Ano lectivo 2006/07 **Exame de Geometria Diferencial**

20/7/07

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h30m Soluções

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações (**V**: verdadeira; **F**: falsa), apresentando uma justificação breve:

   (a) Rodando 90°, no sentido negativo, o vector $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, obtem-se o vector $(-v_2, v_1)$.

   (b) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(x|y) = 0$ se e só se x e y são linearmente independentes.

   (c) A curva $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (1, at^2, t^3)$, é regular para qualquer $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (d) Para quaisquer $r \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}$, as rectas normais à curva $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $h_{a,r} = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, at)$ são ortogonais ao eixo OZ.

   (e) 0 é um valor regular da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Solução

2. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (2t, \sqrt{3}\, t^2, t^3)$.

   (a) Sendo $t > 0$, designe por $s(t)$ o comprimento de γ no intervalo $[0, t]$. Calcule $s(t)$.

   (b) γ é plana ?

   (c) Quando é que uma curva se diz uma hélice generalizada ? Nesse caso, o que é o seu eixo ?

   (d) Mostre que γ é uma hélice generalizada. Qual é o seu eixo ?

Solução

3. Seja $\gamma : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula, e considere a superfície S_γ parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & (0,1) \times (0,1) & \longrightarrow & S_\gamma \\ & (s, u) & \longmapsto & \gamma(s) + u\, T_\gamma(s). \end{array}$$

   Mostre que:

   (a) S_γ não possui pontos elípticos e pontos hiperbólicos.

   (b) Se γ é plana então todos os pontos de S_γ são planares.

   (c) Se γ não é plana então existe uma infinidade de pontos parabólicos em S_γ.

   (d) Se γ é uma hélice generalizada não plana então todos os pontos de S_γ são parabólicos.

Solução

4. Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & P \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\sigma^{-1}(x,y,z),0) \end{array}$$

na superfície plana $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U, z = 0\}$ é conformal.

(a) Denote por E, F, G os termos da primeira forma fundamental de σ. Mostre que o mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.

(b) Seja $\sigma(s,u) = \gamma(s) + u\delta(s)$, onde $u \in \mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco e $\delta(s)$ é um vector unitário para cada $s \in I$, uma parametrização de uma superfície regrada. Mostre que σ é conformal se e só se δ é constante e o traço de γ está contido num plano perpendicular a δ. Que tipo de superfície regrada é esta?

Solução

Sugestão de resolução

---

1. **V** **F**

(a) O vector que se obtem é o vector $(v_2, -v_1)$ e não $(-v_2, v_1)$ (este é o resultado de uma rotação de 90°, mas no sentido positivo). [ ] [×]

(b) Sendo $x, y \neq 0$, então $(x \mid y) = 0 \Leftrightarrow \cos \measuredangle(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \perp y$. Portanto, todos os pares de vectores x, y não ortogonais e não paralelos são exemplos de vectores linearmente independentes para os quais $(x \mid y) \neq 0$. Por exemplo, $x = (0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são linearmente independentes mas $(x \mid y) = 1 \neq 0$. [ ] [×]

(c) $\gamma_a'(t) = (0, 2at, 3t^2)$ pelo que $\gamma_a'(0) = (0, 0, 0)$. [ ] [×]

(d) A recta normal tem a direcção do vector normal logo tem a mesma direcção que o vector $T'(t)$. Como este vector é paralelo a $\gamma''(t)$ basta então verificar que $\gamma''(t)$ é ortogonal a $(0, 0, 1)$, o que é óbvio pois $\gamma''(t) = (-r \cos t, -r \operatorname{sen} t, 0)$. [×] [ ]

(e) É falso, uma vez que o gradiente $\nabla_f(x, y, z)$ de f no ponto (x, y, z) é o vector $(2x, 2y, 2z)$, que só se anula em $(0, 0, 0)$, mas este ponto pertence a $f^{-1}(\{0\})$. [ ] [×]

2. (a) $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = \int_0^t (2 + 3t^2)\, du = [2u + u^3]_0^t = 2t + t^3$.

(b) A curva γ é plana se e só se a sua torsão $\tau(t) = \frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2}$ for nula em todos os pontos. Mas

$$\begin{aligned}
[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)] &= \Big((2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2) \wedge (0, 2\sqrt{3}, 6t) \mid (0, 0, 6)\Big) \\
&= \Big((6\sqrt{3}\,t^2, -12t, 4\sqrt{3}) \mid (0, 0, 6)\Big) \\
&= 24\sqrt{3} \neq 0
\end{aligned}$$

pelo que γ não é plana.

