VIZINHANÇAS DA DIAGONAL NO SENTIDO DE WEIL
EM RETICULADOS LOCAIS

Jorge Manuel Senos da Fonseca Picado

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, para obtenção do grau de Doutor em Matemática, especialização em Matemática Pura

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
1995

SUMÁRIO

Estruturas de uniformidade nos reticulados locais e suas generalizações (quase-uniformidades, adjacências, etc.) constituem o tema desta dissertação. A noção de Weil de vizinhança da diagonal (da Teoria dos Espaços Uniformes) é estendida a este contexto e prova-se que é um conceito básico sobre o qual aquelas estruturas podem ser formalizadas. Paralelamente, mostra-se como os reticulados locais uniformes também podem ser descritos em termos de estruturas de medida, isto é, determinadas famílias de diâmetros métricos.

ÍNDICE

PREFÁCIO

> *Mathematics place too much importance on the theorems people prove, and not enough on the definitions they devise. (The relative importance we ascribe is clear: theorems often have people's names attached; definitions rarely do). Yet it is definitions that give us the concepts that make thinking effective and make the theorems possible.*
>
> — S. Maurer

> *Sometimes I don't understand how people came across the concept of "fun"; it was probably only abstracted as an opposite to sadness.*
>
> — F. Kafka

Na década de 30, em dois famosos e longos artigos ([71] e [72]), Stone apresentou duas ideias revolucionárias; primeiro, chegou à conclusão que os ideais são muito importantes na Teoria dos Reticulados, ao descobrir que existe uma analogia entre álgebras de Boole e anéis: o conceito de álgebra de Boole é equivalente ao de um determinado tipo de anel — hoje designado *anel de Boole*; depois, seguindo à letra a sua máxima "*one must always topologize*" [73], ligou a Topologia à Álgebra (mais precisamente à Teoria dos Reticulados) ao estabelecer o seu Teorema de Representação para Álgebras de Boole:

> *A categoria das álgebras de Boole é dualmente equivalente à categoria dos espaços T_0 compactos zero-dimensionais* (ou, por outras palavras, *espaços de Hausdorff compactos totalmente desconexos*).

Este teorema tem tido uma grande influência em muitas áreas da Matemática moderna (o leitor poderá ver uma descrição detalhada desta influência na monografia [43] de Johnstone), nomeadamente no estudo de conceitos topológicos de um ponto de vista da Teoria dos Reticulados, iniciado por Wallman em 1938 e continuado com McKinsey e Tarski (1944), Nöbeling (1954), Lesieur (1954), Ehresmann (1957), Dowker e Papert (1966), Banaschewski (1969), Isbell (1972), Simmons (1978), Johnstone (1981), Pultr (1984), entre outros.

Ehresmann e Bénabou em 1957 foram os primeiros a olhar os reticulados completos com uma propriedade distributiva adequada (os ínfimos finitos são distributivos relativamente a supremos arbitrários) como merecedores de estudo como espaços topológicos "generalizados". Estes reticulados foram designados por *reticulados locais* no seminário de Ehresmann em Paris. Apesar da designação inglesa "*local lattices*" para estes reticulados ter entretanto caído em desuso e ter sido substituída pela de "*frame*" — introduzida por Dowker e Papert nos anos sessenta para registar o papel de "moldura" da Topologia que esta categoria de reticulados pode realizar — na falta de uma expressão satisfatória em português, é a tradução daquela que utilizarei neste trabalho. Não é uma solução agradável, mas pelo menos é cómoda e permite-me sublinhar que a abordagem que realizo, apesar de ter motivações topológicas, é fundamentalmente algébrica.

A Teoria dos Reticulados Locais não é mais nem menos do que Teoria dos Reticulados aplicada à Topologia; esta abordagem à Topologia toma os reticulados de conjuntos abertos como a noção primitiva — trata-se de uma topologia "livre de pontos" (no inglês, "*pointfree topology*" ou "*pointless topology*"). Nela se investigam propriedades típicas de reticulados de conjuntos abertos que podem ser expressas sem a utilização de pontos.

Habitualmente pensa-se nos reticulados locais como espaços topológicos generalizados:

> "*The generalized spaces will be called locales. "Generalized" is imprecise, since arbitrary spaces are not determined by their lattices of open sets; but the "insertion" from spaces to locales is full and faithful on Hausdorff spaces*" (Isbell [39]).

Todavia, os morfismos de reticulados locais — que devem preservar ínfimos finitos e supremos arbitrários — só poderão ser interpretados como "funções contínuas generalizadas" quando considerados na categoria dual. Foi Isbell no famoso artigo de 1972 "Atomless parts of spaces" que primeiro salientou isto e primeiro apontou para a necessidade de uma terminologia separada para a categoria dual da dos reticulados locais, cujos objectos, como atrás citado, designou por "*locales*".

Johnstone em [43], [44] e [45] dá-nos uma descrição detalhada de todos estes desenvolvimentos históricos e das vantagens deste novo modo de fazer topologia em contraponto ao clássico. Como Isbell refere na "*Zentralblatt für Mathematik*", numa recensão crítica do artigo [45],

> "*this paper is an argument that topology is better modeled in the category of locales than in topological spaces or another of their variants, with indication of how the millieu should be regarded and supporting illustrations*".

A Teoria dos Reticulados Locais tem sobre a Topologia clássica a vantagem de muitos dos teoremas desta que necessitam do Axioma da Escolha (ou de alguma das suas variantes) poderem naquela ser provados de uma maneira construtiva; por exemplo, o Teorema de Tychonoff [42], a construção da compactificação de Stone-Čech [8] ou a construção da compactificação de Samuel [10]. Por este motivo os reticulados locais são os espaços ideais para a Teoria dos Topos [53].

Geralmente, quando a situação em reticulados locais difere da clássica, a primeira é mais conveniente; por exemplo, coprodutos de reticulados locais paracompactos são paracompactos [39] enquanto que produtos de espaços topológicos paracompactos não são necessariamente paracompactos; outro exemplo: coprodutos de reticulados locais regulares preservam a propriedade de Lindelöf [17], produtos de espaços regulares não.

Pode-se também olhar os reticulados locais como o tipo de álgebras subjacentes à "lógica dos factos verificáveis " (lógica geométrica): uma disjunção infinita pode ser verificada, uma conjunção infinita não. Esta é a abordagem de Vickers em "*Topology via Logic*" [74]:

> "*The traditional — spatial — motivation for general topology and its axioms relies on abstracting first from Euclidean space to metric spaces, and then abstracting out, for no obvious reason, certain properties of their open sets. I believe that the localic view helps to clarify these axioms, by interpreting them not as set theory (finite intersections and arbitrary unions), but as logic (finite conjunctions and arbitrary disjunctions: hence the title)*".

Vickers acrescenta, algumas linhas depois:

> "*I have tried to argue directly from these logical intuitions to the topological axioms, and to frames as the algebraic embodiment of them*".

O estudo de reticulados estruturados começou com Isbell [39], que considerou a noção de uniformidade num reticulado local na forma de um sistema de coberturas, mais tarde desenvolvida por Pultr em [63] e [64], que também definiu diâmetros métricos (a noção análoga à de pseudométrica no contexto espacial). Subsequentemente, Frith [29] estudou estruturas de tipo uniforme no contexto da Teoria das Categorias, introduzindo na Teoria dos Reticulados Locais outras estruturas topológicas que fazem parte das ferramentas de um topólogo, como, por exemplo, os espaços quase-uniformes e os espaços de proximidade. Todos estes conceitos são formulados em termos de coberturas, tendo Frith afirmado mesmo que:

> "*families of covers constitute the only tool that works for frames*" [29].

Recentemente, Fletcher e Hunsaker apresentaram em [23] uma noção equivalente de uniformidade num reticulado local em termos de determinadas famílias de aplicações do reticulado nele próprio.

Na origem do trabalho que agora apresento esteve a seguinte sugestão do Professor Bernhard Banaschewski:

> "*We usually consider uniformities given by covers, as done by Tukey for spaces, but there should also be a theory (deliberately put aside by Isbell in "Atomless parts of spaces") of uniformities by entourages, in the style of Bourbaki*".

Portanto, o tema principal desta dissertação é o estudo de reticulados locais estruturados, estruturas essas definidas em termos de vizinhanças da diagonal no estilo de Weil. Começa-se naturalmente pelas estruturas uniformes (Capítulo I) e ulteriormente investigam-se as estruturas mais gerais de quase-uniformidades e adjacências que daí emergem de um modo natural (Capítulos III e IV). Paralelamente, com o intuito de completar nos reticulados locais um quadro análogo ao existente para espaços, caracterizam-se essas estruturas em termos de "estruturas de medida", isto é, famílias de diâmetros métricos satisfazendo determinados axiomas.

