

DAS FORMAS ÀS FÓRMULAS:
ESTRUTURA E GEOMETRIA DAS CONCHAS MARINHAS

JORGE PICADO

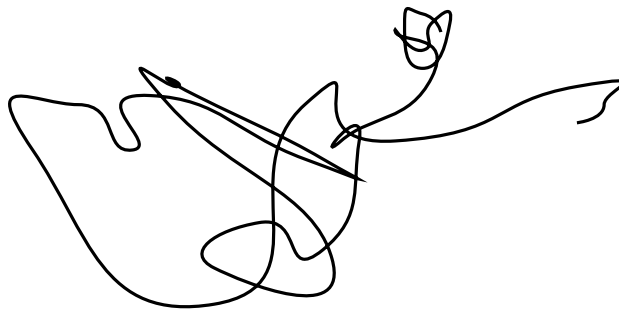
*«Foi no mar que aprendi o gosto da forma bela
Ao olhar sem fim o sucessivo
Inchar e desabar da vaga
A bela curva luzidia do seu dorso
O longo espraçar das mãos de espuma

Por isso nos museus da Grécia antiga
Olhando estátuas, frisos e colunas
Sempre me aclaro mais leve e mais viva
E respiro melhor como na praia»*

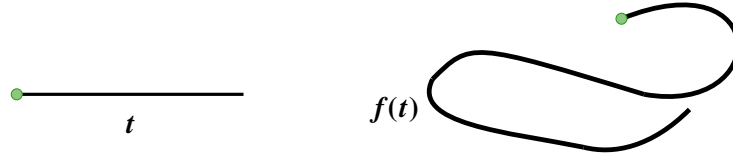
— SOPHIA DE MELLO BREYNER ANDRESEN (*O Búzio de Cós*)

1. FORMAS A UMA DIMENSÃO: CURVAS NO ESPAÇO

Um dos casos mais extremos de movimento na Natureza é o do vôo frenético das moscas: traçam curvas que são espectacularmente tridimensionais, na medida em que estão constantemente a curvar e a torcer em todas as direcções; os pássaros também voam descrevendo curvas no espaço, mas não tão torcidas e angulosas.

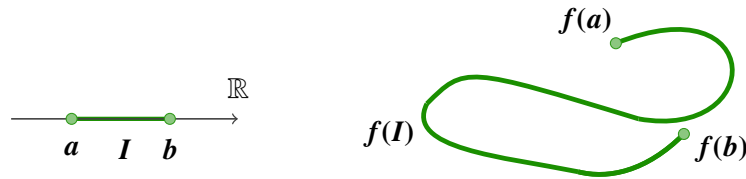


Qualquer objecto em movimento descreve uma curva no espaço: no instante t a sua posição é dada por $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.



Este movimento tem dois aspectos: a sua velocidade e a forma da curva que descreve. O primeiro é (como sabemos desde Newton) medido pela derivada f' de f : a velocidade $v(t)$ de f no instante t é o módulo $|f'(t)|$ do *vector velocidade* (ou *vector tangente*) $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. E o segundo? Existe uma “linguagem” matemática para descrever a forma das curvas no espaço? Sim, é a linguagem da *curvatura*, no caso plano, e da *curvatura e torção*, no caso tridimensional. Para vermos isso precisamos de começar por formalizar a ideia de curva. Havendo diversas abordagens possíveis à questão, aqui interessa-nos a que nos permite reter a informação sobre como o ponto $f(t)$ percorre a trajectória, em que sentido a percorre, e que permita definir a sua velocidade, aceleração, etc. (ou seja, a abordagem à geometria das curvas através do cálculo diferencial e integral, um dos objectos de estudo da chamada geometria diferencial).

Uma *curva (parametrizada)* é uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo $I = (a, b)$ da recta real em $\mathbb{R}^3$:

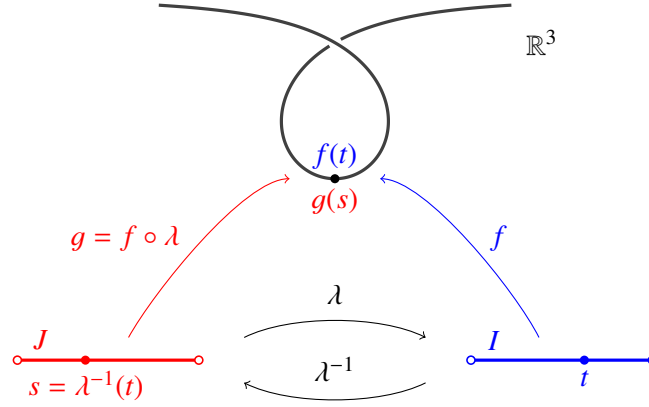


O conjunto imagem da função f , $\mathcal{C} = \{f(t) \mid t \in I\}$, é o *traço* da curva.

Historicamente, as curvas no espaço tridimensional foram estudadas pela primeira vez pelo matemático francês Alexis-Claude Clairaut (1713-1765), num artigo intitulado “*Recherche sur les Courbes a Double Courbure*” e publicado em 1731 quando Clairaut tinha apenas 18 anos [11, pág. 557]. A geometria euclidiana clássica tinha tido sempre uma fragilidade (da qual, aliás, os próprios géometras Gregos estavam cientes): não ser capaz de lidar satisfatoriamente com curvas e superfícies, a não ser linhas rectas, planos ou secções cónicas. Faltava-lhe a linguagem necessária para falar de curvas e superfícies em geral: o cálculo diferencial. Citando M. Abate e F. Tovena no prefácio a [1], «*All that had to be very frustrating; it suffices to take a look around to see that our world is full of curves and surfaces, whereas lines and planes are just a typically human construction.*»

Limitemo-nos às chamadas curvas *suaves*, onde cada função coordenada $x, y, z: I \rightarrow \mathbb{R}$ tem um certo número adequado de sucessivas derivadas contínuas (em cada ponto de I), cuja velocidade nunca se anula (costuma-se dizer neste caso que a curva é *regular*). As curvas regulares (e só estas) podem ser sempre *reparametrizadas por comprimento de arco*, isto é,

existe uma bijecção (suave) $\lambda: J \rightarrow I$, para algum intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, tal que a curva $g = f \circ \lambda$ tem velocidade constante igual a 1.



Na reparametrização por comprimento de arco g , o parâmetro s dá-nos precisamente o comprimento da curva (e, portanto, o espaço percorrido pelo ponto ao longo da sua trajetória); de facto, o comprimento do arco de curva desde um s_0 inicial até qualquer s , sendo dado pelo integral $\int_{s_0}^s |g'(u)| du$, é igual a $\int_{s_0}^s du = s - s_0$. Outra característica importante das curvas parametrizadas por comprimento de arco, muito simples de comprovar, é que se a segunda derivada $g''(s)$ não for nula, é necessariamente um vector ortogonal à tangente $g'(s)$.

«It seems to me that the poet must see what others do not see, must see more deeply than other people. And the mathematician must do the same.»

— SOFYA KOVALESKAYA (1890)

2. QUANTO É QUE UMA CURVA ENCURVA?

É evidente que a forma (traço) de uma curva é independente da sua parametrização, pelo que nos restringiremos à sua parametrização por comprimento de arco. Que parâmetros (medidas) da curva determinam a sua forma?

No caso plano, a chamada *curvatura*. Newton foi o primeiro a estudá-la com rigor. No Problema 5 (*To find the curvature of any curve at a given point*¹) do seu “Methods of series and fluxions”, Newton começa por listar alguns critérios que a medida do encurvamento deverá satisfazer [24, pág. 151]:

- Uma circunferência tem curvatura constante, inversamente proporcional ao seu raio.
- A maior circunferência que é tangente à curva (no seu lado côncavo) num ponto tem a mesma curvatura que a curva nesse ponto.
- O centro desta circunferência é o “centro de curvatura” da curva nesse ponto.

¹«The problem has the mark of exceptional elegance and of being pre-eminently useful in the science of curves», nas palavras de Newton.

O segundo critério nesta lista é a mais antiga formalização da ideia de curvatura que permite, de facto, o seu tratamento com rigor e generalização. Esta definição matemática de curvatura mede o quanto a curva se afasta de uma linha recta (mais especificamente, da sua recta tangente em cada ponto). Newton não diz, nesta altura, como se determina “a maior circunferência” (a que chamou *circunferência osculadora*), mas refere que é a circunferência que toca a curva do seu lado côncavo e tem o tamanho certo de modo a que nenhuma outra circunferência tangente «*can be drawn between in the contact angles neighbouring that point*» [24, pág. 151]. Mais adiante no livro, Newton formaliza e generaliza estas ideias com rigor, fundando a geometria diferencial.

Hoje em dia é habitual definir-se a *curvatura (com sinal)* κ de uma curva plana f , parametrizada por comprimento de arco, do seguinte modo:

Se $f''(s) = 0$ então $\kappa(s) = 0$. Caso contrário, sendo

$$T(s) = f'(s)$$

o vector tangente (que tem módulo constante igual a 1), seja

$$N(s) = \frac{1}{\pm |T'(s)|} T'(s)$$

o chamado *vector normal* a f em s , onde o sinal no denominador é escolhido de modo a que a orientação da base ortonormada $\{T(s), N(s)\}$ seja positiva. Este vector também é unitário e, pela observação de há pouco, é ortogonal a $T(s)$. O escalar

$$\kappa(s) = \pm |T'(s)| = \pm |f''(s)|$$

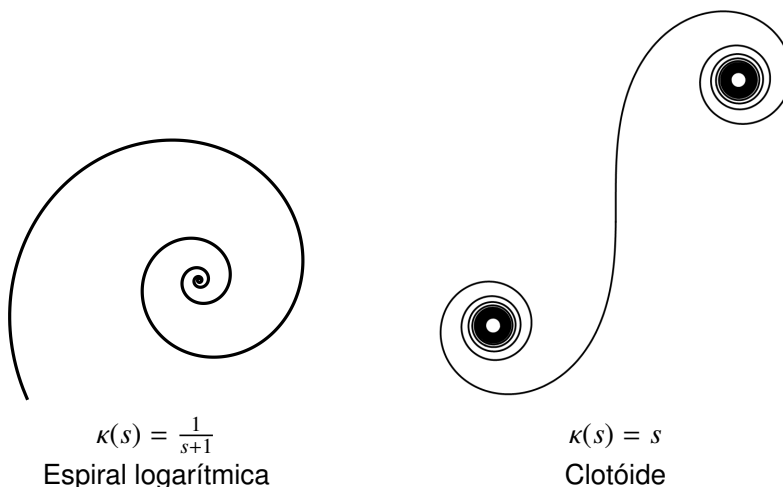
é então a curvatura de f em s .

O Teorema Fundamental das Curvas Planas garante que a função curvatura determina essencialmente a forma da curva:

Teorema. *Seja $c: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então existe uma curva (regular) parametrizada por comprimento de arco $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja função curvatura coincide com a função c . Além disso, se $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ for outra curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura igual a c , então existe um movimento rígido $\mathcal{M}$ em $\mathbb{R}^2$ (isto é, uma rotação seguida de translação) tal que $\tilde{f}(s) = \mathcal{M}(f(s))$.*

Portanto, quaisquer duas curvas no plano com a mesma função curvatura têm exactamente a mesma forma, diferindo somente na sua posição no plano: será sempre possível com uma rotação e uma translação sobrepor uma sobre a outra! O leitor pode comprovar isso mesmo no módulo interactivo “Curvatura e torção” disponível na página da Associação Atractor [18], manipulando o gráfico da função curvatura de uma curva plana.

