sin t, 1-\cos t)$ da ciclóide corresponde ao ângulo de rotação da circunferência geratriz desde o início do seu movimento. Assim, uma revolução completa corresponde a $t \in [0, 2\pi]$. Como $\gamma'(t) = 2(1 - \cos t, \sin t)$, então $\|\gamma'(t)\|^2 = 4(2 - 2\cos t) = 8(1 - \cos t)$. Mas

$$\cos t = \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = \cos^2\frac{t}{2} - \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right) = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1,$$

pelo que $\|\gamma'(t)\|^2 = 8\left(2 - 2\cos^2\frac{t}{2}\right) = 16\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right) = 16\sin^2\frac{t}{2}$.

Então o comprimento de arco é igual a

$$\int_0^{2\pi} 4\sin\frac{t}{2}\,dt = \left[-8\cos\frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 16.$$

2. (a) Calculemos a torsão de γ:

$$\tau_\gamma(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \mid \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-r\sin t, r\cos t, a\cos t - b\sin t),\\
\gamma''(t) &= (-r\cos t, -r\sin t, -a\sin t - b\cos t)\\
\gamma'''(t) &= (r\sin t, -r\cos t, -a\cos t + b\sin t),
\end{aligned}$$

então $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (-br, -ar, r^2)$. Portanto,

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\big((-br, -ar, r^2) \mid (r\sin t, -r\cos t, -a\cos t + b\sin t)\big)}{\|(-br, -ar, r^2)\|^2} = 0,$$

o que garante que γ é plana.

(b) Sendo γ uma curva plana, a sua imagem será uma circunferência se e só se a sua curvatura for uma função constante, não nula. Determinemos então $\kappa_\gamma(t)$:

$$\begin{aligned}
\kappa_\gamma(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{b^2r^2 + a^2r^2 + r^4}}{\|\gamma'(t)\|^3}\\
&= \frac{r\sqrt{a^2 + b^2 + r^2}}{(r^2 + a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - 2ab\cos t\sin t)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

É então evidente que, por exemplo, sempre que $a = b = 0$ e $r \neq 0$, $\kappa_\gamma(t) = \frac{r^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}$ e, consequentemente a imagem de γ é uma circunferência de raio r. Em conclusão, é possível que $\gamma(\mathbb{R})$ seja circular.

(Nota: se quisermos determinar exactamente todos os valores de r, a, b, c para os quais a imagem de γ é uma circunferência, bastará determinar quando é que a derivada de κ_γ é a função nula e simultaneamente κ_γ não se anula.)

3. (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^3 + y - 4z = 0\} = f^{-1}(\{0\})$, onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a função suave dada por $f(x, y, z) = y^3 + y - 4z$. O gradiente $\nabla_f(x, y, z)$ de f no ponto (x, y, z) é o vector $(0, 3y^2 + 1, -4)$, que nunca se anula, pelo que 0 é um valor regular de f. Isto mostra que S é uma superfície.

(b) Como o espaço vectorial tangente em cada ponto $p \in S$ é dado por $< \nabla_f(p) >^\perp$ então o plano tangente em $p = (p_1, p_2, p_3)$ será paralelo à recta $x = 0$, $y = z$ precisamente quando o vector $\nabla_f(p)$ for ortogonal à recta $x = 0$, $y = z$, ou seja, quando o vector $\nabla_f(p)$ for ortogonal ao vector $(0, 1, 1)$. Isso acontece quando

$$\big((0, 3p_2^2 + 1, -4) \mid (0, 1, 1)\big) = 0 \Leftrightarrow 3p_2^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow p_2^2 = 1.$$

Portanto, o plano tangente é paralelo à recta definida pelas equações $x = 0$, $y = z$ nos pontos $(p_1, \pm 1, p_3)$ de S, ou seja, nos pontos $(p_1, 1, \frac{1}{2})$ e $(p_1, -1, -\frac{1}{2})$, $p_1 \in \mathbb{R}$.

4. (a) Os mapas

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (\cos v, \sin v, u) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tilde{\sigma}: & \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (\cos v, \sin v, u) \end{array}$$

constituem um atlas de C e a sua primeira forma fundamental é a matriz identidade. De facto:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial u}(u, v) = (0, 0, 1),$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial v}(u, v) = (-\sin v, \cos v, 0),$$

donde

$$E(u, v) = \tilde{E}(u, v) = ((0, 0, 1) \mid (0, 0, 1)) = 1,$$
$$F(u, v) = \tilde{F}(u, v) = ((0, 0, 1) \mid (-\sin v, \cos v, 0)) = 0$$

e

$$G(u, v) = \tilde{G}(u, v) = ((-\sin v, \cos v, 0) \mid (-\sin v, \cos v, 0)) = 1.$$

Por outro lado, $(f \circ \sigma)(u, v) = (f \circ \tilde{\sigma})(u, v) = (1, v, u)$ têm também como primeira forma fundamental a matriz identidade. Logo, f é uma isometria.

