Ano lectivo 2006/07 **Exame de Geometria Diferencial**

Duração: 2h30m 20/7/07

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações (**V**: verdadeira; **F**: falsa), apresentando uma justificação breve: **V F**

   (a) Rodando 90°, no sentido negativo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, v_1)$.

   (b) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(x|y) = 0$ se e só se x e y são linearmente independentes.

   (c) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1, at^2, t^3)$, é regular para qualquer $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (d) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à curva $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r\cos t, r \operatorname{sen} t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ.

   (e) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

2. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (2t, \sqrt{3}\, t^2, t^3)$.

   (a) Sendo $t > 0$, designe por $s(t)$ o comprimento de γ no intervalo $[0, t]$. Calcule $s(t)$.

   (b) γ é plana?

   (c) Quando é que uma curva se diz uma hélice generalizada? Nesse caso, o que é o seu eixo?

   (d) Mostre que γ é uma hélice generalizada. Qual é o seu eixo?

3. Seja $\gamma : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula, e considere a superfície S_γ parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & (0,1) \times (0,1) & \longrightarrow & S_\gamma \\ & (s, u) & \longmapsto & \gamma(s) + u\, T_\gamma(s). \end{array}$$

   Mostre que:

   (a) S_γ não possui pontos elípticos e pontos hiperbólicos.

   (b) Se γ é plana então todos os pontos de S_γ são planares.

   (c) Se γ não é plana então existe uma infinidade de pontos parabólicos em S_γ.

   (d) Se γ é uma hélice generalizada não plana então todos os pontos de S_γ são parabólicos.

4. Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$\begin{array}{rccc} f : & S & \to & P \\ & (x, y, z) & \mapsto & (\sigma^{-1}(x, y, z), 0) \end{array}$$

   na superfície plana $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = 0\}$ é conformal.

   (a) Denote por E, F, G os termos da primeira forma fundamental de σ. Mostre que o mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.

   (b) Seja $\sigma(s, u) = \gamma(s) + u\delta(s)$, onde $u \in \mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco e $\delta(s)$ é um vector unitário para cada $s \in I$, uma parametrização de uma superfície regrada. Mostre que σ é conformal se e só se δ é constante e o traço de γ está contido num plano perpendicular a δ. Que tipo de superfície regrada é esta?
