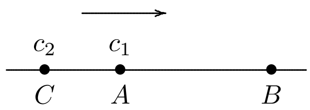
III OPM
2.ª eliminatória

1. Representemos a minha velocidade e a velocidade dos comboios, em quilómetros por minuto, por, respectivamente, v_p e v_c. Seja f o intervalo de tempo, em minutos, que medeia entre a partida de dois comboios consecutivos.

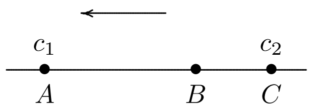
Na figura ao lado representam-se as posições de dois comboios consecutivos, c_1 e c_2, que circulam na direcção em que eu estou a correr. O comboio c_1 está a ultrapassar-me no ponto A e o comboio c_2 irá ultrapassar-me no ponto B.



Eu demoro 12 minutos a percorrer a distância entre A e B. Logo, $\overline{AB} = 12v_p$. Enquanto eu percorro esta distância, o comboio c_2 percorre a distância entre C e B, que pode ser decomposta na distância entre C e A, igual a fv_c, mais a distância que eu percorro, de A até B. Isto é, o comboio c_2 percorre $\overline{CA}+\overline{AB} = fv_c+12v_p$ quilómetros. Como os comboios têm velocidade constante, esta distância também é dada por $12v_c$. Portanto,

$$fv_c + 12v_p = 12v_c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_c}{v_p} = \frac{12}{12-f}\,. \tag{1.1}$$

Vejamos agora o que acontece com os comboios que se deslocam em sentido contrário ao meu movimento. Os pontos A e B na figura ao lado representam, respectivamente, o local em que me cruzo com o comboio c_1 e o local em que me irei cruzar com o comboio c_2.



A distância entre A e B é igual a $4v_p$, já que me cruzo com um comboio circulando em sentido oposto de quatro em quatro minutos. O comboio c_2 percorre, nestes quatro minutos, a distância $4v_c$. Portanto, $\overline{BC} = 4v_c$. Por outro lado, esta distância é igual a $\overline{AC} - \overline{AB} = fv_c - 4v_p$. Logo,,

$$4v_c = fv_c - 4v_p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_c}{v_p} = \frac{4}{f-4}\,.$$

Finalmente, juntando (1.1) e (1.2), obtemos

$$\frac{12}{12-f} = \frac{4}{f-4} \quad \Leftrightarrow \quad f = 6. \tag{1.2}$$

Portanto, os comboios saem das respectivas estações com intervalos de 6 minutos.