(b) Sejam $A = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2) = f(\sigma(-2, -\frac{\pi}{4})) = (1, -\frac{\pi}{4}, -2)$ e $B = f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3) = f(\sigma(3, \frac{2\pi}{3})) = (1, \frac{2\pi}{3}, 3)$. Como f é uma isometria, o comprimento do caminho mais curto em C entre os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3)$ é igual à distância de A a B na superfície plana P, isto é, a $\|B - A\| = \|(0, \frac{11\pi}{12}, 5)\| = \sqrt{(\frac{11\pi}{12})^2 + 25}$. O caminho mais curto em P ligando A a B é o segmento de recta

$$\gamma_1(t) = A + t(B - A) = \left(1, -\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{12}t, -2 + 5t\right) \qquad t \in [0, 1],$$

pelo que o caminho mais curto em C ligando $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ a $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3)$ é a curva parametrizada por

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) &= f^{-1}(\gamma_1(t)) = f^{-1}\left(1, -\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{12}t, -2 + 5t\right) \\ &= \sigma\left(-2 + 5t, -\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{12}t\right) \\ &= \left(\cos(-\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{12}t), \sin(-\frac{\pi}{4} + \frac{11\pi}{12}t), -2 + 5t\right) \qquad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

5. (a) Calculemos os dois vectores directores do plano tangente a S_γ num ponto genérico $\sigma(s,u)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) &= T_\gamma(s) + u\,T_\gamma'(s) = T_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma(s)\,N_\gamma(s)\\
\frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u) &= T_\gamma(s).
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $s = s_0$, para cada u em $(0,1)$ o plano tangente passa pelo ponto $\sigma(s_0,u) = \gamma(s_0) + uT_\gamma(s_0)$ e tem a direcção dos vectores $T_\gamma(s_0) + u\,\kappa_\gamma(s_0)\,N_\gamma(s_0)$ e $T_\gamma(s_0)$. Como $\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s_0,u) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s_0,u) = -u\,\kappa_\gamma(s_0)\,B_\gamma(s_0)$, então esse plano é o plano que passa pelo ponto $\sigma(s_0,u)$ e é ortogonal a $B_\gamma(s_0)$ (que não depende de u). Apesar dos pontos $\sigma(s_0,u)$ dependerem de $u \in (0,1)$, estes pontos percorrem o vector $T_\gamma(s_0)$ de uma extremidade à outra, que é um dos vectores directores do plano, ou seja, percorrem um segmento de recta paralelo a uma das direcções do plano. Portanto, para qualquer $u \in (0,1)$, o plano tangente em $\sigma(s_0,u)$ é sempre o mesmo: é o plano que passa pelo ponto $\gamma(s_0)$ e é ortogonal a $B_\gamma(s_0)$, ou seja, é precisamente o plano osculador à curva γ em $\gamma(s_0)$.

(b) Dos cálculos já realizados na alínea anterior obtemos imediatamente a primeira forma fundamental de σ:

$$\begin{aligned}
E(s,u) &= \left(\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u)\right)\\
&= (T_\gamma(s) \mid T_\gamma(s)) + u^2\kappa_\gamma(s)^2(N_\gamma(s) \mid N_\gamma(s)) = 1 + u^2\kappa_\gamma(s)^2,\\
F(s,u) &= \left(\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)\right) = (T_\gamma(s) \mid T_\gamma(s)) = 1,\\
G(s,u) &= \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)\right) = (T_\gamma(s) \mid T_\gamma(s)) = 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u) &= (T_\gamma(s) \wedge T_\gamma(s)) + u\,\kappa_\gamma(s)(N_\gamma(s) \wedge T_\gamma(s))\\
&= -u\,\kappa_\gamma(s)\,B_\gamma(s).
\end{aligned}$$

Então

$$N(s,u) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)}{\|\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)\|} = -B_\gamma(s).$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}(s,u) &= T_\gamma'(s) + u\,\kappa_\gamma'(s)\,N_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma(s)\,N_\gamma'(s)\\
&= -u\,\kappa_\gamma(s)^2\,T_\gamma(s) + (\kappa_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma'(s))\,N_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma(s)\,\tau_\gamma(s)\,B_\gamma(s),\\
\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial s}(s,u) &= \kappa_\gamma(s)N_\gamma(s),\\
\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}(s,u) &= 0,
\end{aligned}$$

então

$$e(s,u) = -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}(s,u) \mid N(s,u)\right) = u\,\kappa_\gamma(s)\,\tau_\gamma(s),$$

$$
\begin{aligned}
f(s,u) &= -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial s}(s,u) \mid N(s,u)\right) = 0,\\
g(s,u) &= -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}(s,u) \mid N(s,u)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
K(s,u) &= \frac{e(s,u)g(s,u)-f(s,u)^2}{E(s,u)G(s,u)-F(s,u)^2} = 0,\\
H(s,u) &= \frac{E(s,u)g(s,u)-2f(s,u)F(s,u)+G(s,u)e(s,u)}{2(E(s,u)G(s,u)-F(s,u)^2)}\\
&= \frac{u\kappa_\gamma(s)\tau_\gamma(s)}{2u^2\kappa_\gamma(s)^2}\\
&= \frac{\tau_\gamma(s)}{2\,u\,\kappa_\gamma(s)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, S_γ não possui pontos elípticos nem pontos hiperbólicos. Para qualquer $u \in (0,1)$,

- se $\tau_\gamma(s) = 0$, o ponto $\sigma(s,u)$ é planar;
- se $\tau_\gamma(s) \neq 0$, o ponto $\sigma(s,u)$ é parabólico.