A linguagem desta dissertação é quase inteiramente algébrica. Nela nunca utilizo a abordagem geométrica tornada possível pela linguagem dos *locales*. Tenho aqui a mesma opinião que Madden em [54]:

> "*There are differing opinions about this, and I appreciate that there are some very good reasons for wanting to keep the geometry in view. On the other hand, the algebraic language seems to me, after much experimentation, to afford the simplest and most streamlined presentation of results. Also, I think readers will not have much difficulty finding the geometric interpretations themselves, if they want them. After all, this ultimately comes down to just "reversing all the arrows"* ".

Ao longo desta dissertação privilegia-se o ponto de vista categorial. A linguagem da Teoria das Categorias tem provado ser uma ferramenta adequada na abordagem ao tipo de problemas conceptuais nos quais estou interessado, nomeadamente na selecção das melhores axiomatizações para algumas estruturas nos reticulados locais e no estudo das relações entre elas. Além disso, esta visão permite compreender e perspectivar o significado real dessas abordagens. Como Herrlich e Porst afirmam no prefácio de "*Category Theory at Work*":

> "*Some mathematical concepts appear to be "unavoidable", e.g. that of natural numbers. For other concepts such a claim seems debatable, e.g., for the concepts of real numbers or of groups. Other concepts — within certain limits — seem to be quite arbitrary, their use being based more on historical accidents than on structural necessities. A good example is the concept of topological spaces: compare such "competing" concepts as metric spaces, convergence spaces, pseudotopological spaces, uniform spaces, nearness spaces, frames respectively locales, etc. What are the structural "necessities" or at least "desirabilities"? Category theory provides a language to formulate such questions with the kind of precision needed to analyse advantages and disadvantages of various alternatives. In particular, category theory enables us to decide whether certain mathematical "disharmonies" are due to inherent structural features or rather to chance ocurrences, and in the latter case helps to "set things right"*".

Este é o ponto de vista adoptado neste trabalho e nas publicações [59], [60], e [61] nas quais se baseia.

Outro fio condutor desta dissertação é a procura, em cada contexto, de uma versão estruturada dos functores "aberto" e "espectral" que continue a ser uma adjunção. Estes functores serviram como aferidores das axiomatizações escolhidas.

Passo a descrever o plano desta dissertação, bem como das contribuições que considero originais.

Pretendendo que o presente trabalho seja, na medida do possível, autocontido, a exposição inicia-se com um primeiro capítulo onde se reúnem a maioria das definições e resultados básicos da literatura que servem os capítulos posteriores, bem como as respectivas referências bibliográficas.

No Capítulo I, que considero o núcleo deste trabalho, formula-se uma teoria de uniformidades para reticulados locais no estilo de Weil (Secção 4) e prova-se com o

Teorema 5.14 que se trata, de facto, de uma formulação equivalente à de Isbell [39] e à de Fletcher e Hunsaker [23]. Termina-se o capítulo com uma aplicação desta teoria ao estudo, no contexto dos reticulados locais, de um teorema importante da teoria dos espaços uniformes, devido a Efremovič. Esta abordagem em termos de vizinhanças da diagonal revela-se aqui a linguagem adequada para produzir nos reticulados locais o teorema análogo ao de Efremovič.

Terminado o Capítulo I, seria natural investigar as estruturas não simétricas assim como as estruturas de adjacência (isto é, sem a condição de refinamento) emergentes da teoria de uniformidades ali apresentada. Todavia uma outra forma de encarar uniformidades num conjunto, devida a Bourbaki [14], e a noção de diâmetro métrico introduzida nos reticulados locais por Pultr [64] levaram-me a explorar nestes um processo de descrever as uniformidades usando aqueles diâmetros. É o que faço na parte inicial do Capítulo 2. Como aplicação desta caracterização, inspirado pelo artigo [2] de Adámek e Reiterman, provo no Corolário 4.20 que a categoria dos reticulados locais uniformes admite uma imersão plena num completamento (final e universal) da categoria dos reticulados locais métricos. Obtem-se desta forma uma motivação categorial para os reticulados locais uniformes do ponto de vista dos reticulados locais métricos.

Nos Capítulos III e IV retoma-se então o percurso inicial. O Capítulo III contém na Secção 3 a formulação da teoria de quase-uniformidades em termos das vizinhanças da diagonal no sentido de Weil. O Teorema 4.15 vem demonstrar que se trata de uma teoria equivalente às anteriormente conhecidas. No Capítulo IV passa-se para um outro patamar de generalização estudando nos reticulados locais — usando as vizinhanças da diagonal — as estruturas de adjacência. Neste caso as correspondentes estruturas espaciais, não tendo sido abordadas na literatura, surgem como tópico merecedor de estudo. Obtem-se uma classe de espaços que, embora distintos dos espaços clássicos de adjacência de Herrlich [33], formam uma categoria topológica interessante (Proposição 5.1) que unifica vários conceitos de topologia e uniformidade (Proposições 5.4, 5.5, 5.6, 5.8 e Corolário 5.15). O conceito de Weil de vizinhança da diagonal é, portanto, um conceito topológico básico através do qual diversas ideias topológicas podem ser expressas. Na última secção estudam-se os reticulados locais de proximidade usando as vizinhanças da diagonal, obtendo-se no Teorema 6.10 uma nova caracterização destes. Investigam-se ainda as relações infinitesimais de Efremovič [19] no contexto dos reticulados locais e termina-se com uma observação que mostra, mais uma vez, que a linguagem aqui introduzida se mostra adequada para traduzir em reticulados locais os resultados espaciais formulados em termos das vizinhanças da diagonal de Weil.

Impõe-se uma palavra de explicação quanto às designações escolhidas para os diversos conceitos de proximidade utilizados no Capítulo IV: *espaços de proximidade* designam os "*proximal spaces*" de Efremovič [20], *espaços de contiguidade* designam os "*contigual spaces*" de Ivanova e Ivanov [41] e, numa tradução mais livre e à falta de melhor sinónimo, uso *espaços de adjacência* para nomear os "*nearness spaces*" de Herrlich [33] (a alternativa *espaços de vizinhança*, usada por exemplo no italiano e no alemão para nomear estes últimos espaços, não me parece conveniente por poder gerar confusão com o conceito básico de "vizinhança da diagonal" usado frequentemente ao longo do texto). As mesmas designações são utilizadas para os correspondentes conceitos em reticulados locais.

Cada capítulo termina com uma secção contendo alguns comentários avulsos e referências adicionais.

Chamo a atenção do leitor para um apêndice (na página 145) contendo dois diagramas que resumem as relações entre as diversas categorias de espaços e de reticulados locais apresentadas ao longo do texto, bem como para as listas de categorias (página 155), símbolos (página 159) e definições (página 163) utilizadas. Por uma questão de coerência com a literatura existente — e também por comodidade — utilizo, para denotar as diversas categorias consideradas, abreviaturas das designações em inglês dos respectivos objectos.

A elevada extensão da Bibliografia é consequência da minha preocupação em relacionar os conceitos aqui introduzidos com diversos conceitos afins já existentes na literatura e em motivar a exposição nos reticulados locais com o quadro espacial.

Salvo raras excepções não apresento as demonstrações dos resultados anteriormente conhecidos, limitando-me a referenciá-los.

Considero originais os conceitos e resultados incluídos nos Capítulos I, II, III e IV, com excepção daqueles especificamente referidos.

De um modo geral os princípios de escolha como o Axioma da Escolha ou o Axioma da Escolha para Conjuntos Numeráveis serão utilizados ao longo da dissertação sem qualquer referência.

O sistema de numeração utilizado não me parece que ofereça dúvidas. Quando um resultado, definição, observação ou exemplo é invocado fora do capítulo onde está integrado, precede-se a sua referência do número do capítulo respectivo.

***

A presente dissertação foi elaborada sob a orientação dos Professores Bernhard Banaschewski e Manuela Sobral a quem desejo expressar o meu reconhecimento. Ao Professor Bernhard Banaschewski agradeço a oportunidade que me deu de estudar sob a sua orientação, a sugestão do tema que deu origem a esta tese e os valiosos comentários que — apesar da distância — nunca deixou de fazer. À Professora Manuela Sobral, com quem primeiro aprendi Teoria das Categorias e Teoria dos Reticulados Locais, agradeço, em particular, o apoio encorajador que sempre deu ao meu trabalho. Pelo seu tempo e exemplo, exprimo a minha gratidão.

Um agradecimento muito especial à Maria Manuel Clementino com quem discuti quase diariamente muitas das ideias desenvolvidas neste trabalho, bem como pela atenção que sempre lhe dispensou.

Ao Professor Aleš Pultr agradeço a oportunidade que me concedeu de participar nos seus seminários e o muito que com ele aprendi durante as minhas estadas em Praga.

Lembro ainda os frutos que colhi, no meu trabalho individual, do ambiente estimulante dos seminários regulares do “grupo de Teoria das Categorias”.

Noutro plano, devo também agradecer o apoio financeiro do projecto TEMPUS JEP 2692 e do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra agradeço as condições de trabalho de que beneficiei durante a preparação desta dissertação.

