Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Geometria Diferencial**

Duração: 45m **Teste 3** 14/05/07

Soluções

---

1. (a) Como se define um vector tangente a uma superfície S num ponto $p \in S$?

   (b) Seja
$$\begin{array}{rccc}\sigma: & (0,2)\times(-\pi,\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (u\cos v, u\sin v, u)\end{array}$$
   um mapa de uma superfície cónica S contendo o ponto $p=(1,0,1)$. O vector $(-1,-1,1)$ é tangente a S no ponto p? (Justifique a resposta.)

Solução.

(a) Um vector $v \in \mathbb{R}^3$ diz-se *tangente* a S em p caso exista uma curva γ em S, passando por p, à qual v seja tangente nesse ponto; ou seja, caso exista uma curva $\gamma: I \to S$ tal que $\gamma(t_0)=p$ e $\gamma'(t_0)=v$ para algum t_0 em I.

(b) Como
$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (\cos v, \sin v, 1)$$
e
$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 0),$$
então, em $p=\sigma(1,0)$, temos $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(1,0)=(1,0,1)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(1,0)=(0,1,0)$. Portanto, $(-1,-1,1)$ será tangente a S em p se e só se for combinação linear dos vectores $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$, ou seja, for do tipo (α,β,α) para algum par de reais α e β, o que não é manifestamente verdade.

2. Seja $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xy=1\}$.

   (a) Prove que H é uma superfície.

   (b) Seja $p=(p_1,p_2,p_3)$ um ponto arbitrário de H. Determine a equação do conjunto dos pontos de intersecção de H com o plano tangente a H em p.

   (c) H é orientável? Justifique.

Solução.

(a) Consideremos a função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z)=xy$. Sendo uma função polinomial, é claramente uma função C^∞. Como $H=f^{-1}(\{1\})$, pelo critério

> *"Seja $f: U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função C^∞. Se $a\in f(U)$ é um valor regular de f então $S=f^{-1}(\{a\})$ é uma superfície."*

bastará verificarmos que 1 é um valor regular de f para concluirmos que H é uma superfície. Verifiquemos então isso:

$\nabla f(x,y,z) = (y,x,0)$, donde $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ se e só se $x = y = 0$. Portanto, o gradiente de f anula-se nos pontos $(0,0,z)$, $z \in \mathbb{R}$. Como nenhum destes pontos pertence a $f^{-1}(\{1\}) = H$, está confirmado que 1 é valor regular de f.

(b) Seja $p = (p_1, p_2, p_3)$ um ponto de H. Então $p_1 p_2 = 1$. Pela alínea (a), o plano tangente a H em p é dado por:

$$\begin{aligned}
\Pi_p^H &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Big((x,y,z) - (p_1,p_2,p_3) \mid \nabla f(p_1,p_2,p_3)\Big) = 0\Big\} \\
&= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Big((x-p_1, y-p_2, z-p_3) \mid (p_2,p_1,0)\Big) = 0\Big\} \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid p_2(x-p_1) + p_1(y-p_2) = 0\big\} \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid p_2 x + p_1 y = 2p_1p_2\big\} \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid p_2 x + p_1 y = 2\big\}.
\end{aligned}$$

Assim, a intersecção de H com Π_p^H é dada pelas soluções (x,y,z) do sistema

$$\begin{cases} xy = 1 \\ p_2 x + p_1 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ p_2 x + \frac{p_1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ p_2 x^2 - 2x + p_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4p_1p_2}}{2p_2} = \frac{1}{p_2} = p_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{p_1} = p_2 \\ x = p_1. \end{cases}$$

Portanto, a intersecção é a recta vertical formada pelos pontos (p_1, p_2, z), $z \in \mathbb{R}$.

(c) Sim, é orientável, pois possui um campo de vectores normais unitários:

$$N(p) = \frac{\nabla_f(p)}{\|\nabla_f(p)\|} = \frac{(p_2, p_1, 0)}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in H.$$