Deste modo, a maneira mais natural de descrever uma curva plana será usar uma equação que explicita o valor da curvatura como função do comprimento de arco s , na forma $\kappa(s) = c(s)$. Por exemplo, a figura seguinte mostra dois exemplos de curvas clássicas que têm expressões muito simples para a sua curvatura em função de s :



A primeira curva é muito popular entre os moluscos, como veremos mais adiante. A segunda, também conhecida por *espiral de Cornu*, é a curva mais utilizada como curva de transição entre duas vias rectilíneas, em traçados de vias rápidas e linhas de caminho de ferro. A função destas curvas de transição é permitir que os veículos possam passar de uma via para a outra sem mudanças bruscas na aceleração centrífuga (e no caso das linhas de caminho de ferro, também para minimizar os impactos transversais sobre os carris). Se se utilizassem arcos de circunferência, a curvatura passaria bruscamente de zero, no traçado rectilíneo, para um valor positivo constante, na parte circular. Esta descontinuidade da curvatura no local de transição entre os traçados rectilíneos e curvos, além de ser bastante incómoda para condutores e passageiros, poderá ser causadora de acidentes, devido à variação brusca da aceleração centrífuga no veículo quando este inicia a sua trajectória circular. Como a curvatura da clotóide vai variando linearmente desde zero até uma qualquer constante, a sua forma ajusta-se perfeitamente à trajectória de um veículo viajando a velocidade constante cujo volante é rodado de forma uniforme: basta construir a estrada de ligação seguindo o arco da clotóide que começa no ponto de curvatura nula e termina no ponto de curvatura igual à curvatura da trajectória circular adequada para a ligação entre as duas vias². Esta prática foi introduzida na engenharia por L. Oerly em 1937.

E quanto ao caso tridimensional?

Como já referimos, foi Clairaut o primeiro a estudá-las. Ao falar de “curvatura dupla”, Clairaut referia-se ao facto de uma trajectória no espaço tridimensional, tendo agora dois graus de liberdade, poder curvar de duas maneiras independentes. Para as medir, projectou a

²Mais pormenores em www.atractor.pt/mat/curvtor/conducao_suave/estradas.htm [18].

curva em dois planos ortogonais (o chão e uma parede), tratando cada uma destas projecções como curvas planas, usando as ideias de Newton [11, pág. 557]. A segunda curvatura, a que chamou *torção*, mede em cada ponto o quanto a curva se afasta do seu *plano osculador* (o plano da circunferência osculadora) nesse ponto [11, pág. 559].

Seria também interessante descrever estas curvas por equações intrínsecas, sem referência a nenhum sistema de coordenadas³, explicitando os valores da curvatura e da torção como função do comprimento de arco s . Somente 120 anos após Clairaut tal foi possível, devido ao trabalho dos matemáticos franceses Frederic-Jean Frenet (1816-1900) e Joseph Alfred Serret (1819-1895). Frenet e Serret (de modo independente!) tiveram a ideia revolucionária de considerar um referencial móvel que, mudando com s , se adapta maravilhosamente à curva:

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. A *curvatura* κ é dada em cada s pelo escalar

$$\kappa(s) = |f''(s)|.$$

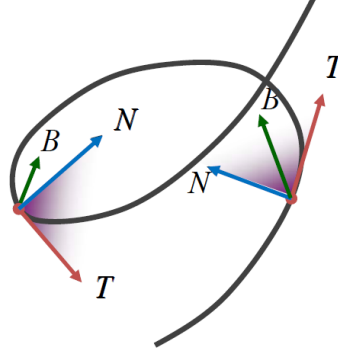
Se $\kappa(s)$ é diferente de 0, podemos definir o *vector normal*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

(que é unitário e ortogonal a $T(s)$). Considerando agora o *vector binormal* $B(s)$ dado pelo produto vectorial

$$B(s) = T(s) \times N(s),$$

obtemos, em cada s , uma base ortonormada $\{T(s), N(s), B(s)\}$ de $\mathbb{R}^3$, o chamado *triedro de Frenet-Serret*.



Claro que se a curva for plana, a binormal é nula e a curva está no seu plano osculador (plano definido por T e N).

Por fim, a *torção* τ é definida pelo produto escalar

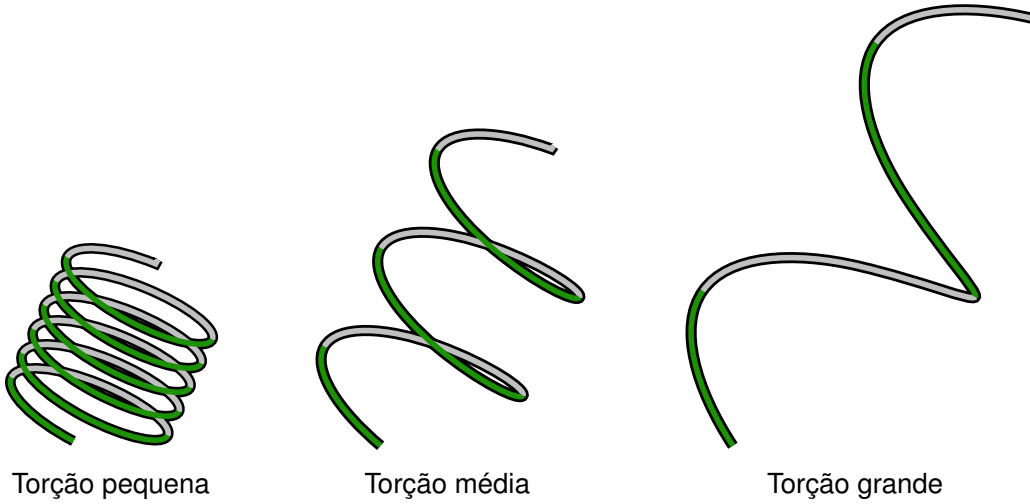
$$\tau(s) = N'(s) \cdot B(s).$$

³«Surely this is the way a fly buzzing around in the center of an empty room must think.» [20]

Para percebermos o porquê desta definição, consideremos a derivada $N'(s)$ e determinemos as suas coordenadas no triedro de Frenet-Serret. Como se trata de uma base ortonormada, estas coordenadas são dadas pelos produtos escalares $N'(s) \cdot T(s)$, $N'(s) \cdot N(s)$ e $N'(s) \cdot B(s)$. Mas $|N(s)| = 1$, logo $N(s) \cdot N(s) = 1$, pelo que $N'(s) \cdot N(s) = 0$. Por outro lado, $N(s) \cdot T(s) = 0$ (pois são vectores ortogonais), pelo que $N'(s) \cdot T(s) = -N(s) \cdot T'(s) = -\kappa(s)$. Portanto,

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s).$$

Assim, em cada ponto da curva, do mesmo modo que a curvatura mede a variação da normal na direcção tangente à curva nesse ponto, a torção mede a variação da normal na direcção da binormal, ou seja, na direcção ortogonal ao plano osculador da curva, exactamente o que Clairaut pretendia. A curvatura é sempre positiva, enquanto a torção pode ser negativa.



Percebemos agora a diferença entre as trajectórias das moscas e dos pássaros: as moscas voam com muito maior curvatura e torção.

Tal como no plano, uma curva espacial pode ser especificada por equações para a curvatura e a torção como funções do comprimento de arco, na forma $\kappa(s) = c(s)$ e $\tau(s) = t(s)$, pois a sua forma e tamanho são determinados univocamente pelas funções curvatura e torção, como o Teorema Fundamental (da teoria local) das Curvas, um dos grandes feitos da escola francesa de geometria do século XIX, garante (para mais pormenores, consulte [1]):

Teorema. *Sejam $c: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $t: I \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja curvatura coincide com a função c e cuja torção coincide com t . Além disso, se $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ for outra curva nas mesmas condições, então só difere de f por um movimento rígido.*

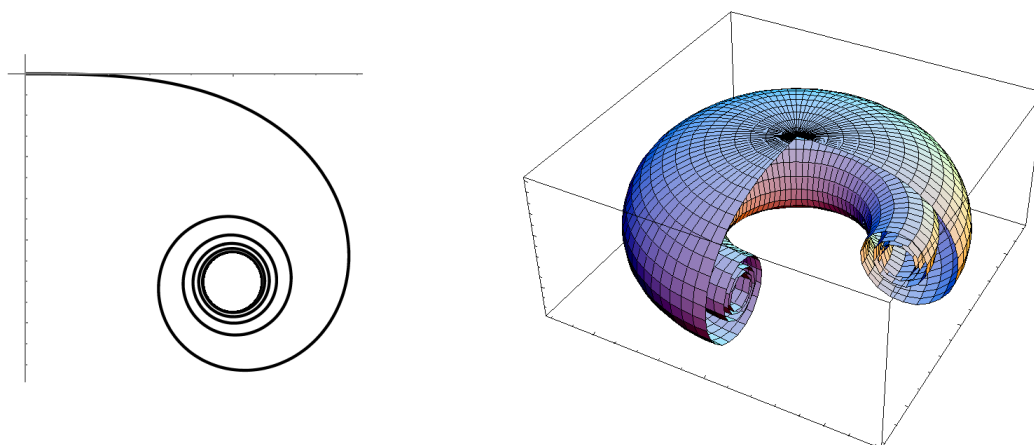
Em [18] encontra um aplicativo que permite perceber melhor este resultado, dando-nos a ver as mudanças na forma de uma curva decorrentes da manipulação dos gráficos das suas funções curvatura e torção.

«Eu sou um geómetra que significa sintético. (...) As formas contínuas são as perfeitas. O uso das superfícies regradas é lógico pela sua superioridade plástica e sua facilidade construtiva.»

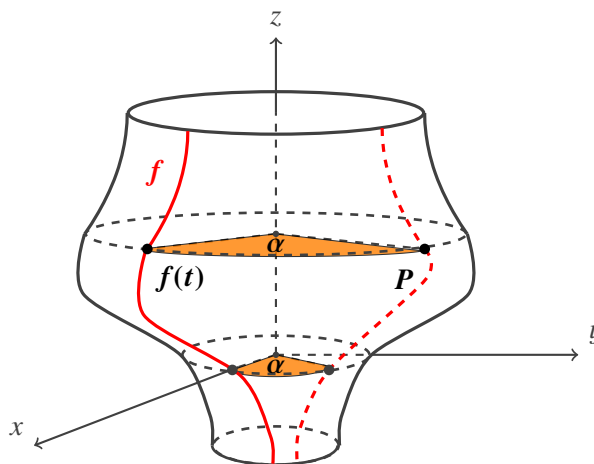
— ANTONI GAUDÍ

3. FORMAS A DUAS DIMENSÕES GERADAS POR CURVAS

A partir de uma curva podemos gerar diversos tipos de superfícies: superfícies de revolução (esferas, elipsóides, toros, parabolóides, etc.), cilindros generalizados, cones generalizados, superfícies regradas (cones, cilindros, hiperbolóides de 1 folha, parabolóides hiperbólicos, helicóides, etc.), tubos, conchas, etc.. Um exemplo muito rico, que permite esculpir com a equação de uma curva, é o das superfícies de revolução. Uma *superfície de revolução* é a superfície que se obtém por rotação de uma curva plana (a *curva geratriz*) em torno de uma recta nesse plano (o *eixo de revolução*). A esfera, o toro e o parabolóide são exemplos de superfícies de revolução. A figura seguinte mostra a superfície de revolução gerada por meia espiral de Cornu:



Fixemos para eixo de revolução o eixo OZ e para plano da geratriz f o plano OXZ :



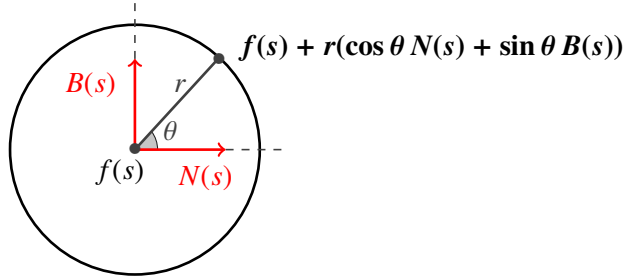
Cada ponto P da superfície é obtido por uma rotação de ângulo α de algum ponto $f(t) = (x(t), 0, z(t))$ da geratriz. É evidente da figura acima que o ponto P é parametrizado por

$$\sigma(t, \alpha) = (x(t) \cos \alpha, x(t) \sin \alpha, z(t)).$$

Fazendo variar t em I (o domínio da curva geratriz) e α em $[0, 2\pi)$, temos aqui a fórmula para qualquer superfície de revolução.