Coimbra, Setembro de 1995

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Este capítulo é um sumário dos conceitos e resultados relevantes da literatura que serão necessários nos restantes capítulos. Todos os resultados são bem conhecidos. A nossa principal referência para informação sobre reticulados locais é o livro de Johnstone [43], e sobre Teoria das Categorias, o livro clássico de MacLane [52]. Para noções mais recentes de Teoria das Categorias — nomeadamente categorias concretas — referimos o livro de Adámek, Herrlich e Strecker [1], cuja terminologia utilizamos. Como elemento de consulta para Topologia, qualquer texto introdutório como, por exemplo, o de Willard [77], serve.

1. Reticulados locais e espaços topológicos

Da mesma maneira que a noção de álgebra de Boole é originária numa abstracção do conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes de um conjunto X, a noção de reticulado local surge como uma abstracção da topologia de um espaço: um *reticulado local* é um reticulado completo L satisfazendo a lei de distributividade infinita

$$x \wedge \bigvee S = \bigvee \{x \wedge s \mid s \in S\}$$

para quaisquer $x \in L$ e $S \subseteq L$. Um *homomorfismo de reticulados locais* é uma aplicação que preserva ínfimos finitos, incluindo a unidade 1, e supremos arbitrários, incluindo o zero 0. Note-se que a estrutura de reticulado local não difere da de álgebra de Heyting uma vez que pelo Teorema de Freyd do Functor Adjunto um reticulado completo satisfaz aquela lei de distributividade infinita se e só se for uma álgebra de Heyting. No entanto existem diferenças na definição dos respectivos homomorfismos.

A categoria dos reticulados locais e homomorfismos de reticulados locais será denotada por Frm.

Como acima observámos, os exemplos motivadores de reticulados locais são as topologias: para qualquer espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ o reticulado $\mathcal{T}$ dos abertos de $(X, \mathcal{T})$, no qual a operação supremo é a união e a operação ínfimo é o interior da intersecção, é um reticulado local. Qualquer reticulado local deste tipo é chamado *espacial.* Existem reticulados locais não espaciais: uma álgebra de Boole não atómica nunca pode ser uma topologia de um conjunto. Todavia, existe uma relação importante entre reticulados locais e espaços topológicos que descreveremos de seguida. Nela a categoria dos espaços topológicos e aplicações contínuas será denotada por Top.

Definições 1.1.

(1) O functor contravariante $\Omega : \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Frm}$ que aplica cada espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ no seu reticulado local de abertos $\mathcal{T}$, e que aplica cada função contínua $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ no morfismo de reticulados locais $\Omega(f) : \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{T}$ definido por $\Omega(f)(U) = f^{-1}(U)$, onde $U \in \mathcal{T}'$, é chamado o *functor aberto* de Top em Frm.

(2) Seja L um reticulado local. O *espectro* de L é o conjunto ptL de todos os homomorfismos de reticulados locais $p : L \longrightarrow \mathbf{2}$ ($\mathbf{2}$ denota o reticulado local $\{0,1\}$), chamados *pontos* de L, com a *topologia espectral* $\mathcal{T}_{ptL} = \{\Sigma_x : x \in L\}$, onde

$$\Sigma_x = \{p \in ptL \mid p(x) = 1\}.$$

O functor contravariante $\Sigma : \mathsf{Frm} \longrightarrow \mathsf{Top}$ que faz corresponder a cada reticulado local o seu espectro $\Sigma(L) = (ptL, \mathcal{T}_{ptL})$ e a cada morfismo de reticulados locais $f : L \longrightarrow L'$ a aplicação contínua $\Sigma(f) : \Sigma(L') \longrightarrow \Sigma(L)$ definida por $\Sigma(f)(p) = p \cdot f$, onde p designa um ponto arbitrário de L', é chamado o *functor espectral* de Frm em Top.

Teorema 1.2. (Papert e Papert [58], Isbell [39]) *Os functores aberto e espectral e as transformações naturais*

$$\eta : 1_{\mathsf{Top}} \longrightarrow \Sigma\Omega \quad e \quad \xi : 1_{\mathsf{Frm}} \longrightarrow \Omega\Sigma,$$

definidas por

$$\eta_{(X,\mathcal{T})}(x)(U) = \begin{cases} 1 & se\ x \in U \\ 0 & se\ x \notin U \end{cases}$$

e

$$\xi_L(x) = \Sigma_x,$$

estabelecem uma adjunção dual entre a categoria dos espaços topológicos e a categoria dos reticulados locais. ■

A restrição desta adjunção dual às respectivas subcategorias plenas dos espaços sóbrios [43] e dos reticulados locais espaciais é uma equivalência dual, e é a "maior" dualidade nela contida. É habitual considerar os reticulados locais como espaços topológicos generalizados, tendo em conta no entanto que um espaço topológico é essencialmente determinado pelo reticulado dos seus conjuntos abertos quando é sóbrio, mas que, além desse ponto, espaços e reticulados locais divergem.

Como Ω é contravariante, ao pensar topologicamente em reticulados locais é usual trabalhar-se na categoria dual de Frm, isto é, na categoria Loc dos *locales.* Nestas circunstâncias, $\Omega : \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Loc}$ e $\Sigma : \mathsf{Loc} \longrightarrow \mathsf{Top}$ são covariantes. Ao longo deste trabalho, contudo, permaneceremos sempre em Frm.

Recordemos algumas noções e propriedades de reticulados locais que serão utilizadas ao longo do texto.

Um subconjunto M de L é um *sub-reticulado local* de L se $0, 1 \in M$ e M for fechado para ínfimos finitos e supremos arbitrários.

Um reticulado local L diz-se:

- *compacto* se $1 = \bigvee S$ implica $1 = \bigvee S'$ para algum subconjunto finito S' de S;
- *regular* se, para todo o $x \in L$, $x = \bigvee\{y \in L \mid y \prec x\}$, onde $y \prec x$ significa que $y \wedge z = 0$ e $x \vee z = 1$ para algum $z \in L$. Em termos do *pseudocomplemento*

$$y^* = \bigvee\{z \in L \mid z \wedge y = 0\},$$

$y \prec x$ é equivalente a $y^* \vee x = 1$.

- *normal* se $x \vee y = 1$ implica a existência de u e v em L satisfazendo $u \wedge v = 0$ e $x \vee u = 1 = y \vee v$.

Assim, para qualquer espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, o reticulado local $\Omega(X, \mathcal{T})$ é compacto, regular ou normal se e só se $(X, \mathcal{T})$ é, respectivamente, compacto, regular ou normal no sentido topológico usual. Além disso, qualquer reticulado local compacto e regular é normal.

A fórmula de DeMorgan

$$\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right)^* = \bigwedge_{i \in I} x_i^*$$

é verdadeira em qualquer reticulado local.

Quanto à sua dual, somente a desigualdade trivial

$$\bigvee_{i \in I} x_i^* \leq \left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right)^*$$

se verifica.

A propósito refira-se que, sendo $f : L \longrightarrow L'$ um homomorfismo de reticulados locais, também se verifica somente a desigualdade trivial $f(x^*) \leq f(x)^*$. Obviamente, se L é um *reticulado local booleano*, isto é, uma álgebra de Boole, a igualdade $f(x^*) = f(x)^*$ é verdadeira para qualquer x de L. Note-se que um reticulado local L é booleano se e só se, para todo o $x \in L$, $x \vee x^* = 1$ ou, equivalentemente, $x^{**} = x$.

2. Bi-reticulados locais e espaços bitopológicos

Do mesmo modo que os espaços topológicos motivam a noção de reticulado local, os espaços bitopológicos (primeiramente estudados por Kelly [47]) motivam a noção de bi-reticulado local. Esta ideia é devida a Banaschewski, Brümmer e Hardie [7]. Um *bi-reticulado local* é um triplo (L_0, L_1, L_2), no qual L_0 é um reticulado local e L_1 e L_2 são sub-reticulados locais de L_0 tais que cada elemento de L_0 é supremo de ínfimos finitos de $L_1 \cup L_2$. Um *homomorfismo de bi-reticulados locais* $f : (L_0, L_1, L_2) \longrightarrow (L_0', L_1', L_2')$ é um homomorfismo de reticulados locais $f : L_0 \longrightarrow L_0'$ que aplica L_i em L_i' $(i \in \{1, 2\})$.

Denotamos as categorias dos espaços bitopológicos e aplicações bicontínuas e dos bi-reticulados locais e homomorfismos de bi-reticulados locais por, respectivamente, BiTop e BiFrm. A adjunção dual entre as categorias Top e Frm pode ser estendida aos espaços bitopológicos e aos bi-reticulados locais [7]:

- O *functor aberto* contravariante $\Omega : \mathsf{BiTop} \longrightarrow \mathsf{BiFrm}$ faz corresponder a cada espaço bitopológico $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ o bi-reticulado local $(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, sendo $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$ a topologia menos fina que contém $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$. Para qualquer aplicação bicontínua $f : (X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (X', \mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2')$, $\Omega(f) : \Omega(X', \mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2') \longrightarrow \Omega(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ é definida por $\Omega(f)(U) = f^{-1}(U)$ para qualquer $U \in \mathcal{T}_1' \vee \mathcal{T}_2'$.