(c) Uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ diz-se uma *hélice generalizada* quando existe um vector unitário u tal que a função definida por $(T(t) \mid u)$, $t \in I$, é constante. O *eixo* da hélice é o vector u.

(d) Como $T(t) = \frac{(2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2)}{2+3t^2}$, então $(T(t) \mid u)$ é constante se e só se

$$\frac{1}{2+3t^2}\Big((2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2) \mid u\Big)$$

é constante, ou seja, se e só se $\Big((2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2) \mid u\Big) = c(2+3t^2)$ para alguma constante c. Mas $\Big((2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2) \mid (1,0,1)\Big) = 2+3t^2$, logo basta tomar

$$u = \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Alternativa: Pela caracterização das hélices generalizadas estudada, basta verificar que o quociente

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^2}}{\frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}} = \frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]\ \|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^3}$$

é constante, o que é simples:

$$\frac{[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]\ \|\gamma'(t)\|^3}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|^3} = \frac{24\sqrt{3}(2+3t^2)^2}{(2\sqrt{3})^3(2+3t^2)^3} = 1.$$

Quanto ao cálculo do eixo: sendo $1 = \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = d$ então $u = cT(t) + \sqrt{1-c^2}B(t)$ onde $c = \frac{d}{\sqrt{1+d^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2)}{2+3t^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(6\sqrt{3}\,t^2, -12t, 4\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(2+3t^2)} = \cdots = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

3. Calculemos os dois vectores directores do plano tangente a S_γ num ponto genérico $\sigma(s,u)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) &= T_\gamma(s) + u\,T_\gamma'(s) = T_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma(s)\,N_\gamma(s)\\ \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u) &= T_\gamma(s).\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}E(s,u) &= \Big(\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u)\Big)\\ &= (T_\gamma(s) \mid T_\gamma(s)) + u^2\kappa_\gamma(s)^2(N_\gamma(s) \mid N_\gamma(s)) = 1 + u^2\kappa_\gamma(s)^2,\\ F(s,u) &= \Big(\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)\Big) = (T_\gamma(s) \mid T_\gamma(s)) = 1,\\ G(s,u) &= \Big(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u) \mid \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)\Big) = (T_\gamma(s) \mid T_\gamma(s)) = 1.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u) &= (T_\gamma(s) \wedge T_\gamma(s)) + u\,\kappa_\gamma(s)(N_\gamma(s) \wedge T_\gamma(s))\\ &= -u\,\kappa_\gamma(s)\,B_\gamma(s).\end{aligned}$$

Então

$$N(s,u) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)}{\|\frac{\partial\sigma}{\partial s}(s,u) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial u}(s,u)\|} = -B_\gamma(s).$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}(s,u) &= T_\gamma'(s) + u\,\kappa_\gamma'(s)\,N_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma(s)\,N_\gamma'(s) \\
&= -u\,\kappa_\gamma(s)^2\,T_\gamma(s) + (\kappa_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma'(s))\,N_\gamma(s) + u\,\kappa_\gamma(s)\,\tau_\gamma(s)\,B_\gamma(s), \\
\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial s}(s,u) &= \kappa_\gamma(s)N_\gamma(s), \\
\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}(s,u) &= 0,
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
e(s,u) &= -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial s^2}(s,u) \mid N(s,u)\right) = u\,\kappa_\gamma(s)\,\tau_\gamma(s), \\
f(s,u) &= -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial s}(s,u) \mid N(s,u)\right) = 0, \\
g(s,u) &= -\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}(s,u) \mid N(s,u)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
K(s,u) &= \frac{e(s,u)g(s,u) - f(s,u)^2}{E(s,u)G(s,u) - F(s,u)^2} = 0, \\
H(s,u) &= \frac{E(s,u)g(s,u) - 2f(s,u)F(s,u) + G(s,u)e(s,u)}{2(E(s,u)G(s,u) - F(s,u)^2)} \\
&= \frac{u\kappa_\gamma(s)\tau_\gamma(s)}{2u^2\kappa_\gamma(s)^2} \\
&= \frac{\tau_\gamma(s)}{2\,u\,\kappa_\gamma(s)}.
\end{aligned}$$

Assim:

(a) S_γ não possui pontos elípticos nem pontos hiperbólicos, uma vez que a curvatura gaussiana $K(s,u)$ é sempre nula.

(b) Se γ é plana então $\tau_\gamma(s) = 0$ em qualquer $s \in (0,1)$, donde $H(s,u) = 0$ e todos os pontos de S_γ são planares.