Quanto aos outros exemplos acima mencionados, remetemos o leitor para mais pormenores em [15]; aqui, gostaríamos de apresentar só mais um exemplo, dos tubos, motivador do rumo que queremos tomar neste texto.

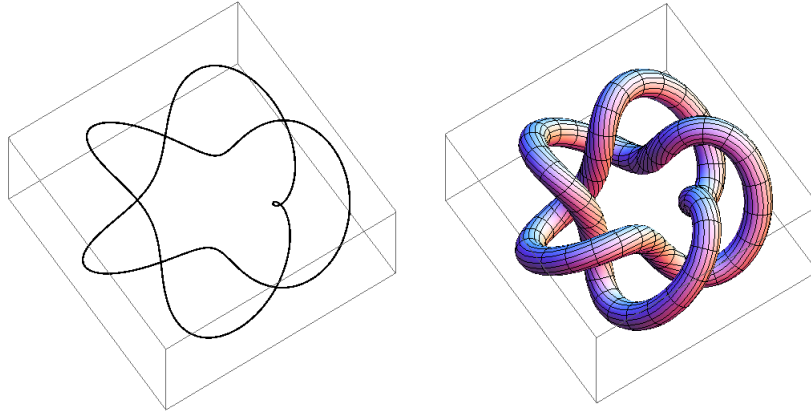
Seja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva, parametrizada por comprimento de arco. Em cada $s \in (a, b)$, a circunferência de raio $r > 0$ e centro $f(s)$



está no plano normal à curva em $f(s)$, plano este ortogonal à tangente $T(s)$. Quando esta circunferência se move ao longo de f define uma superfície, chamada *tubo* (circular), de raio r em torno de f , que é evidentemente parametrizada por

$$\sigma(s, \theta) = f(s) + r(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)) \quad (s \in (a, b), \theta \in [0, 2\pi)).$$

A figura seguinte mostra uma certa curva (o nó 5_1) e o respectivo tubo circular de raio 1.3:

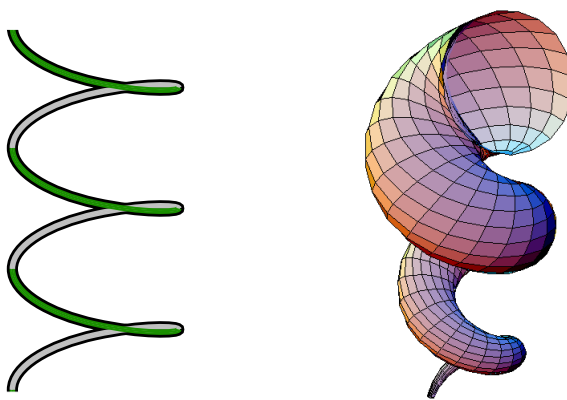


Estas superfícies têm uma propriedade interessante: o seu volume depende somente do raio r e do comprimento de f , e não da curvatura ou da torção de f . Assim, tubos do mesmo raio em torno de uma circunferência ou de uma hélice com o mesmo comprimento terão o mesmo volume.

Claro que substituindo a equação da circunferência pela de uma elipse (ou, mais geralmente, qualquer outra curva plana fechada, ou mesmo não fechada...), podemos construir tubos *elípticos*, etc.. Sendo ainda mais criativos, podemos variar linearmente o raio do tubo ao longo da curva, obtendo as chamadas *conchas* em torno da curva f . Portanto, uma concha circular pode ser parametrizada por

$$\sigma(s, \theta) = f(s) + sr(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)) \quad (s \in (a, b), \theta \in [0, 2\pi)).$$

Por exemplo, se tomarmos para f a hélice vertical da figura seguinte (à esquerda), obtemos a superfície da direita, que faz lembrar um búzio!



As formas elegantes das conchas dos moluscos sempre atraíram o olho de artistas e cientistas. Será possível descrever matematicamente todas essas formas? Sim, como veremos já de seguida. A nossa abordagem será o mais básica possível, usando um referencial cartesiano fixo e simples geometria vectorial, evitando recorrer ao triedro móvel de Frenet-Serret (deixamos a cargo do leitor o exercício de moldar essas formas com o triedro). Surpreendentemente, as fórmulas a que chegaremos são simples combinações de algumas das funções mais comuns: as funções trigonométricas e exponenciais.

*«Desde a orla do mar
Onde tudo começou intacto no primeiro dia de mim
Desde a orla do mar
Onde vi na areia as pegadas triangulares das gaivotas
Enquanto o céu cego de luz bebia o ângulo do seu voo
Onde amei com êxtase a cor o peso e a forma necessária das conchas»*

— SOPHIA DE MELLO BREYNER ANDRESEN (*Delphica IV*)

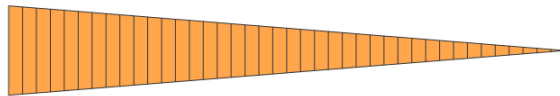
4. A FORMA NECESSÁRIA DAS CONCHAS

Muitos aspectos do crescimento de animais e plantas, apesar de, pelas suas formas elaboradas, parecerem governados por regras muito complexas, podem ser descritos por leis

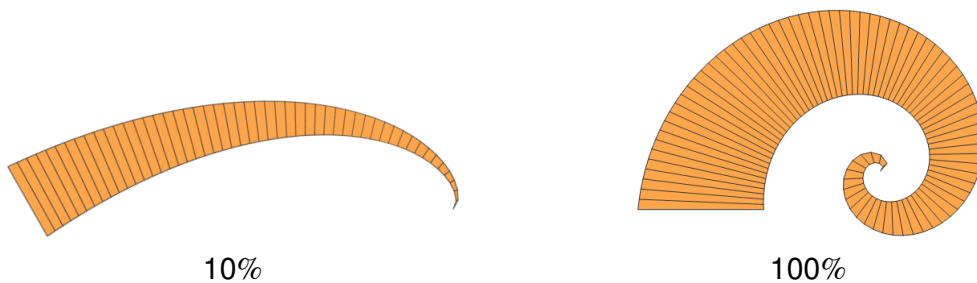
matemáticas muito simples (cf., por exemplo, o livro, hoje um clássico, de D'Arcy Thompson [22] e o recente livro de Stephen Wolfram [25]). Com efeito, mesmo seguindo regras muito simples, é possível obter formas de grande complexidade. É o caso das conchas e dos búzios marinhos [13]. Como afirmou o escritor brasileiro Rubem Alves, «é como se dentro do corpo de cada molusco morasse um matemático: são milhares de estonteantes formas, cores e tamanhos, algumas com mais de 200 quilos, outras do tamanho de um grão de areia».

Esta ideia de que a matemática se encontra profundamente implicada na formação de padrões na Natureza [2, 10, 22, 25] remonta ao tempo dos Gregos, mas só começou a ser eficientemente explorada com D'Arcy Thompson. O seu livro [22] constitui a primeira proposta séria de matematização da forma e do crescimento dos seres vivos e das estruturas por eles produzidas. Desde então, a matemática tenta sintetizar o que as coisas díspares têm em comum afirmando: este é o fenómeno e estas são as variações da mesma fórmula.

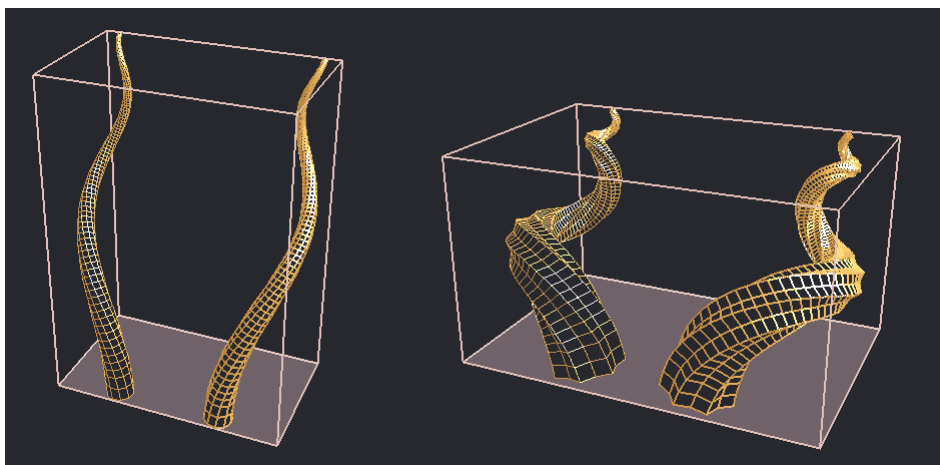
Porque é que tantas conchas formam espirais? Quando o bicho que vive numa concha cresce, é necessário que a concha onde vive também cresça, para o acomodar. O facto do animal que vive na extremidade aberta da concha segregar e depositar o material novo sempre nessa extremidade, e mais rapidamente num lado que no outro, faz com que a concha cresça em espiral. Uma versão bidimensional deste facto pode ser observado no crescimento dos chifres dos mamíferos. Tal como as unhas e o cabelo, um chifre cresce devido ao depósito de material novo na sua base. De modo a ser uma estrutura perfeitamente rectilínea, a quantidade de material depositada deve ser exactamente a mesma de cada lado da base:



No entanto, se existir alguma diferença (indicada nas figuras seguintes, em termos percentuais), um dos lados do chifre ficará mais comprido que o outro e, inevitavelmente, o chifre terá que torcer para o lado onde é depositado menos material, seguindo uma espiral:



É essencialmente uma versão tridimensional deste fenómeno que conduz às estruturas em espiral das conchas dos moluscos; variando o ponto da base onde a maior quantidade de material é depositada, varia a direcção para onde o chifre vai torcendo:



Além do crescimento em espiral, a outra característica essencial da forma das conchas é o chamado crescimento *gnomónico*⁴ (ou homotético), que vai mantendo a forma da concha ao longo do seu crescimento (forma *auto-semelhante*): a concha mais velha é um modelo exacto, à escala, da concha jovem.

Estas duas condicionantes no processo de crescimento da concha têm uma consequência matemática: produzem uma estrutura em espiral muito elegante, visível a olho nu quando partimos a concha em duas metades (ou a observamos ao raio X [7]). Em [22], D'Arcy Thompson (1860-1948), um famoso naturalista escocês (fotografia em baixo), considerado por muitos o primeiro biomatemático da história, refere que «uma concha cresce só numa das suas extremidades... e, apesar deste crescimento assimétrico, mantém sempre a sua forma inalterável. Esta propriedade notável é característica da *espiral equiangular*, e de nenhuma outra curva matemática.»