- O *functor espectral* contravariante $\Sigma : \mathsf{BiFrm} \longrightarrow \mathsf{BiTop}$ é definido do seguinte modo: para um bi-reticulado local $L = (L_0, L_1, L_2)$, $\Sigma(L) = (ptL_0, \{\Sigma_x : x \in L_1\}, \{\Sigma_y : y \in L_2\})$ onde, para cada $x \in L_1 \cup L_2$, Σ_x designa o conjunto $\{p \in ptL_0 : p(x) = 1\}$. Para qualquer homomorfismo de bi-reticulados locais $f : L \longrightarrow L'$, a aplicação bicontínua $\Sigma(f) : \Sigma(L') \longrightarrow \Sigma(L)$ é definida por $\Sigma(f)(\xi) = \xi \cdot f$.

- Estes functores definem uma adjunção dual entre BiTop e BiFrm, com unidades de adjunção

  $$\eta_{(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)} : (X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \longrightarrow \Sigma\Omega(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$$

  e

  $$\xi_{(L_0,L_1,L_2)} : (L_0, L_1, L_2) \longrightarrow \Omega\Sigma(L_0, L_1, L_2)$$

  definidas por

  $$\eta_{(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)}(x)(U) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

  e

  $$\xi_{(L_0,L_1,L_2)}(x) = \Sigma_x.$$

Para uma informação detalhada sobre bi-reticulados locais indicamos [7] e [69].

3. Quocientes de reticulados locais

Como um reticulado local é uma estrutura algébrica, existe um método conveniente de construir imagens homomórficas de reticulados locais como quocientes por congruências ([42], [48]):

Seja R uma relação binária num reticulado local L. Um elemento $x \in L$ diz-se *R-saturado* (segundo a terminologia de [49]) se, para quaisquer y, z, w em L,

$$y \wedge w \leq x \Longleftrightarrow z \wedge w \leq x$$

sempre que $(y, z) \in R$. Em Kříž [48] estes elementos são designados *R-coerentes* e em Banaschewski [3] elementos *R-compatíveis*. Ínfimos de elementos R-saturados são ainda R-saturados e, por isso, podemos definir uma aplicação $\kappa : L \longrightarrow L$ sendo $\kappa(x)$, para cada $x \in L$, o menor elemento R-saturado maior ou igual a x. Denotemos o contradomínio $\kappa(L)$ por L/R.

Teorema 3.1. (Kříž [48])

(a) *Se em L/R definirmos os ínfimos como em L e os supremos por $\bigsqcup_{i \in I} x_i = \kappa(\bigvee_{i \in I} x_i)$, obtemos um reticulado local. Além disso, $\kappa : L \longrightarrow L/R$ é um homomorfismo de reticulados locais tal que $\kappa(x) = \kappa(y)$ quando $(x, y) \in R$.*

(b) *Se $f : L \longrightarrow L'$ é um homomorfismo de reticulados locais tal que $f(x) = f(y)$ sempre que $(x, y) \in R$, então existe um único homomorfismo de reticulados locais $g : L/R \longrightarrow L'$ tal que $g \cdot \kappa = f$.* ■

4. Conjuntos descendentes e filtros

Quando A é um subconjunto de um conjunto pré-ordenado $(L, \leq)$, definimos

$$\downarrow A := \{x \in L \mid x \leq a \text{ para algum } a \in A\}$$

e

$$\uparrow A := \{x \in L \mid a \leq x \text{ para algum } a \in A\}.$$

O conjunto A é dito um *conjunto descendente* (respectivamente um *conjunto ascendente*) de L se $\downarrow A = A$ (respectivamente $\uparrow A = A$). Como a intersecção de conjuntos descendentes é um conjunto descendente, o conjunto $\mathcal{D}(L)$ de todos os conjuntos descendentes de L é um reticulado completo, sendo mesmo um reticulado local.

Denotaremos por $[x, y]$ a intersecção $\uparrow\{x\} \cap \downarrow\{y\}$.

Suponhamos que em $(L, \leq)$ existe precisamente uma unidade bem como o ínfimo $x \wedge y$ de qualquer par de elementos. Nestas condições, um subconjunto F de L diz-se um *filtro* de $(L, \leq)$ se for um conjunto ascendente fechado para ínfimos finitos (contendo, em particular, a unidade 1). Um subconjunto F' de um filtro F diz-se uma *base* de F se $\uparrow F' = F$. Um subconjunto F' de L é uma base de algum filtro em L se e só se, para quaisquer $x, y \in F'$, existe $z \in F'$ tal que $z \leq x \wedge y$. Neste caso o *filtro gerado* por F', isto é, o filtro do qual F' é uma base, é o conjunto $\uparrow F'$.

5. Coprodutos binários de reticulados locais

O coproduto

$$L_1 \xrightarrow{u_{L_1}} L_1 \oplus L_2 \xleftarrow{u_{L_2}} L_2$$

de dois reticulados locais L_1 e L_2 pode ser construído do seguinte modo (v. p. ex. [17] ou [43]): consideremos o produto cartesiano $L_1 \times L_2$ munido da ordem usual. Obtemos $L_1 \oplus L_2$ como o reticulado local $\mathcal{D}(L_1 \times L_2)/R$ onde R consiste em todos os pares do tipo

$$\Big(\downarrow\{(x, 0)\}, \emptyset\Big),$$

$$\Big(\downarrow\{(0, y)\}, \emptyset\Big),$$

$$\Big(\downarrow\Big\{(\bigvee S, y)\Big\}, \bigcup_{s \in S} \downarrow\Big\{(s, y)\Big\}\Big)$$

e

$$\Big(\downarrow\Big\{(x, \bigvee S)\Big\}, \bigcup_{s \in S} \downarrow\Big\{(x, s)\Big\}\Big).$$

De um modo equivalente, definindo um *C-ideal* de $L_1 \times L_2$ como um conjunto descendente $A \subseteq L_1 \times L_2$ satisfazendo

$$\{x\} \times S \subseteq A \;\Rightarrow\; \Big(x, \bigvee S\Big) \in A$$

e

$$S \times \{y\} \subseteq A \;\Rightarrow\; \left(\bigvee S, y\right) \in A,$$

uma vez que a intersecção de C-ideais é ainda um C-ideal, o conjunto de todos os C-ideais de $L_1 \times L_2$ é um reticulado local no qual

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$$

e

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcap \{B \mid B \text{ é um } C\text{-ideal e } \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B\};$$

este reticulado local coincide com $L_1 \oplus L_2$. Note-se que o caso $S = \emptyset$ implica que qualquer C-ideal contenha o C-ideal $\downarrow(1,0) \cup \downarrow(0,1)$, que é o zero de $L_1 \oplus L_2$, e que denotaremos por $\mathbb{O}_{L_1 \oplus L_2}$ (ou simplesmente por $\mathbb{O}$ quando daí não advier nenhuma ambiguidade). Obviamente, cada $\downarrow(x,y) \cup \mathbb{O}$ é um C-ideal, que denotaremos por $x \oplus y$. Por fim, basta definir $u_{L_1}(x) = x \oplus 1$ e $u_{L_2}(y) = 1 \oplus y$. Os seguintes factos ser-nos-ão úteis:

- Qualquer que seja $E \in L_1 \oplus L_2$, $E = \bigvee\{x \oplus y \mid (x,y) \in E\}$ e, portanto, os C-ideais da forma $x \oplus y$ geram por supremos o reticulado local $L_1 \oplus L_2$;
- $x \oplus y = \mathbb{O}$ se e só se $x = 0$ ou $y = 0$;
- $\bigvee\{x \oplus s \mid s \in S\} = x \oplus (\bigvee S)$ e $\bigvee\{s \oplus y \mid s \in S\} = (\bigvee S) \oplus y$;
- $\bigcap\{s \oplus t \mid s \in S, t \in T\} = (\bigwedge S) \oplus (\bigwedge T)$;
- $x \leq y$ e $z \leq w$ implicam $x \oplus z \subseteq y \oplus w$;
- $\mathbb{O} \neq x \oplus y \subseteq z \oplus w$ implica $x \leq z$ e $y \leq w$.

Notemos que $L_1 \oplus \mathbf{2}$ é isomorfo a L_1: basta considerar o diagrama de coproduto

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "1"] & L_1 & \mathbf{2} \arrow[l, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

onde σ designa o único morfismo de $\mathbf{2}$ em L_1. Por este isomorfismo, o elemento $x \oplus 1$ é identificado com x e $x \oplus 0$ com 0.

