Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 30m **Teste 1** 5/03/07

Soluções

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $x \wedge y = 0$ se e só se x e y são ortogonais. | | × |

   `[Sendo` $x, y \neq 0$, `então` $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow \sin \measuredangle(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \parallel y$`.]`

   (b) O comprimento da espiral $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ em $[0, +\infty)$ é igual a $\sqrt{2}$. | × | |

   `[Como` $\gamma'(t) = (-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t)$, `então` $\|\gamma'(t)\|^2 = e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 = e^{-2t} + e^{-2t} = 2e^{-2t}$. `Portanto,` $\int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = \int_0^t \sqrt{2}e^{-u}\, du = \sqrt{2}[-e^{-u}]_0^t = \sqrt{2}(-e^{-t} + 1)$, `pelo que` $\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = \sqrt{2}$`.]`

   (c) Se uma curva possui uma reparametrização por comprimento de arco então é regular. | × | |

   `[Teorema 2.10.]`

   (d) A curvatura de uma circunferência é constante, inversamente proporcional ao seu raio. | × | |

   `[`$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ `é uma parametrização da circunferência de raio` r, `pelo que a sua curvatura é igual a` $\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\|(0,0,r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t)\|}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$`.]`

   (e) O traço de qualquer curva com curvatura constante está contido numa circunferência. | | × |

   `[Basta pensar numa recta (tem curvatura constante nula) ou numa hélice circular (tem curvatura constante igual a` $\frac{r}{r^2+a^2}$`.]`

2. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\gamma(t) = (2t, \sqrt{3}\, t^2, t^3)$.

   (a) Determine o seu vector tangente. Qual é a velocidade de γ no instante t?

(b) Sendo $t > 0$, designe por $s(t)$ o comprimento de γ no intervalo $[0, t]$. Quanto vale $s(t)$?

(c) A curva γ está parametrizada por comprimento de arco? Em caso negativo, reparametrize-a por comprimento de arco.

(d) Determine a curvatura de γ.

(a) O vector tangente $T(t)$ é o vector $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2)}{2+3t^2}$ pois $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4 + 12t^2 + 9t^4} = \sqrt{(2+3t^2)^2} = 2 + 3t^2$.

(b) $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du = \int_0^t (2 + 3t^2)\, du = [2u + u^3]_0^t = 2t + t^3$.

(c) γ não está parametrizada por comprimento de arco pois $\|\gamma'(t)\| = 2 + 3t^2$ não é a função constante igual a 1. Para reparametrizar γ por comprimento de arco temos que considerar a função bijectiva $s : \mathbb{R} \to s(\mathbb{R})$ definida por $s(t) = 2t + t^3$ e determinar a sua função inversa $s^{-1} : s(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A reparametrização por comprimento de arco será $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ dada por $\tilde{\gamma}(u) = (2s^{-1}(u), \sqrt{3}s^{-1}(u), (s^{-1}(u))^3)$.

(d)

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\|(2, 2\sqrt{3}\,t, 3t^2) \wedge (0, 2\sqrt{3}, 6t)\|}{(2+3t^2)^3} \\
&= \frac{\|(6\sqrt{3}\,t^2, -12t, 4\sqrt{3})\|}{(2+3t^2)^3} = \frac{\sqrt{(6\sqrt{3})^2 t^4 + 12^2 t^2 + (4\sqrt{3})^2}}{(2+3t^2)^3} \\
&= \frac{\sqrt{(6\sqrt{3}\,t^2 + 4\sqrt{3})^2}}{(2+3t^2)^3} = \frac{6\sqrt{3}\,t^2 + 4\sqrt{3}}{(2+3t^2)^3} \\
&= \frac{2\sqrt{3}\,(3t^2+2)}{(2+3t^2)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{(2+3t^2)^2}.
\end{aligned}
$$