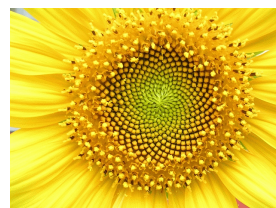


Este facto foi originalmente identificado no século XVII pelo famoso arquitecto inglês Christopher Wren (1632-1723) e o primeiro modelo matemático de crescimento das conchas baseado nas espirais equiangulares foi concebido em 1838 pelo matemático Henry Moseley (1801-1872) [14]. Diversos estudos na segunda metade do século XVIII e primeira metade

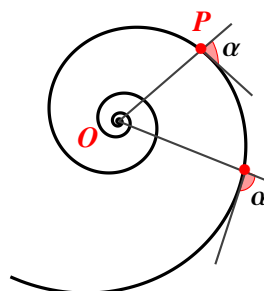
⁴Em Geometria, o uso da palavra *gnómon* — palavra de raiz grega, usada por Aristóteles, que significa “o que indica” ou “o que dá a saber” — relativamente a uma figura dada, refere-se a uma segunda figura que, acrescentada ou retirada à primeira, gera uma terceira figura com forma semelhante à original.

do século XX validaram o modelo de Moseley numa grande variedade de conchas. O modelo que apresentaremos aqui é uma extensão deste, devida essencialmente a M. B. Cortie [4].

A espiral equiangular é uma das curvas mais enfeitantes da matemática. Encontramo-la na Natureza não só nas formas das conchas mas também no arranjo de folhas, pétalas e sementes de algumas plantas e frutos, chifres de mamíferos, remoinhos e galáxias.



Nas espirais equiangulares, o comprimento do segmento que une a origem O da espiral (que será o centro da concha) a cada ponto P da curva cresce, mas a amplitude do ângulo α definido pelo segmento $[OP]$ e a tangente à curva em P mantém-se constante⁵:



Esta curva foi descrita matematicamente pela primeira vez em 1638, por René Descartes (1596-1650), que acreditava que «só a matemática é rigorosa, pelo que tudo se deve basear na matemática». A sua equação paramétrica em coordenadas polares r e θ , dada por

$$r(\theta) = A e^{\theta \cot \alpha}, \quad \theta \geq 0, \quad (4.1)$$

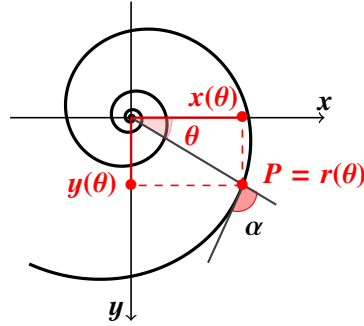
indica a distância $r(\theta)$ de cada ponto da curva à origem O do referencial, em termos do ângulo θ . Portanto, A é a distância do ponto inicial da espiral à origem O (o chamado raio da espiral para $\theta = 0$). Equivalentemente, a equação pode ser escrita na forma $\log(r(\theta)/A) = \theta \cot \alpha$, razão pela qual é também conhecida por *espiral logarítmica*.

⁵É esta característica que explica por que é usada pelos falcões-peregrinos na sua trajectória quando se precipitam sobre a sua presa. Em 2000 Vance Tucker da Universidade Duke (EUA) descobriu a razão por que isso sucede. Como têm os olhos de cada lado da cabeça, quando querem olhar em frente, têm de virar a cabeça 40 graus. Vance testou falcões num túnel de vento e demonstrou que, com a cabeça nesse ângulo, a aerodinâmica de um falcão é 50% pior do que se ele voasse com a cabeça direita. O caminho que permite à ave manter a cabeça na posição mais aerodinâmica possível enquanto ao mesmo tempo lhe permite olhar constantemente para a presa no mesmo ângulo, é uma espiral equiangular.

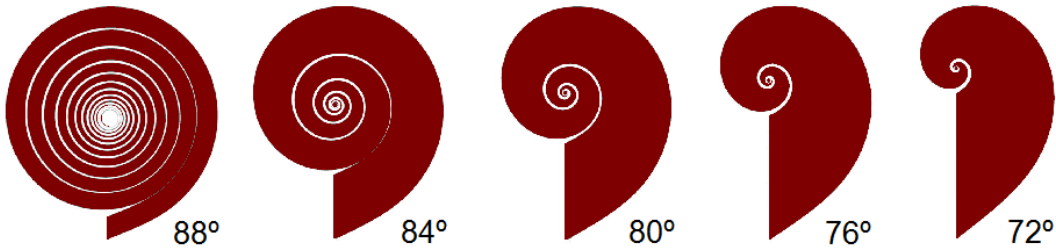
Foi no entanto Jakob Bernoulli (1654-1705) o primeiro matemático a investigar exaustivamente as propriedades da espiral equiangular. Chamou-lhe a *spira mirabilis* (espiral maravilhosa). Pediu que lhe gravassem uma no túmulo, com o epitáfio “*Eadem mutata resurgo*” (Embora mudada, ressurjo), mas o escultor enganou-se e gravou uma espiral de tipo diferente.

Em coordenadas cartesianas, os pontos $(x(\theta), y(\theta))$ da espiral são dados por

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$



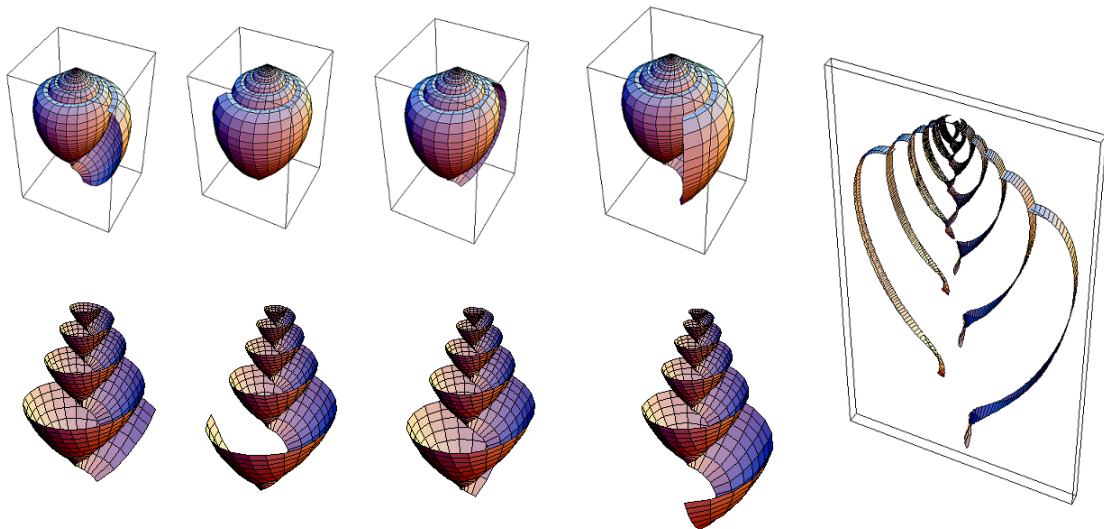
Note que no caso extremo $\alpha = 90^\circ$ a espiral é uma circunferência (no outro caso extremo, $\alpha = 0$, é uma recta). É claro que o molusco não ficaria muito satisfeito com uma concha circular, porque esta não o deixaria crescer, nem rectilínea, porque o deixaria desprotegido (a não ser que, como as lapas, encontre outras formas de protecção). Assim, o ângulo α é sempre inferior a 90° , fazendo com que a espiral cresça, e permitindo o correspondente alargamento da concha:



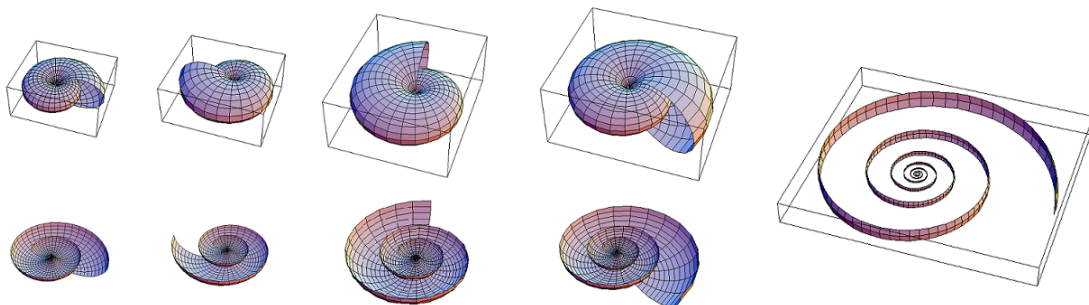
No entanto, raramente desce abaixo dos 70° , com a excepção dos bivalves e das lapas, como veremos mais adiante, onde desce abaixo dos 30° , atingido mesmo no caso das lapas valores muito próximo de zero.

Em resumo, o molusco não alarga a sua concha de modo uniforme: adiciona somente material numa das extremidades da concha (a extremidade aberta ou “de crescimento”); e fá-lo de maneira a que a concha maior seja sempre um modelo exacto, à escala, da concha mais pequena. As figuras seguintes ilustram isso em três exemplos de concha. O primeiro exemplo é típico dos cones, o segundo da concha dos náutilos e o terceiro da concha de um bivalve (uma secção vertical — no primeiro — e uma secção horizontal — nos casos do náutilo e do bivalve — mostram a respectiva espiral de crescimento).

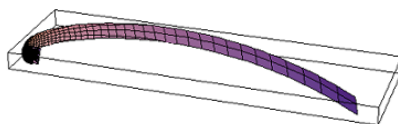
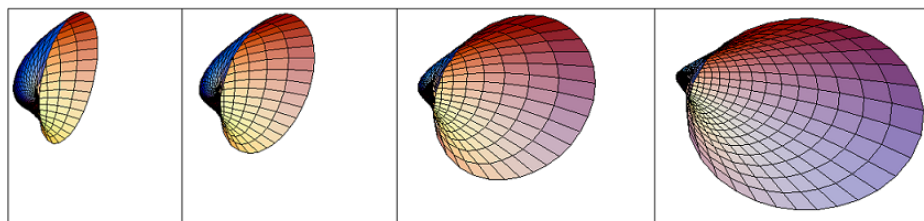
(1) Cone:



(2) Náutilo:



(3) Bivalve:



«(...) não pode haver uma lei de crescimento física ou dinâmica, embora possa existir uma lei matemática, que é comum e que define a forma de espiral no Nautilus, na Globigerina, no chifre de carneiro e na inflorescência do girassol.»

— D'ARCY THOMPSON [22]

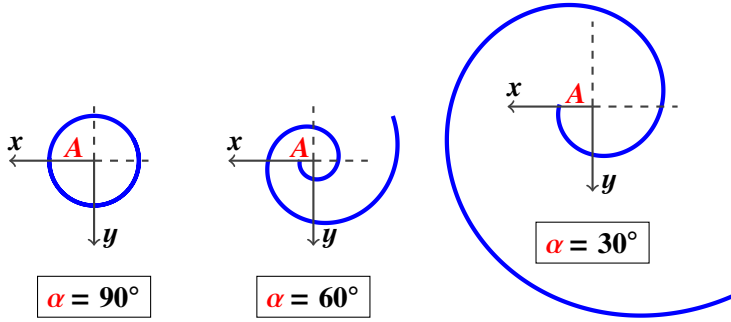
5. O MODELO BÁSICO

É claro que a espiral da maioria das conchas não é plana. Em vez da espiral equiangular plana deveremos considerar a sua versão espacial: «*The spirals described on shells, and called concho-spirals, are such as would result from winding plane logarithmic spirals on cones.*» (Moseley [14]).