Para quaisquer homomorfismos de reticulados locais $f_i : L_i \longrightarrow L'_i$, $(i \in \{1,2\})$, escrevemos $f_1 \oplus f_2$ para denotar o único morfismo de $L_1 \oplus L_2$ em $L'_1 \oplus L'_2$ que torna o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, "u_{L_1}"] \arrow[d, "f_1"'] & L_1 \oplus L_2 \arrow[d, dashed, "f_1 \oplus f_2"] & L_2 \arrow[l, "u_{L_2}"'] \arrow[d, "f_2"] \\
L'_1 \arrow[r, "u_{L'_1}"] & L'_1 \oplus L'_2 & L'_2 \arrow[l, "u_{L'_2}"']
\end{tikzcd}$$

É claro que

$$(f_1 \oplus f_2)\Big(\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma \oplus y_\gamma)\Big) = \bigvee_{\gamma\in\Gamma}\Big(f_1(x_\gamma) \oplus f_2(y_\gamma)\Big).$$

6. Conexões de Galois

Finalizamos este capítulo com uma noção que o leitor decerto já encontrou, pelo menos no quadro dos conjuntos parcialmente ordenados. Uma *conexão de Galois* entre conjuntos parcialmente ordenados A e B é definida como um par (f, g) de funções $f : B \longrightarrow A$ e $g : A \longrightarrow B$ preservando a ordem e satisfazendo a condição

$$f(b) \leq a \ \text{ se e só se } \ b \leq g(a)$$

para todo o $a \in A$ e todo o $b \in B$. Esta última propriedade é equivalente a dizer que

$$f \cdot g \leq 1_A \text{ e } 1_B \leq g \cdot f.$$

Considerando A e B como categorias (v. p. ex. MacLane [52]) e f e g como functores, uma conexão de Galois exprime uma adjunção entre A e B: o par (f, g) é uma conexão de Galois se e só se g é adjunto à esquerda de f (e neste caso escreve-se $g \dashv f$).

Infelizmente a maioria dos resultados interessantes sobre conexões de Galois não são válidos para situações gerais de adjunção. No entanto, para o seguinte nível de generalidade as propriedades mais importantes das conexões de Galois continuam válidas (veja [36]):

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias concretas e sejam $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ functores concretos; o par (F, G) diz-se uma *correspondência de Galois* se

$$F \cdot G \leq 1_{\mathcal{A}} \text{ e } 1_{\mathcal{B}} \leq G \cdot F.$$

Notas sobre o Capítulo 0:

(1) Todos os resultados apresentados neste capítulo são bem conhecidos. Citamos o primeiro capítulo de Johnstone [43] como referência para as noções básicas de Teoria dos Reticulados que utilizamos. O *Compêndio de Reticulados Contínuos* [31] é também uma referência útil para o tipo de resultados sobre reticulados que utilizamos.

(2) A ideia da adjunção do Teorema 1.2, devida a Papert e Papert [58], ocorreu no Seminário de Erhesmann (1958) e foi posteriormente desenvolvida por Isbell em [39].

(3) O Teorema 3.1 é devido a Kříž [48]. Contudo, a ideia principal desta abordagem pertence a Johnstone [42], que formulou o teorema numa forma um pouco menos geral.

CAPÍTULO I

RETICULADOS LOCAIS UNIFORMES NO SENTIDO DE WEIL

É bem conhecido o facto de que uma uniformidade num conjunto X pode ser descrita de três modos diferentes: como uma família de relações binárias reflexivas ("vizinhanças da diagonal") em X, como uma família de coberturas ("coberturas uniformes") de X ou como uma família de pseudométricas em X.

Na Teoria dos Reticulados Locais a noção de uniformidade — na forma de um sistema de coberturas — foi introduzida por Isbell em [39]. Como existe um interesse corrente em reticulados locais uniformes, parece-nos desejável completar o quadro para reticulados locais, isto é, ter caracterizações para as uniformidades análogas às caracterizações para espaços dadas em termos de vizinhanças da diagonal ou pseudométricas. Esta é a principal motivação para esta tese.

Recentemente, em [23], Fletcher e Hunsaker apresentaram uma formulação equivalente para esta noção, a que chamaram "entourage uniformity" visto lhes parecer ser esta a noção para reticulados locais análoga à de Weil para espaços. No entanto, esta não é a nossa opinião. O objectivo deste primeiro capítulo é o de apresentar uma caracterização de uniformidades para reticulados locais no estilo de Weil. Formulamos e investigamos uma definição de uniformidade, alternativa à de Fletcher e Hunsaker, que é, na nossa opinião, mais parecida com as uniformidades de Weil para espaços pois é expressa em termos de coprodutos de reticulados locais, isto é, produtos de *locales*. Identificamos ainda esta nova noção com as anteriormente conhecidas, provando o isomorfismo (concreto) entre as respectivas categorias.

1. Espaços uniformes

A noção de uniformidade num conjunto X foi introduzida nos anos 30 por André Weil em termos de subconjuntos de $X \times X$ contendo a diagonal

$$\Delta_X = \{(x,x) \,:\, x \in X\},$$

chamados "vizinhanças da diagonal" (do francês "entourages de Δ dans $X \times X$"). A abordagem clássica deste assunto pode encontrar-se no Capítulo II de Bourbaki [15]:

Definições 1.1. (Weil [76]) Seja X um conjunto.

(a) Um subconjunto E de $X \times X$ diz-se uma *vizinhança da diagonal* de X se contém a diagonal Δ_X.

(b) Uma *uniformidade* em X é um conjunto $\mathcal{E}$ de vizinhanças da diagonal de X satisfazendo as seguintes condições:

(UW1) $\mathcal{E}$ é um filtro do reticulado completo $(WEnt(X), \subseteq)$ das vizinhanças da diagonal de X;

(UW2) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que a vizinhança da diagonal

$$F \circ F := \{(x,y) \in X \times X \mid \text{ existe } z \in X \text{ tal que } (x,z),(z,y) \in F\}$$

está contida em E;

(UW3) qualquer que seja $E \in \mathcal{E}$ o conjunto

$$E^{-1} := \{(x,y) \in X \times X \mid (y,x) \in E\}$$

também pertence a $\mathcal{E}$.

O par $(X, \mathcal{E})$ é então chamado um *espaço uniforme*.

(c) Uma função $f : (X,\mathcal{E}) \longrightarrow (X',\mathcal{E}')$, onde $(X,\mathcal{E})$ e $(X',\mathcal{E}')$ são espaços uniformes, diz-se *uniformemente contínua* se, para qualquer $E \in \mathcal{E}'$, $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}$.

Uma *base de uma uniformidade* $\mathcal{E}$ é uma subfamília $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ tal que $\uparrow\mathcal{E}' = \mathcal{E}$. Uma colecção $\mathcal{E}'$ de vizinhanças da diagonal de X é então uma base de alguma uniformidade se e só se é uma base de um filtro de $(WEnt(X), \subseteq)$ e satisfaz (UW2) e a condição

$$\text{para cada } E \in \mathcal{E}' \text{ existe } F \in \mathcal{E}' \text{ tal que } F^{-1} \subseteq E.$$

Qualquer uniformidade $\mathcal{E}$ em X induz em X uma topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ (chamada *topologia uniforme*) definida do seguinte modo:

> $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ se, para todo o $x \in A$, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E[x] := \{y \in X \mid (x,y) \in E\} \subseteq A$.

Dados $A, B \subseteq X$, escrevemos $A \overset{\mathcal{E}}{\lhd} B$ se $E \circ (A \times A) \subseteq B \times B$ para algum $E \in \mathcal{E}$. Uma vez que $A \times A \subseteq E \circ (A \times A)$, a relação de ordem $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ é mais forte do que a inclusão $\subseteq$. Por uma questão de referência ulterior registemos o seguinte resultado, que é bem conhecido:

Proposição 1.2. (Weil [76]) *Seja* $(X, \mathcal{E})$ *um espaço uniforme. Então, qualquer que seja* $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$, $A = \bigcup\{B \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \mid B \overset{\mathcal{E}}{\lhd} A\}$. ■

Além desta axiomatização da noção de uniformidade, existe uma outra, devida a Tukey [75], que lhe é equivalente e na qual o termo básico é o de "cobertura uniforme" de X:

Definições 1.3. (Tukey [75]) Seja X um conjunto.

(a) Um subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}(X)$ é uma *cobertura* de X se $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Dado $A \subseteq X$, o elemento

$$st(A,\mathcal{U}) := \bigcup\{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}$$

diz-se a *estrela de A em $\mathcal{U}$*. Uma cobertura $\mathcal{U}$ é um *refinamento* de uma cobertura $\mathcal{V}$, e nesse caso escreve-se $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, se para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$.

(b) Uma *uniformidade de coberturas* em X é um conjunto μ de coberturas de X tal que:

(U1) μ é um filtro do conjunto pré-ordenado $(Cov(X), \leq)$ das coberturas de X;

(U2) para cada $\mathcal{U} \in \mu$ existe $\mathcal{V} \in \mu$ tal que a cobertura

$$\mathcal{V}^* := \{st(V, \mathcal{V}) \mid V \in \mathcal{V}\}$$

é um refinamento de $\mathcal{U}$.