(c) Se γ não é plana, existe pelo menos um $\overline{s} \in (0,1)$ tal que $\tau_\gamma(\overline{s}) \neq 0$. Para esse $\overline{s}$, $H(\overline{s},u) \neq 0$ para qualquer $u \in (0,1)$, pelo que todos os pontos $\sigma(\overline{s},u)$ de S_γ com $u \in (0,1)$, que são em número infinito, serão parabólicos.

(d) Por um lado, se γ é uma hélice generalizada então o quociente $\frac{\tau_\gamma(s)}{\kappa_\gamma(s)}$ é igual a uma constante c. Por outro lado, como γ não é plana existe pelo menos um $\overline{s} \in (0,1)$ tal que $\tau_\gamma(\overline{s}) \neq 0$, o que implica $c \neq 0$. Consequentemente, $\tau_\gamma(s) \neq 0$ para qualquer $s \in (0,1)$ e todos os pontos de S_γ serão parabólicos.

(a) O mapa σ constitui um atlas de S e o mapa $\tilde{\sigma} := f \circ \sigma$ constitui um atlas de P. Como $\tilde{\sigma}(u,v) = (\sigma^{-1}\sigma(u,v), 0) = (u,v,0)$ então

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial u}(u,v) = (1,0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial v}(u,v) = (0,1,0),$$

pelo que a primeira forma fundamental de $\tilde{\sigma}$ é igual a:

$$\tilde{E}(u,v) = ((1,0,0) \mid (1,0,0)) = 1,$$

$$\tilde{F}(u,v) = ((1,0,0) \mid (0,1,0)) = 0,$$

$$\tilde{G}(u,v) = ((0,1,0) \mid (0,1,0)) = 1.$$

Como f é conformal se e só se para alguma função suave $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$

$$E(u,v) = \lambda(u,v)\tilde{E}(u,v) = \lambda(u,v),$$

$$F(u,v) = \lambda(u,v)\tilde{F}(u,v) = 0$$

e

$$G(u,v) = \lambda(u,v)\tilde{G}(u,v) = \lambda(u,v)$$

então σ é conformal se e só se $E(u,v) = \lambda(u,v) = G(u,v)$ e $F(u,v) = 0$.

(b) Como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,u) = T_\gamma(s) + u\,\delta'(s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u}(s,u) = \delta(s)$$

então

$$\begin{aligned}
E(s,u) &= (T_\gamma(s) \mid T_\gamma(s)) + 2u(T_\gamma(s) \mid \delta'(s)) + u^2(\delta'(s) \mid \delta'(s)) \\
&= 1 + 2u(T_\gamma(s) \mid \delta'(s)) + u^2(\delta'(s) \mid \delta'(s)) \\
F(s,u) &= (T_\gamma(s) \mid \delta(s)) + u(\delta'(s) \mid \delta(s)) = (T_\gamma(s) \mid \delta(s)) \\
G(s,u) &= (\delta(s) \mid \delta(s)) = \|\delta(s)\|^2 = 1.
\end{aligned}$$

Portanto, pela alínea anterior, σ é conformal se e só se para quaisquer $s \in I$ e $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} E(s,u) = G(s,u) \\ F(s,u) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2u(T_\gamma(s) \mid \delta'(s)) + u^2(\delta'(s) \mid \delta'(s)) = 0 \\ (T_\gamma(s) \mid \delta(s)) = 0. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (2T_\gamma(s) + u\delta'(s) \mid \delta'(s)) = 0,\ u \neq 0 \\ (T_\gamma(s) \mid \delta(s)) = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Então $\delta'(s) = 0$. De facto, se $\delta'(s)$ fosse não nulo então, da primeira condição, teríamos $\delta'(s)$ ortogonal a $2T_\gamma(s) + u\delta'(s)$ para qualquer $u \neq 0$, o que é impossível (sendo verdade para um determinado u, é evidente que não pode mais ser verdade para os restantes valores de u). Portanto, δ é uma função constante, como desejávamos provar.

Sendo δ unitário, a segunda condição diz-nos então que $T_\gamma(s)$ é ortogonal a δ. Além disso também implica, por derivação, $(N_\gamma(s) \mid \delta) = 0$. Em conclusão, a binormal $B_\gamma(s)$ coincide, a menos de sinal, com o vector δ, o que mostra que γ é plana e o seu traço, estando no plano osculador, definido por $T_\gamma(s)$ e $N_\gamma(s)$, estará assim num plano perpendicular a δ. A superfície é então um cilindro generalizado.