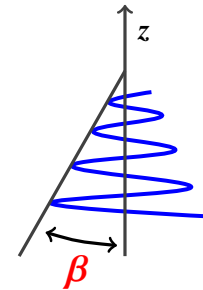
Esta curva, a que chamaremos *hélice cônica*⁶ e denotaremos por $\mathcal{H}$, é definida por três parâmetros (ilustrados na figura seguinte):

- A : *abertura* (distância de O à origem da hélice).
- α : *ângulo equiangular*.
- β : *ângulo de alargamento* (ângulo do cone no qual ela se enrola).

Vista de topo:



Vista de lado:

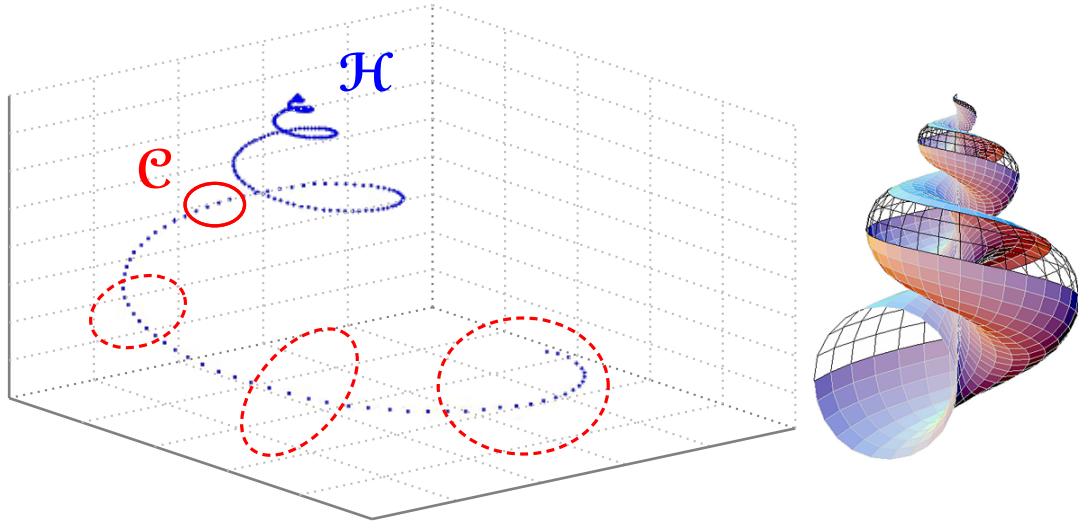


Podemos então olhar para a superfície de uma concha como a superfície tridimensional que resulta do deslocamento de uma curva fechada $\mathcal{C}$ (a *curva geratriz* da concha, em geral uma elipse) ao longo de uma hélice cônica $\mathcal{H}$ (a *curva estrutural* da concha) ([4], [9]); o comprimento de $\mathcal{C}$ vai aumentando à medida que se desloca sobre $\mathcal{H}$; vale a pena transcrever as palavras originais de D'Arcy Thompson em [22, Capítulo XI]:

«*The surface of any shell may be generated by the revolution about a fixed axis of a closed curve, which, remaining always geometrically similar to itself, increases its dimension continually. (...) Let us imagine some characteristic point within this closed curve, such as its centre of gravity. Starting from a fixed origin, this characteristic point describes an equiangular spiral in space about a fixed axis (namely the axis of the shell), with or without a simultaneous movement of translation along the axis. The scale of the figure increases in*

⁶Concho-spiral ou Tapered helix em inglês [6].

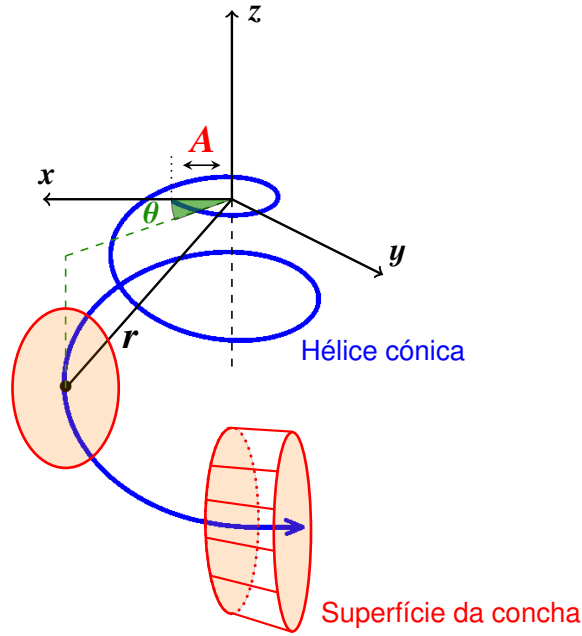
geometrical progression while the angle of rotation increases in arithmetical, and the centre of similitude remains fixed. (...) The form of the generating curve is seldom open to easy mathematical expressions.»



A forma de $\mathcal{C}$ descreve o perfil das secções da concha e da abertura da concha enquanto $\mathcal{H}$ determina a forma global da concha. Nem sempre $\mathcal{C}$ é uma elipse. É o caso da *maravilha japonesa*, que é gerada por uma curva triangular:

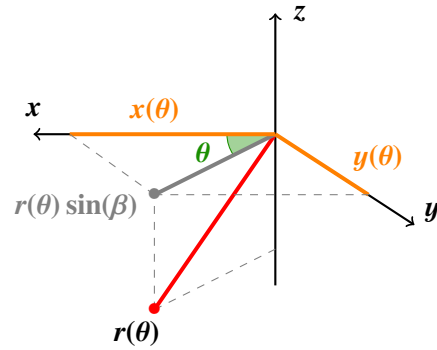
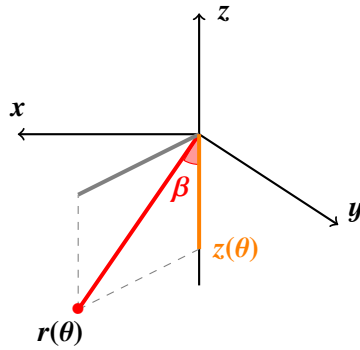


O primeiro passo na construção do modelo será fixar no espaço um sistema cartesiano de coordenadas xyz e considerar a hélice cónica na forma paramétrica, em termos das coordenadas polares (r, θ) , com abertura A :



Vista de cima a hélice cônica $\mathcal{H}$ parece uma espiral equiangular. Usando (4.1), assumimos que, para cada $\theta \geq 0$, a distância $r(\theta)$ do ponto de $\mathcal{H}$ de coordenadas $(x(\theta), y(\theta), z(\theta))$ à origem é dada por $r(\theta) = A e^{\theta \cot \alpha}$. Então

$$z(\theta) = -r(\theta) \cos \beta \quad \text{e} \quad \begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \sin \beta \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \beta \sin \theta \end{cases} :$$



Portanto, os pontos $\mathcal{H}(\theta) = (x^{\mathcal{H}}(\theta), y^{\mathcal{H}}(\theta), z^{\mathcal{H}}(\theta))$ da hélice cônica satisfazem as equações

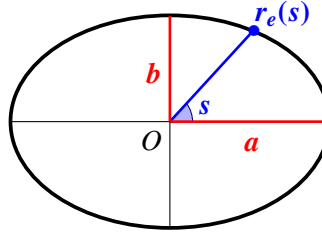
$$\begin{aligned} x^{\mathcal{H}}(\theta) &= A \sin \beta \cos \theta e^{\theta \cot \alpha} \\ y^{\mathcal{H}}(\theta) &= A \sin \beta \sin \theta e^{\theta \cot \alpha} \\ z^{\mathcal{H}}(\theta) &= -A \cos \beta e^{\theta \cot \alpha}. \end{aligned}$$

(5.1)

Já temos o modelo para os “alicerces” da concha, em coordenadas cartesianas. Faltam-nos ainda o modelo para as “paredes” da concha.

A curva geratriz $\mathcal{C}$ que determina a superfície da concha é, na maioria dos casos, uma elipse de parâmetros:

- a : semi-eixo maior.
- b : semi-eixo menor.



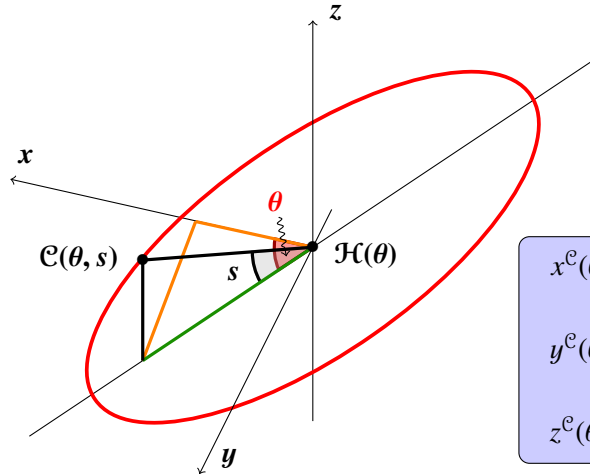
Isto é, uma curva com equação paramétrica

$$r_e(s) = \left[\left(\frac{\cos s}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin s}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad s \in [0, 2\pi).$$

É claro que $\mathcal{C}$ tem de alargar à medida que se move ao longo de $\mathcal{H}$. Podemos simplesmente assumir que $\mathcal{C}$ alarga ao mesmo ritmo que a hélice cônica. Denotando a sua taxa de crescimento por $r_i(\theta)$, então $r_i(\theta) = e^{\theta \cot \alpha}$. Assim, a equação de cada elipse $\mathcal{C}(\theta)$ em coordenadas polares, centradas no ponto correspondente $\mathcal{H}(\theta)$, é dada por

$$R_e(\theta, s) = r_e(s) r_i(\theta) = r_e(s) e^{\theta \cot \alpha}, \quad \theta \geq 0, \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Em coordenadas cartesianas, os pontos $\mathcal{C}(\theta, s) = (x^{\mathcal{C}}(\theta, s), y^{\mathcal{C}}(\theta, s), z^{\mathcal{C}}(\theta, s))$ da elipse $\mathcal{C}(\theta)$ são dados por



$$x^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos s \cos \theta r_e(s) e^{\theta \cot \alpha}$$

$$y^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos s \sin \theta r_e(s) e^{\theta \cot \alpha}$$

$$z^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \sin s r_e(s) e^{\theta \cot \alpha}$$

(5.2)

Finalmente, para obtermos a equação da concha $\mathfrak{S}$, basta incluir as equações (5.2) de $\mathcal{C}$ nos pontos correspondentes de $\mathcal{H}$ (descritos pelas equações (5.1)):

$$\Xi(\theta, s) = \mathcal{H}(\theta) + \mathcal{C}(\theta, s) : \begin{cases} x^\Xi(\theta, s) = (A \sin \beta \cos \theta + \cos s \cos \theta r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \\ y^\Xi(\theta, s) = (A \sin \beta \sin \theta + \cos s \sin \theta r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \\ z^\Xi(\theta, s) = (-A \cos \beta + \sin s r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha}. \end{cases} \quad (5.3)$$

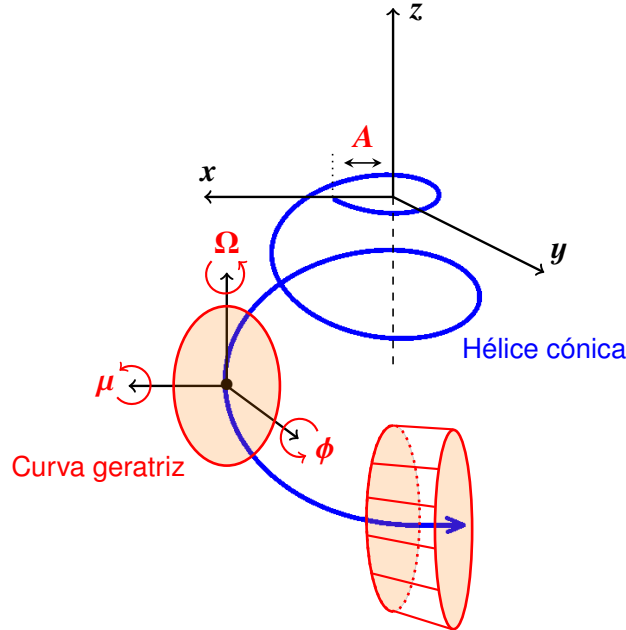
«O corpo da galinha sabe muito de geometria. Foi o ovo que me contou. Porque o ovo é um objecto geométrico construído segundo rigorosas relações matemáticas. A galinha nada sabe sobre geometria, na cabeça. Mas o corpo dela sabe. Prova disso é que ela bota esses assombros geométricos.»