Uma *base de uma uniformidade de coberturas* μ é uma subfamília μ' de μ tal que $\uparrow \mu' = \mu$. Evidentemente, μ' é uma base de alguma uniformidade de cobertura em X se e só se é uma base de um filtro de $(Cov(X), \leq)$ tal que, para cada $\mathcal{U} \in \mu'$, existe $\mathcal{V} \in \mu'$ satisfazendo $\mathcal{V}^* \leq \mathcal{U}$.

Teorema 1.4. (Tukey [75]) *A família μ das coberturas uniformes de um espaço uniforme $(X, \mathcal{E})$, isto é, a família de todas as coberturas refinadas por uma cobertura da forma $E[x]$, para algum $E \in \mathcal{E}$, é uma base de uma uniformidade de coberturas em X.*

Reciprocamente, dada uma uniformidade de coberturas μ num conjunto X, a família dos conjuntos

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} (U \times U),$$

para $\mathcal{U} \in \mu$, constitui uma base para uma uniformidade em X, cujas coberturas uniformes são precisamente os elementos de μ. ■

Sob um ponto de vista categorial isto quer dizer que existe um isomorfismo concreto entre as categorias dos espaços uniformes de Weil e dos espaços uniformes de Tukey (que são concretas sobre a categoria dos conjuntos). Informalmente, significa que as descrições destes "conjuntos estruturados" apesar de diferentes são essencialmente a mesma e podemos substituir uma estrutura por outra sem problema nenhum. Portanto as coberturas também descrevem a uniformidade de um espaço uniforme e podemos assim definir um espaço uniforme como um par (X, μ) formado por um conjunto X e uma família μ de coberturas de X satisfazendo os axiomas (U1) e (U2) da Definição 1.3.

Nesta linguagem, a topologia uniforme induzida por $(X,\mathcal{U})$ é o conjunto de todos os subconjuntos A de X tais que, qualquer que seja $x \in A$, existe $\mathcal{U} \in \mu$ satisfazendo $st(x,\mathcal{U}) \subseteq A$. A Proposição 1.2 pode agora reescrever-se na seguinte forma:

Proposição 1.5. (Tukey [75]) *Seja* (X,μ) *um espaço uniforme definido em termos de coberturas e seja* $\mathcal{T}_\mu$ *a topologia uniforme a ele associada. Então, para qualquer* $A \in \mathcal{T}_\mu$, $A = \bigcup\{B \in \mathcal{T}_\mu \mid B \overset{\mu}{\triangleleft} A\}$, *onde por* $B \overset{\mu}{\triangleleft} A$ *queremos significar que existe* $\mathcal{U} \in \mu$ *tal que* $st(B,\mathcal{U}) \subseteq A$. ■

Uma aplicação $f : (X,\mu) \longrightarrow (X',\mu')$, sendo (X,μ) e (X',μ') espaços uniformes, é uniformemente contínua se e só se, qualquer que seja $\mathcal{U} \in \mu'$,

$$f^{-1}[\mathcal{U}] := \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

pertence a μ.

2. Reticulados locais uniformes

A abordagem de Tukey aos espaços uniformes por via das coberturas foi a primeira a ser estudada no contexto dos reticulados locais. Em [39] Isbell introduziu uma teoria de uniformidades para reticulados locais em termos de coberturas, posteriormente desenvolvida com grande detalhe por Pultr ([63], [64]). Subsequentemente Frith [29] estudou estruturas uniformes de um ponto de vista mais categorial, fazendo também uso de coberturas de reticulados locais.

De agora em diante, ao longo de todo o texto, L denotará sempre um reticulado local.

Um subconjunto $U \subseteq L$ diz-se uma *cobertura* de L caso $\bigvee_{x\in U} x = 1$. Dado $x \in L$, o elemento

$$st(x,U) = \bigvee\{y \in U \mid y \wedge x \neq 0\}$$

é chamado a *estrela de* x *em* U. O conjunto das coberturas de L pode ser pré-ordenado do seguinte modo: uma cobertura U é um *refinamento* de uma cobertura V, e escreve-se $U \leq V$, sempre que, para cada $x \in U$, existe $y \in V$ com $x \leq y$. Obtemos desta maneira um conjunto pré-ordenado com ínfimos e supremos: defina-se como $U \wedge V$ a cobertura $\{x \wedge y \mid x \in U, y \in V\}$ e como $U \vee V$ exactamente a união $U \cup V$.

Para cada família $\mathcal{U}$ de coberturas de L consideremos a relação de ordem em L definida por

$x \overset{\mathcal{U}}{\lhd} y$ (ler "*y está fortemente abaixo de x relativamente a $\mathcal{U}$*") se existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $st(x, U) \leq y$.

Notemos que estas relações de ordem são mais fortes do que $\leq$ pois $x \leq st(x, U)$ para toda a cobertura U.

A Definição 1.3 e a Proposição 1.5 motivam a noção de reticulado local uniforme:

Definições 2.1. (Isbell [39])

(a) Seja L um reticulado local. Uma família $\mathcal{U}$ de coberturas de L diz-se uma *base de uma uniformidade* em L caso satisfaça as seguintes propriedades:

(U1) $\mathcal{U}$ é uma base de um filtro do conjunto pré-ordenado $(Cov(L), \leq)$ das coberturas de L;

(U2) para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^* := \{st(x, V) \mid x \in V\} \leq U$;

(U3) para cada $x \in L$ vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x\}$.

Uma *uniformidade* em L é um filtro $\mathcal{U}$ de coberturas de L gerado por uma base de uma uniformidade. O par $(L,\mathcal{U})$ é então chamado *reticulado local uniforme*.

(b) Sejam $(L,\mathcal{U})$ e $(L',\mathcal{U}')$ dois reticulados locais uniformes. Um homomorfismo de reticulados locais $f : L \longrightarrow L'$ é um *homomorfismo uniforme* se, para qualquer $U \in \mathcal{U}$, $f(U) := \{f(x) \mid x \in U\} \in \mathcal{U}'$.

Denotaremos por UFrm a categoria dos reticulados locais uniformes e dos homomorfismos uniformes.

Esta categoria pode ser relacionada com a categoria Unif dos espaços uniformes e aplicações uniformemente contínuas através dos functores aberto e espectral [29]:

- O functor aberto $\Omega : \mathsf{Unif} \longrightarrow \mathsf{UFrm}$ aplica cada espaço uniforme (X, μ) no reticulado local uniforme $(\mathcal{T}_\mu, \mathcal{U}_{\mathcal{T}_\mu})$, sendo $\mathcal{T}_\mu$ a topologia induzida por μ e $\mathcal{U}_{\mathcal{T}_\mu}$ a família das coberturas $\mathcal{T}_\mu$-abertas de μ. Se $f : (X, \mu) \longrightarrow (X', \mu')$ é uniformemente contínua, então $\Omega(f) : \Omega(X', \mu') \longrightarrow \Omega(X, \mu)$ definida por $\Omega(f)(U) = f^{-1}(U)$ é um homomorfismo uniforme.

- O functor espectral $\Sigma : \mathsf{UFrm} \longrightarrow \mathsf{Unif}$ faz corresponder a cada reticulado local uniforme $(L,\mathcal{U})$ o espaço uniforme (ptL, μ_{ptL}), sendo μ_{ptL} o filtro de coberturas de ptL gerado por $\Big\{\{\Sigma_x : x \in U\} \mid U \in \mathcal{U}\Big\}$, onde $\Sigma_x = \{p \in ptL \mid p(x) = 1\}$ como definimos anteriormente. Para qualquer homomorfismo uniforme $f : (L,\mathcal{U}) \longrightarrow (L',\mathcal{U}')$, $\Sigma(f) : \Sigma(L',\mathcal{U}') \longrightarrow \Sigma(L,\mathcal{U})$ é definido por $\Sigma(f)(p) = p \cdot f$.

Teorema 2.2. (Frith [29]) *Os dois functores contravariantes Ω e Σ acima definidos estabelecem uma adjunção dual, com unidades de adjunção*

$$\eta_{(X,\mu)} : (X,\mu) \longrightarrow \Sigma\Omega(X,\mu) \quad e \quad \xi_{(L,\mathcal{U})} : (L,\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega\Sigma(L,\mathcal{U})$$

dadas por $\eta_{(X,\mu)}(x)(U) = 1$ se e só se $x \in U$ e $\xi_{(L,\mathcal{U})}(x) = \Sigma_x$. ■

3. Reticulados locais uniformes de Fletcher e Hunsaker

Em [39], além de definir reticulados locais uniformes via coberturas, Isbell também sugere a existência de uma teoria de uniformidades via vizinhanças da diagonal:

> "*Entourages ought to work, but not in the present state of knowledge of product locales*".

Fletcher e Hunsaker, num artigo recente [23], foram os primeiros a estudar uma tal hipótese e como resultado produziram uma nova teoria de uniformidades que provaram ser equivalente à de Isbell, e na qual o termo básico utilizado é o de "entourage" (que designa determinadas aplicações do reticulado local nele próprio).