— RUBEM ALVES

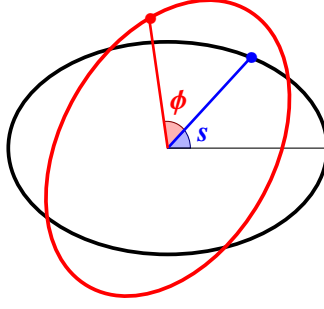
6. O MODELO COMPLETO: RODANDO A CURVA GERATRIZ

Podemos ainda admitir variações na orientação da elipse geratriz $\mathcal{C}$ relativamente à hélice estrutural. Para isso especificamos três ângulos μ, Ω, ϕ que estabelecem a orientação de $\mathcal{C}$ no espaço:

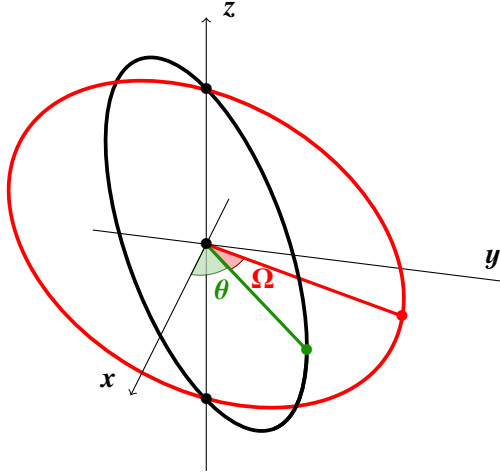
- μ : ângulo de rotação em torno do seu eixo horizontal.
- Ω : ângulo de rotação em torno do eixo OZ .
- ϕ : ângulo de rotação em torno de um vector ortogonal ao plano da elipse.



- Caso 1 (rotação ϕ): basta substituir s por $s + \phi$ em cada ocorrência das funções seno e cosseno em (5.2).



- Caso 2 (rotação Ω): basta substituir θ por $\theta + \Omega$ em cada ocorrência das funções seno e cosseno em (5.2).



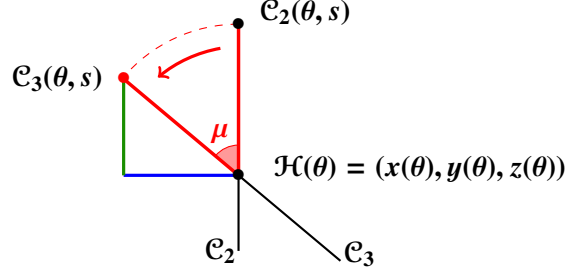
Portanto, as equações (5.2) são substituídas por

$$\mathcal{C}_2(\theta, s) : \begin{cases} x_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos(s + \phi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \\ y_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \cos(s + \phi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \\ z_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) = \sin(s + \phi) r_e(s) e^{\theta \cot \alpha} \end{cases}$$

isto é, as equações (5.3) da superfície da concha são agora dadas por

$$\mathfrak{S}_2(\theta, s) : \begin{cases} x_2^{\mathfrak{S}}(\theta, s) = (A \sin \beta \cos \theta + \cos(s + \phi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \\ y_2^{\mathfrak{S}}(\theta, s) = (A \sin \beta \sin \theta + \cos(s + \phi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha} \\ z_2^{\mathfrak{S}}(\theta, s) = (-A \cos \beta + \sin(s + \phi) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha}. \end{cases}$$

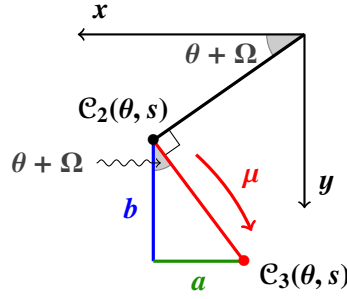
- Caso 3 (rotação μ): Observando a elipse $\mathcal{C}_2$ de perfil e o resultado $\mathcal{C}_3$ da sua rotação por um ângulo μ , seja $\mathcal{C}_3(\theta, s) = (x_3^{\mathcal{C}}(\theta, s), y_3^{\mathcal{C}}(\theta, s), z_3^{\mathcal{C}}(\theta, s))$ o ponto da nova elipse $\mathcal{C}_3$ correspondente a $\mathcal{C}_2(\theta, s)$:



É então evidente que

$$z_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) = z(\theta) + z_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) \cos \mu = (-A \cos \beta + \cos \mu \sin(s + \phi) r_e(s)) e^{\theta \cot \alpha}.$$

Além disso, olhando de cima, temos



donde concluímos que

$$\begin{aligned} x_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) &= x_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) - a = x_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) - [z_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) \sin \mu] \sin(\theta + \Omega) \\ y_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) &= y_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) + b = y_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) + [z_2^{\mathcal{C}}(\theta, s) \sin \mu] \cos(\theta + \Omega). \end{aligned}$$

Por fim, incorporamos um último parâmetro:

- D : sentido do *enrolamento* (que pode ser positivo, 1, ou negativo, -1).

Obtemos então as equações paramétricas que permitem descrever a superfície da concha gerada por uma elipse $\mathcal{C}$, de equação $r_e(s)$, a deslocar-se ao longo de uma hélice cônica $\mathcal{H}$ (D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz [9], M. B. Cortie [4]):

$$\begin{aligned} x_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) &= D[A \sin \beta \cos \theta + \cos(s + \phi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s) - \sin \mu \sin(s + \phi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s)] e^{\theta \cot \alpha} \\ y_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) &= [A \sin \beta \sin \theta + \cos(s + \phi) \sin(\theta + \Omega) r_e(s) + \sin \mu \sin(s + \phi) \cos(\theta + \Omega) r_e(s)] e^{\theta \cot \alpha} \\ z_3^{\mathcal{C}}(\theta, s) &= [-A \cos \beta + \cos \mu \sin(s + \phi) r_e(s)] e^{\theta \cot \alpha}. \end{aligned}$$

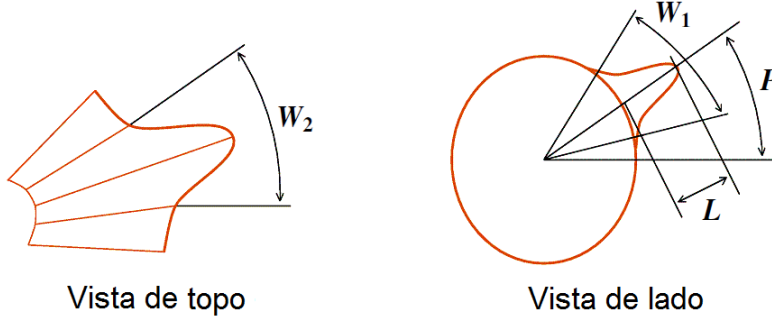
«A Filosofia está escrita nesse grande livro que temos aberto diante dos olhos — o Universo —, mas não pode ser compreendido sem antes se aprender a língua, conhecer os caracteres em que está escrito. É escrito em linguagem matemática e os seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas sem as quais é impossível entender uma palavra, sem eles é como vaguear num labirinto escuro.»

— GALILEO GALILEI

7. CONCHAS COM NÓDULOS E ESTRIAS

Podemos ainda moldar alguns nódulos, espinhos e estrias na concha. Para isso incorporamos 5 parâmetros adicionais:

- N : número de nódulos existentes ao longo de uma revolução completa de θ .
- W_1 : comprimento de cada nódulo ao longo da curva geratriz.
- W_2 : comprimento de cada nódulo ao longo da hélice cónica.
- L : altura de cada nódulo.
- P : ângulo que indica a posição do nódulo na curva geratriz.



O leitor pode observar o efeito destes novos parâmetros na forma final da concha consultando os seguintes aplicativos interactivos na página do Atractor [19]:

- Efeito da variação de cada um dos parâmetros na forma da concha:
www.atractor.pt/mat/conchas/entrada_comp.htm.
- Variação de L , P e W_1 ao longo da curva geratriz:
www.atractor.pt/mat/conchas/concha_2d.html.
- Variação de L , P e W_2 ao longo da hélice cónica:
www.atractor.pt/mat/conchas/concha_2d2.html.

Para sobrepor um nódulo na elipse $\mathcal{C}$ basta substituir a equação $r_e(s)$ da elipse por $r_e(s) + r_n(s, \theta)$, ($0 \leq s < 2\pi$, $\theta \geq 0$), onde $r_n(s, \theta) = 0$, caso $N = 0$ ou $W_1 = 0$ ou $W_2 = 0$, e

$$r_n(s, \theta) = L e^{-\left[\left(\frac{2(s-P)}{W_1}\right)^2 + \left(\frac{2l(\theta)}{W_2}\right)^2\right]} \quad \text{com} \quad l(\theta) = \frac{2\pi}{N} \left[\frac{N\theta}{2\pi} - \text{int}\left(\frac{N\theta}{2\pi}\right) \right],$$

caso contrário [5] (cf. [12]).

No total, as equações da superfície da concha neste modelo dependem de 14 parâmetros (sendo os últimos 4 relevantes somente quando $N \neq 0$):

$$D, A, \alpha, \beta, \mu, \Omega, \phi, a, b, N, W_1, W_2, L, P.$$

Finalmente, com a ajuda de um bom programa gráfico⁷, podemos traçar, sem grande dificuldade, a superfície de qualquer tipo de concha [16, 17]. Apresentaremos alguns exemplos ilustrativos mais adiante.

«O primeiro mistério no mundo é o da natureza das leis físicas. O segundo, o da vida. O terceiro mistério é o do funcionamento do cérebro e o quarto, o mistério da estrutura matemática relacionada com os primeiros três.»

— MISHA GROMOV (em *The Unravelers. Mathematical Snapshots*)

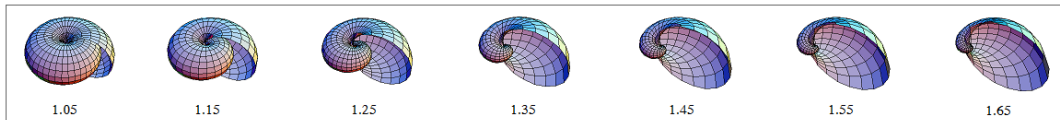
«E o quinto mistério é a poesia. Sempre achei os modelos matemáticos belíssimos. Sempre adorei a perfeição da geometria, embora a minha relação com ela seja puramente estética.»