Denotemos por $\mathcal{O}(L)$ a família das aplicações de L em L que preservam a ordem. O par $(\mathcal{O}(L), \leq)$, onde $\leq$ é definida por

$$e \leq f \equiv \forall\, x \in L\ e(x) \leq f(x)$$

é um reticulado local; as operações de supremo $\vee$ e de ínfimo $\wedge$ são dadas por

$$(e \vee f)(x) = e(x) \vee f(x) \text{ e } (e \wedge f)(x) = e(x) \wedge f(x) \quad \text{para todo o } x \in L.$$

Dados $e \in \mathcal{O}(L)$ e $x \in L$, x diz-se *e-pequeno* se $x \leq e(y)$ sempre que $x \wedge y \neq 0$. Uma aplicação e de $\mathcal{O}(L)$ é uma *vizinhança* de L se o conjunto de todos os elementos e-pequenos de L for uma cobertura de L. Notemos que, neste caso, $x \leq e(x)$ para todo o $x \in L$ (e, consequentemente, $e^n \leq e^{n+1}$, para todo o natural n) . De facto,

$$x = x \wedge \bigvee\{y \in L \mid y \text{ é } e\text{-pequeno}\} = \bigvee\{x \wedge y \mid y \text{ é } e\text{-pequeno e } x \wedge y \neq 0\} \leq e(x).$$

Dados um conjunto $\mathcal{M}$ de vizinhanças de L e $x, y \in L$, escreveremos $x \overset{\mathcal{M}}{\triangleleft} y$ para indicar que existe $e \in \mathcal{M}$ tal que $e(x) \leq y$. É óbvio que $x \overset{\mathcal{M}}{\triangleleft} y$ implica $x \leq y$.

Definições 3.1. (Fletcher e Hunsaker [23])

(a) Seja L um reticulado local. Uma família $\mathcal{M}$ de vizinhanças de L é chamada uma *base de uma uniformidade* em L no caso de se verificarem as seguintes quatro condições:

(UE1) quaisquer que sejam $e, f \in \mathcal{M}$ existe $g \in \mathcal{M}$ que preserva supremos arbitrários e tal que $g \leq e \wedge f$;

(UE2) para cada $e \in \mathcal{M}$ existe $f \in \mathcal{M}$ tal que $f \cdot f \leq e$;

(UE3) quaisquer que sejam $e \in \mathcal{M}$ e $x, y \in L$, $x \wedge e(y) = 0$ se e só se $e(x) \wedge y = 0$;

(UE4) qualquer que seja x em L vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{M}}{\triangleleft} x\}$.

Um subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}(L)$ diz-se uma *uniformidade de vizinhanças* de L se for gerado por uma base $\mathcal{M}'$ de uma uniformidade, isto é,

$$\mathcal{M} = \{e \in \mathcal{O}(L) \mid \text{ existe } f \in \mathcal{M}' \text{ tal que } f \leq e\}.$$

O par $(L, \mathcal{M})$ diz-se então um *reticulado local uniforme por vizinhanças.*

(b) Sejam $(L, \mathcal{M})$ e $(L', \mathcal{M}')$ reticulados locais uniformes por vizinhanças. Um *homomorfismo uniforme* $f : (L, \mathcal{M}) \longrightarrow (L', \mathcal{M}')$ é um homomorfismo de reticulados locais $f : L \longrightarrow L'$ tal que, para todo o $e \in \mathcal{M}$, existe $g \in \mathcal{M}'$ com $g \cdot f \leq f \cdot e$.

A categoria dos reticulados locais uniformes por vizinhanças e dos respectivos homomorfismos uniformes será designada por EUFrm.

4. Reticulados locais uniformes no sentido de Weil

Vamos agora, seguindo a sugestão de Isbell [39] acima referida, expôr uma via alternativa a estas uniformidades de Fletcher e Hunsaker, expressa em termos do coproduto $L \oplus L$, mostrando deste modo que vizinhanças da diagonal no estilo de Weil também funcionam no contexto dos reticulados locais.

Consideremos o produto cartesiano $L \times L$ munido da ordem usual. Dados dois conjuntos descendentes A, B de $L \times L$, escreveremos $A \cdot B$ para designar o conjunto

$$\{(x, y) \in L \times L \mid \text{ existe } z \in L \setminus \{0\} \text{ tal que } (x, z) \in A \text{ e } (z, y) \in B\}$$

e escreveremos $A \circ B$ para designar o C-ideal gerado por $A \cdot B$.

A operação $\circ$, que em geral não é comutativa, é no entanto associativa e, portanto, o uso de parênteses para composições sucessivas como

$$A^n = A \circ A \circ \cdots \circ A \qquad (n \text{ factores})$$

é desnecessário.

Dado $A \in \mathcal{D}(L \times L)$, $A^{-1} := \{(x, y) \in L \times L \mid (y, x) \in A\}$ e dizemos que A é *simétrico* se $A = A^{-1}$. O elemento

$$\bigvee\{y \in L \mid (y, y) \in A, y \wedge x \neq 0\}$$

será denotado por $st(x, A)$. A proposição seguinte lista algumas propriedades óbvias destes operadores.

Proposição 4.1. *Sejam $x, y \in L$ e $A, B \in \mathcal{D}(L \times L)$. Então:*

(a) $(x \oplus y)^{-1} = y \oplus x$;

(b) $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$;

(c) $A \circ \mathbb{O} = \mathbb{O} \circ A = \mathbb{O}$;

(d) $st(x, A) \oplus y \subseteq A \circ (x \oplus y)$ *e* $x \oplus st(y, A) \subseteq (x \oplus y) \circ A$. ∎

A aplicação

$$\begin{array}{rcccl} k_0 & : & \mathcal{D}(L\times L) & \longrightarrow & \mathcal{D}(L\times L) \\ & & A & \longmapsto & \Big\{(x,\bigvee S)\mid \{x\}\times S\subseteq A\Big\}\bigcup\Big\{(\bigvee S,y)\mid S\times\{y\}\subseteq A\Big\} \end{array}$$

é um pré-núcleo [4]. Consequentemente,

$$Fix(k_0) := \{A\in\mathcal{D}(L\times L)\mid k_0(A)=A\} = L\oplus L$$

é um sistema de fecho, e o operador de fecho a ele associado é então dado por

$$k(A)=\bigcap\{B\in L\oplus L\mid A\subseteq B\},$$

ou seja, $k(A)$ é o C-ideal gerado por A. O seguinte lema, de natureza técnica, desempenha um papel crucial na nossa abordagem.

Lema 4.2. *Sejam* $A,B\in\mathcal{D}(L\times L)$. *Então:*

(a) $k(A)\circ k(B)=A\circ B$.

(b) $k(A^{-1})=k(A)^{-1}$.

Demonstração.

(a) Basta provar que $k(A)\cdot k(B)\subseteq k(A\cdot B)$. Para isso, consideremos o seguinte conjunto não vazio

$$\mathbf{E}=\{E\in\mathcal{D}(L\times L)\mid A\subseteq E\subseteq k(A), E\cdot B\subseteq k(A\cdot B)\}$$

e verifiquemos que $k_0(E)\in\mathbf{E}$ quando $E\in\mathbf{E}$.

Sejam então $(x,y)\in k_0(E)\cdot B$ e $z\neq 0$ tais que $(x,z)\in k_0(E)$ e $(z,y)\in B$. Se $(x,z)=(x,\bigvee S)$ para algum S satisfazendo $\{x\}\times S\subseteq E$, existe $s\in S$ não nulo tal que $(x,s)\in E$ e $(s,y)\in B$ e, portanto, $(x,y)\in E\cdot B\subseteq k(A\cdot B)$. Por outro lado, caso $(x,z)=(\bigvee S,z)$ para algum S com $S\times\{z\}\subseteq E$, $(s,y)\in E\cdot B$ para cada $s\in S$ e, então, $(x,y)\in k_0(E\cdot B)\subseteq k(A\cdot B)$.

Além disso, qualquer que seja o subconjunto não vazio $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$, $\bigcup_{F\in\mathbf{F}}F\in\mathbf{E}$, pois $(\bigcup_{F\in\mathbf{F}}F)\cdot B\subseteq\bigcup_{F\in\mathbf{F}}(F\cdot B)$. Portanto $S=\bigcup_{E\in\mathbf{E}}E$ pertence a $\mathbf{E}$, isto é,

$\mathbf{E}$ possui um elemento maximal S. Mas $k_0(S) \in \mathbf{E}$ logo $S = k_0(S)$, ou seja, S é um C-ideal. Então $k(A) = S \in \mathbf{E}$ e, consequentemente, $k(A) \cdot B \subseteq k(A \cdot B)$. Por simetria, $A \cdot k(B) \subseteq k(A \cdot B)$.

Concluindo, temos $k(A) \cdot k(B) \subseteq k(A \cdot k(B)) \subseteq k^2(A \cdot B) = k(A \cdot B)$, como desejávamos.