— PATTI SMITH (em *Mathematics. A beautiful elsewhere*)

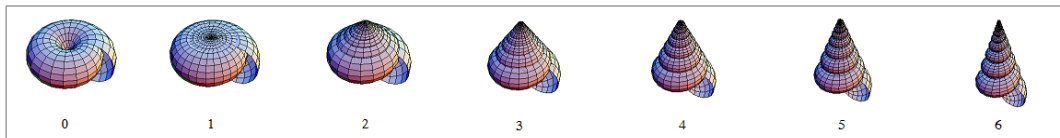
8. VARIANDO OS PARÂMETROS

O ritmo de segregação de material novo em diferentes pontos da concha pelo molusco presume-se que seja determinado pela anatomia do animal. Surpreendentemente, variações muito pequenas nesses ritmos pode ter efeitos tremendos na forma final da concha, o que origina os muitos tipos diferentes de conchas que encontramos na Natureza. Observa-se isso variando alguns dos parâmetros no crescimento da concha:

- Aumentando o factor de crescimento (parâmetro α) da concha, em cada revolução:

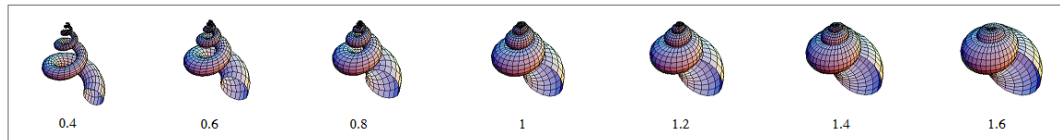


- Aumentando o factor de deslocamento para baixo (parâmetro β) da abertura da concha, em cada revolução:

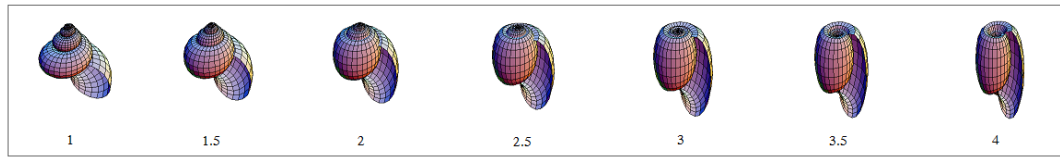


⁷O código de implementação deste modelo para o programa Mathematica pode ser consultado em www.mat.uc.pt/~picado/conchas/modelo2.html.

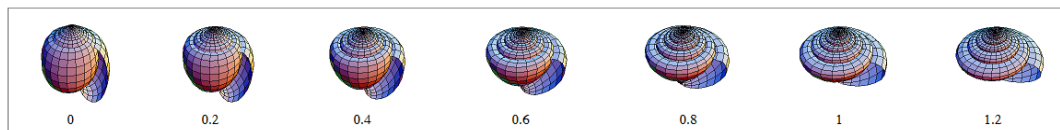
- Aumentando o tamanho da abertura (parâmetros a e b da elipse) relativamente ao tamanho total da concha:



- Alongando a abertura em altura (parâmetro b):



- Variando a orientação desse alongamento:



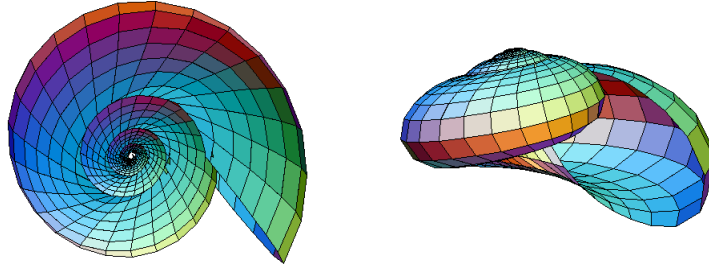
«Quando falo em beleza das formas, não pretendo sugerir o que a maioria das pessoas entende por essa expressão: a beleza dos seres vivos ou de suas representações pictoriais. Refiro-me à linha recta ou círculo, e às superfícies e sólidos que podemos gerar com a recta e o círculo, usando régua, esquadro e compasso. Porque estas coisas não são, como aquelas, belas relativamente a outras coisas, mas sim naturalmente belas em si mesmas.»

— PLATÃO (*Filebo*)

9. EXEMPLOS

Como vimos, as conchas, com a sua forma auto-semelhante, podem ser representadas por superfícies tridimensionais, geradas por uma fórmula relativamente simples, com alguns parâmetros livres. Maravilhosamente, apesar da simplicidade dessas equações, é possível gerar uma grande variedade de tipos diferentes de conchas. Quais? Todos eles, com muito poucas excepções (algumas espécies vivas e fósseis de *Vermicularia* e amonites fósseis do género *Didymoceras*)! Eis alguns exemplos:

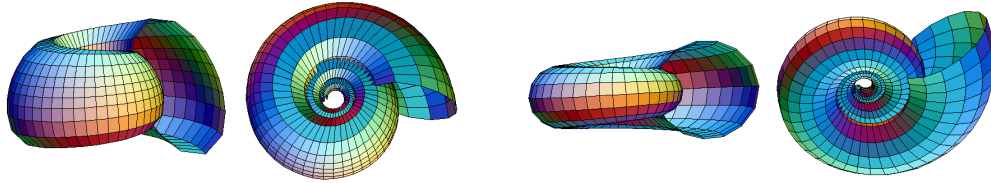
(1) A Náutica de orelha [8, pág. 70], da classe dos Gastrópodes,



pode ser gerada com os parâmetros

$$A = 25, \alpha = 83^\circ, \beta = 42^\circ, \mu = 10^\circ, \Omega = 30^\circ, \phi = 70^\circ, a = 12, b = 20, N = 0$$

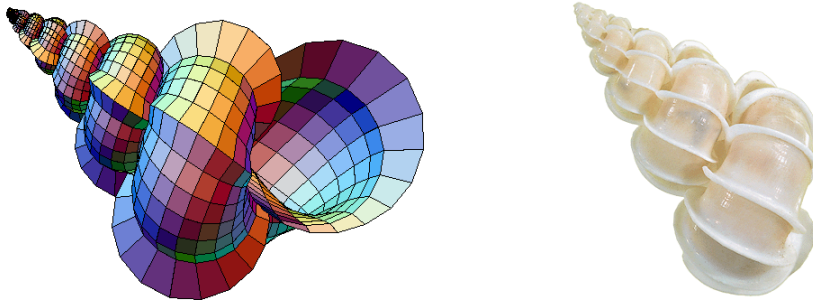
(2) Planorbis (Concha de caracol, gastrópode de água doce) e amonite (fóssil):



$$A = 50, \alpha = 84^\circ, \beta = 85^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = 5^\circ, \phi = 20^\circ, a = 25, b = 45, N = 0.$$

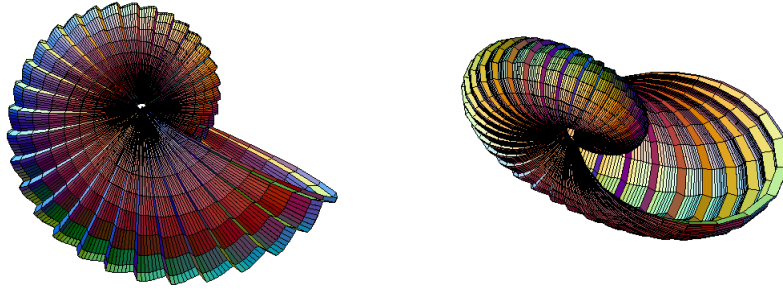
$$A = 2.5, \alpha = 83^\circ, \beta = 90^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = 1^\circ, \phi = 1^\circ, a = 1, b = 0.9, N = 0.$$

(3) A Escalária Preciosa [8, pág. 53], *Epitonium scalare*, é uma das conchas mais famosas e desejadas pelos colecionadores (o nome vulgar destas conchas em inglês, *Precious Wentletrap*, deriva da palavra holandesa que significa escada de caracol).



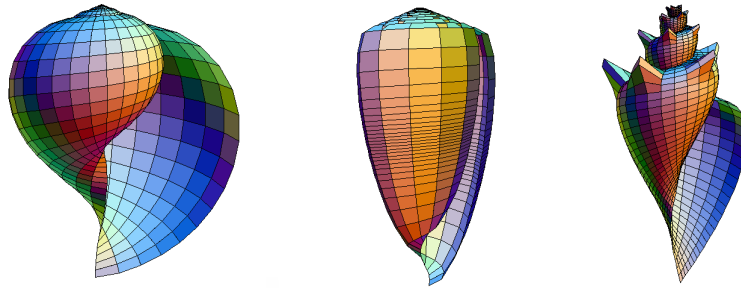
$$A = 90, \alpha = 86^\circ, \beta = 10^\circ, \mu = 5^\circ, \Omega = 1^\circ, \phi = -45^\circ, a = 20, b = 20, \\ N = 180, W_1 = 180, W_2 = 0.4, L = 14, P = 40$$

(4) Argonauta (Cefalópode [8, pág. 249]):



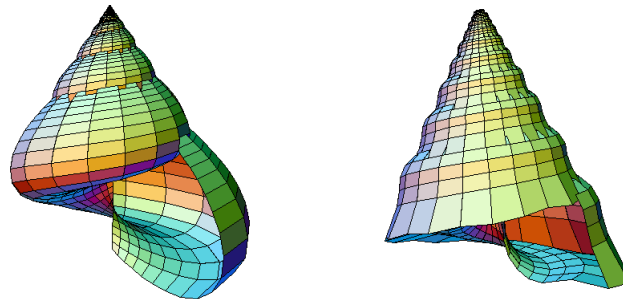
$$A = 2, \alpha = 80^\circ, \beta = 90^\circ, \mu = 0^\circ, \Omega = 0^\circ, \phi = 0^\circ, a = 2, b = 1.5, \\ N = 30, W_1 = 150, W_2 = 20, L = 0.3, P = 5$$

(5) Tonel [8, pág. 88], oliva [8, pág. 156] e concha cavalo [8, pág. 147]:



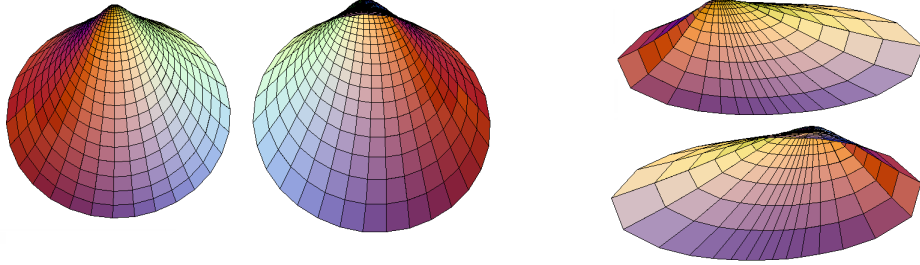
$$A = 46, \alpha = 82^\circ, \beta = 2^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = 10^\circ, \phi = -56^\circ, a = 38, b = 45, N = 0. \\ A = 7, \alpha = 88^\circ, \beta = 12^\circ, \mu = 0^\circ, \Omega = 0^\circ, \phi = 78^\circ, a = 6, b = 1.5, N = 0. \\ A = 50, \alpha = 84^\circ, \beta = -19^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = -2^\circ, \phi = 45^\circ, a = 40, b = 14, \\ N = 8, W_1 = 6, W_2 = 27, L = 8, P = 0.$$

(6) Dois troques (troque maurea tigre [8, pág. 35] e troque comercial [8, pág. 38]):



$$A = 47, \alpha = 84.9^\circ, \beta = 7^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = -2^\circ, \phi = -36^\circ, a = 40, b = 19, N = 0. \\ A = 95, \alpha = 87^\circ, \beta = 15^\circ, \mu = 5^\circ, \Omega = 1^\circ, \phi = -45^\circ, a = 20, b = 20, \\ N = 8, W_1 = 0.5, W_2 = 3, L = 20, P = 10.$$

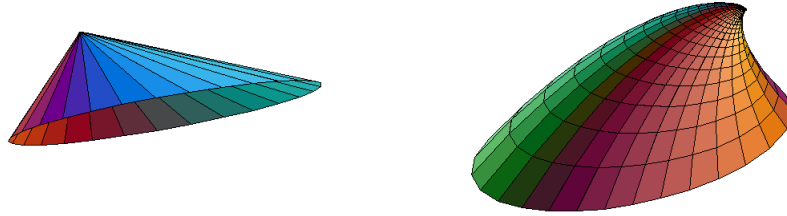
(7) O exemplo mais surpreendente é o dos bivalves, com os seus umbos (protuberâncias do topo) maravilhosamente traçados em toda a sua perfeição! Dois bivalves (glicimeris europeia [8, pág. 213] e concha lyonsia [8, pág. 246]):



$$A = 10500, \alpha = 37^\circ, \beta = 90^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = 1^\circ, \phi = 0^\circ, a = 10000, b = 10500, N = 0.$$

$$A = 9000, \alpha = 39^\circ, \beta = 50^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = 1^\circ, \phi = 0^\circ, a = 6500, b = 17000, N = 0.$$

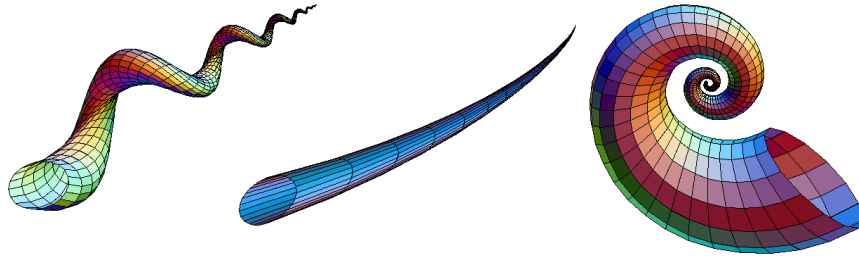
(8) Duas lapas (lapa europeia comum [8, pág. 33] e lapa raiada de azul [8, pág. 34]):



$$A = 450, \alpha = 2^\circ, \beta = 90^\circ, \mu = 0^\circ, \Omega = -50^\circ, \phi = 0^\circ, a = 600, b = 600, N = 0.$$

$$A = 450, \alpha = 18^\circ, \beta = 90^\circ, \mu = 0^\circ, \Omega = -40^\circ, \phi = 0^\circ, a = 400, b = 310, N = 0.$$

(9) Serpentina (Vermítídeo das Índias Ocidentais) [8, pág. 49], dente de elefante [8, pág. 205] (Escafópode) e espírua [8, pág. 249]:



$$A = 180, \alpha = 83^\circ, \beta = 8^\circ, \mu = 10^\circ, \Omega = 2^\circ, \phi = 55^\circ, a = 16, b = 16, N = 0.$$

$$A = 10000, \alpha = 17^\circ, \beta = 80^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = -20^\circ, \phi = -30^\circ, a = 900, b = 700, N = 0.$$

$$A = 2.1, \alpha = 76^\circ, \beta = 90^\circ, \mu = 1^\circ, \Omega = 1^\circ, \phi = 1^\circ, a = 0.5, b = 0.5, N = 0.$$

Estes exemplos, e muitos mais, podem ser manipulados interactivamente, com mais pormenor, em [16] ou [19]. Nesta última página podemos ainda ver todos estes exemplos em imagens belíssimas como a da figura seguinte, traçadas com POV-ray, incluindo versões em estereoscopia.



Num projecto recente dos artistas norte-americanos G. Kogan, P. Stearns e D. Tenese, em <http://phillipstearns.wordpress.com/projects/listening-to-the-ocean>, encontramos mais exemplos, moldados em gesso.

«A matemática pode pôr a nu muitos aspectos da natureza que não imaginamos como matemáticos.»

— IAN STEWART [21]

10. A ORIGEM DAS LAPAS

A matemática dá-nos esta possibilidade (e a liberdade) de traçar qualquer tipo de concha. No entanto, não se encontram na Natureza as que têm valores de α entre 30 e 65 graus. Embora alguns biólogos sugiram que as conchas ainda não assumiram na Natureza todas as possíveis formas porque o processo de evolução ainda não teve tempo suficiente para gerar todas as hipóteses, muitos outros acreditam que o valor de α é determinado pelo papel e função que o molusco atribui à concha, e não pelo acaso [3, pág. 380]. O ângulo α é claramente um dos parâmetros mais importantes na determinação da forma da concha, pois controla o crescimento em tamanho da concha. A forma e tamanho, por sua vez, têm um efeito imediato em factores importantes como o rácio do volume interno relativamente à área da abertura, o rácio do volume interno relativamente à massa do material calcário necessário, ou ainda relativamente à resistência hidrodinâmica. Deste modo, o modo de vida e a química do meio ambiente deverão determinar o valor óptimo de α numa espécie, como alguns estudos cuidadosos realizados com diversas espécies parecem confirmar (no já citado artigo [3] encontramos algumas referências).

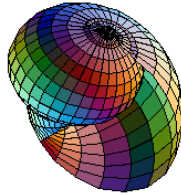
As lapas (Patella, Helcion, etc.) são os poucos exemplos de conchas com ângulos α muito baixos (inferiores a 30°, nalgumas muito próximos do 0) que sobrevivem na Natureza. O valor baixo de α torna-as idealmente adaptadas para viver em ambientes rochosos expostos

à acção das ondas do mar, devido ao grande rácio entre a área da abertura e o volume interno. Agarrando-se à rocha, o molusco deixa de estar exposto, ganhando protecção. No entanto, acredita-se que os seus antepassados sejam gastrópodes com ângulo α superior a 80° (conchas Turbo, um membro moderno das Trochoidea), pelo facto de existirem grandes semelhanças entre o ser vivo que vive na lapa e esses gastrópodes [23]. O resultado deste hipotético processo evolutivo é uma concha achatada com α inferior a 30° como a Patella, o protótipo comum de uma lapa:

Turbo (Trochoidea [8, pág. 41])

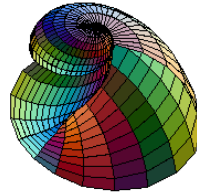
1:

2:



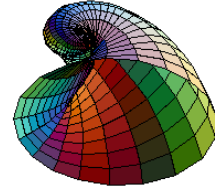
$$\alpha = 83, \beta = 20, \mu = 1, \Omega = -10, \phi = -50$$

$$A = 9, a = 8, b = 7$$



$$\alpha = 73, \beta = 20, \mu = 1, \Omega = -10, \phi = -40$$

$$A = 9, a = 8, b = 7$$



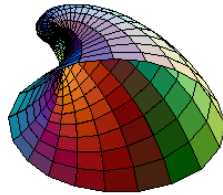
$$\alpha = 63, \beta = 30, \mu = 1, \Omega = -20, \phi = -30$$

$$A = 9, a = 8, b = 7$$

3:

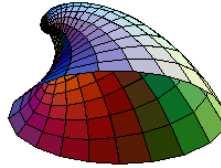
4:

5:



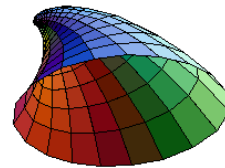
$$\alpha = 53, \beta = 40, \mu = 1, \Omega = -25, \phi = -20$$

$$A = 9, a = 8, b = 7$$



$$\alpha = 43, \beta = 50, \mu = 1, \Omega = -30, \phi = -10$$

$$A = 9, a = 8, b = 7$$

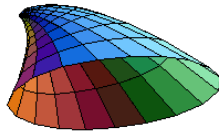


$$\alpha = 33, \beta = 70, \mu = 1, \Omega = -35, \phi = 1$$

$$A = 9, a = 8, b = 7$$

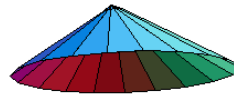
6: Lapa (Helcion [8, pág. 34])

7: Lapa Comum (Patella [8, pág. 33])



$$\alpha = 23, \beta = 89, \mu = 1, \Omega = -40, \phi = 1$$

$$A = 9, a = 8, b = 7$$



$$\alpha = 3, \beta = 89, \mu = 1, \Omega = -80, \phi = 1$$

$$A = 6, a = 8, b = 7$$

REFERÊNCIAS

- [1] M. Abate e F. Tovena, *Curves and Surfaces*, Springer-Verlag, 2012.
- [2] P. Ball, *The self-made tapestry: Pattern formation in nature*, Oxford Univ. Press, 1999.
- [3] M. B. Cortie, The form, function, and synthesis of the molluscan shell, em: *Spiral Symmetry* (I. Hargittai & C. A. Pickover, eds.), World Scientific, 1992, págs. 369–387.
- [4] M. B. Cortie, Digital seashells, *Comput. & Graphics* 17 (1993) 79–84.
- [5] M. B. Cortie, Modelling the surface bumps and spikes of molluscan shells, em: *Proc. of the First International Conchology Conference* (Ed. C.R. Illert), Hadronic Press, Palm Harbor, 1995, págs. 46–65.
- [6] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1963.
- [7] S. Crow, *Seashell Architecture*, www.seashellarchitecture.com.
- [8] S. P. Dance, *Shells: The Photographic Recognition Guide to Seashells of the World*, DK Publ., 2002.
- [9] D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz, Modeling seashells, *Computer Graphics* 26 (1992) 379–387.
- [10] M. Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, Dover Publications, 1977.
- [11] M. Kline, *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times*, Oxford Univ. Press, 1972.
- [12] J. Lega, *Natural patterns. Lecture 8: modeling sea shells*, Novembro 1999, math.arizona.edu/~lega/195/Fall99/lectnotes/lect8, consultado em Novembro de 2012.
- [13] H. Meinhardt, *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*, Springer Verlag, 1998.
- [14] H. Moseley, On the geometrical forms of turbinated and discoid shells, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 128 (1838) 351–370.
- [15] J. Picado, *Apontamentos de Geometria Diferencial: curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$* , Universidade de Coimbra, www.mat.uc.pt/~picado/curvsup/Apontamentos.html, 2006.
- [16] J. Picado, *Conchas marinhas: a simplicidade e beleza da sua descrição matemática*, www.mat.uc.pt/~picado/conchas, Abril de 2007.
- [17] J. Picado, Seashells: the plainness and beauty of their mathematical description, *Loci (Journal of the MAA Mathematical Sciences Digital Library)*, 1 (Março de 2009).
- [18] H. Pinto, Curvatura e torção, em: *Atractor-Matemática Interactiva*, www.atractor.pt/mat/curvtor, 2006.
- [19] H. Pinto, Conchas, em: *Atractor-Matemática Interactiva*, www.atractor.pt/mat/conchas, 2007.
- [20] R. Rucker, How flies fly: The curvature and torsion of space curves, em: *Puzzlers' Tribute: A Feast for the Mind* (David Wolfe & Tom Rodgers, eds.), A. K. Peters, 2002, págs. 327–340.
- [21] I. Stewart, *Os Números da Natureza*, Temas e Debates, Lisboa, 2003.
- [22] D'A. Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge University Press, 1961.
- [23] E. R. Trueman e M. R. Clarke, *The Molluscs*, vol. 10 (Evolution), Academic Press, 1985.
- [24] D. T. Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol. II, Cambridge Univ. Press, 1969.
- [25] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Research, 2004.

CMUC, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 3001-501 COIMBRA

E-mail: picado@mat.uc.pt

URL: www.mat.uc.pt/~picado