(b) Consideremos $A \in \mathcal{D}(L \times L)$ e seja

$$\mathbf{E} = \{E \in \mathcal{D}(L \times L) \mid A^{-1} \subseteq E \subseteq k(A^{-1}), E \subseteq k(A)^{-1}\}.$$

O conjunto $\mathbf{E}$ é não vazio e $k_0(E) \in \mathbf{E}$ sempre que $E \in \mathbf{E}$. Além disso, qualquer que seja $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{E}$, $\bigcup_{F \in \mathbf{F}} F \in \mathbf{E}$. Consequentemente, $\mathbf{E}$ possui um elemento maximal S que é necessariamente $k(A^{-1})$ uma vez que $S = k_0(S)$ e $A^{-1} \subseteq S \subseteq k(A^{-1})$. Portanto $k(A^{-1}) \subseteq k(A)^{-1}$. Como A é arbitrário, $k(A)^{-1} \subseteq k(A^{-1})$, isto é, $k(A^{-1}) = k(A)^{-1}$. ■

O operador k também pode ser obtido de k_0 por indução transfinita sobre a classe Ord dos ordinais:

Se definirmos, para cada $A \in \mathcal{D}(L \times L)$ e para cada ordinal β,

- $k_0^0(A) = A$,
- $k_0^\beta(A) = k_0(k_0^\alpha(A))$ se $\beta = \alpha + 1$

e

- $k_0^\beta(A) = \bigvee\{k_0^\alpha(A) \mid \alpha < \beta\}$ se β é um ordinal limite,

então $k = \bigvee_{\beta \in Ord} k_0^\beta$. Assim, o lema precedente pode ser provado por indução transfinita. O caminho que seguimos (motivados por [4] e [5]) evita o uso de ordinais.

Definição 4.3. Definimos uma *vizinhança da diagonal de Weil* (ou, abreviadamente, *vizinhança da diagonal*) em L como um elemento E de $L \oplus L$ para o qual existe uma cobertura U de L satisfazendo

$$\bigvee_{x \in U} (x \oplus x) \subseteq E.$$

Dizer que E é uma vizinhança da diagonal de Weil é equivalente a dizer que

$$\{x \in L \mid (x,x) \in E\}$$

é uma cobertura de L.

A família $WEnt(L)$ das vizinhanças da diagonal de Weil em L pode ser ordenada por inclusão. Trata-se de um reticulado completo.

Proposição 4.4. *Seja E uma vizinhança da diagonal de Weil. Então:*

(a) *para qualquer $x \in L$, $x \leq st(x,E)$;*

(b) *$E^n \subseteq E^{n+1}$, para todo o natural n;*

(c) *qualquer que seja $A \in \mathcal{D}(L \times L)$, $A \subseteq (E \circ A) \cap (A \circ E)$.*

Demonstração.

(a) Consideremos $x \in L$. Temos

$$x = x \wedge \bigvee\{y \in L \mid (y,y) \in E\} = \bigvee\{x \wedge y \mid (y,y) \in E, x \wedge y \neq 0\} \leq st(x,E).$$

(b) Basta provar que $E \subseteq E^2$.

Consideremos $(x,y) \in E$. Pela alínea (a), $y \leq st(y,E)$. Mas, atendendo à Proposição 4.1 (d), $x \oplus st(y,E) \subseteq (x \oplus y) \circ E \subseteq E^2$. Consequentemente $(x,y) \in E^2$.

(c) Seja $(x,y) \in A$. Os casos $x = 0$ ou $y = 0$ são triviais. Se $x, y \neq 0$, como $x = \bigvee\{x \wedge z \mid (z,z) \in E, x \wedge z \neq 0\}$ e, para qualquer $(z,z) \in E$ satisfazendo $x \wedge z \neq 0$, $(z,y) \in E \circ A$, concluímos, por definição de C-ideal, que $(x,y) \in E \circ A$.

Analogamente, $A \subseteq A \circ E$. ■

Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de vizinhanças da diagonal de Weil. Por definição, escrevemos $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ para significar que $E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$ para algum $E \in \mathcal{E}$.

A Definição 1.1 e a Proposição 1.2 sugerem-nos a introdução da seguinte definição:

Definições 4.5.

(a) Seja L um reticulado local e seja $\mathcal{E} \subseteq WEnt(L)$. Dizemos que o par $(L, \mathcal{E})$ é um *reticulado local uniforme de Weil* se:

(UW1) $\mathcal{E}$ é um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$;

(UW2) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \circ F \subseteq E$;

(UW3) qualquer que seja $E \in \mathcal{E}$, E^{-1} também pertence a $\mathcal{E}$;

(UW4) para todo o $x \in L$, $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x\}$.

Dizemos nestas circunstâncias que $\mathcal{E}$ é uma *uniformidade de Weil* em L. Uma família $\mathcal{E}$ de vizinhanças da diagonal de L diz-se simplesmente uma *base de uma uniformidade de Weil* se $\uparrow\mathcal{E}$ for uma uniformidade de Weil.

(b) Sejam $(L, \mathcal{E})$ e $(L', \mathcal{E}')$ dois reticulados locais uniformes de Weil. Um *homomorfismo uniforme de Weil* $f : (L, \mathcal{E}) \longrightarrow (L', \mathcal{E}')$ é um homomorfismo de reticulados locais $f : L \longrightarrow L'$ tal que $(f \oplus f)(E) \in \mathcal{E}'$ sempre que $E \in \mathcal{E}$.

Estes são os objectos e os morfismos da categoria WUFrm.

É importante referir que as vizinhanças da diagonal de $\mathcal{E}$ simétricas formam uma base de $\mathcal{E}$. De facto, se $E \in \mathcal{E}$ então $E^{-1} \in \mathcal{E}$ logo $E \cap E^{-1}$ é uma vizinhança da diagonal de $\mathcal{E}$ simétrica contida em E.

No caso de $\mathcal{E}$ ser uma uniformidade de Weil, a relação de ordem $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ pode ser expressa de várias maneiras distintas:

Proposição 4.6. *Seja $\mathcal{E}$ uma uniformidade de Weil em L e sejam $x, y \in L$. As seguintes asserções são equivalentes:*

(i) $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$;

(ii) $(x \oplus x) \circ E \subseteq y \oplus y$ *para algum* $E \in \mathcal{E}$;

(iii) $E \circ (x \oplus 1) \subseteq y \oplus 1$ *para algum* $E \in \mathcal{E}$;

(iv) $(1 \oplus x) \circ E \subseteq 1 \oplus y$ *para algum* $E \in \mathcal{E}$;

(v) *$st(x,E) \leq y$ para algum $E \in \mathcal{E}$.*

Demonstração. Limitamo-nos a provar que (i) e (v) são equivalentes, dado que as demonstrações de que (ii), (iii) e (iv) são equivalentes a (v) são análogas.

$\underline{\text{(i)} \Rightarrow \text{(v)}}$: Para qualquer z com $(z,z) \in E$ e $z \wedge x \neq 0$, o par (z,x) pertence a $E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$. Por esse motivo $z \leq y$.

$\underline{\text{(v)} \Rightarrow \text{(i)}}$: Para provar que $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ basta assegurar que $F \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$ para uma vizinhança da diagonal simétrica $F \in \mathcal{E}$ tal que $F^2 \subseteq E$. Consideremos então $a, b, c \in L$ tais que $(a,b) \in F$, $(b,c) \leq (x,x)$ e $a, b, c \neq 0$. Como $(a,b) \in F^2$ e, pela simetria de F, $(b,a) \in F^2$, temos $(a \vee b, a \vee b) \in F^2 \subseteq E$, pois (a,a) e (b,b) também pertencem a F^2. Logo $(a \vee b, a \vee b) \in E$ e, portanto, $a \leq st(x,E)$, uma vez que $(a \vee b) \wedge x \geq b \neq 0$. Então $a \leq y$ e $c \leq x \leq st(x,E) \leq y$ o que implica $(a,c) \in y \oplus y$. ■

Em particular, segue desta proposição que $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ é mais forte que $\leq$. Quando $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ dizemos que x *está fortemente abaixo de* y *relativamente a* $\mathcal{E}$.

Observação 4.7. Obviamente $y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x$ também implica que $E \circ (1 \oplus y) \subseteq 1 \oplus x$ para algum $E \in \mathcal{E}$ (note-se que a implicação contrária não é, todavia, verdadeira). Então podemos formular a condição (UW4) da Definição 4.5 do seguinte modo:

> Para cada $J \in L \oplus L$, $J = \bigvee\{I \in L \oplus L \mid I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq} J\}$, onde $I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq} J$ significa que $E \circ I \subseteq J$ para algum $E \in \mathcal{E}$.

De facto, para qualquer $J = \bigvee_{\gamma \in \Gamma}(a_\gamma \oplus b_\gamma) \in L \oplus L$, podemos escrever

$$a_\gamma \oplus b_\gamma = \Big(\bigvee\{x \in L \mid x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} a_\gamma\}\Big) \oplus \Big(\bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} b_\gamma\}\Big) = \bigvee\{x \oplus y \mid x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} a_\gamma, y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} b_\gamma\},$$

pois, qualquer que seja $\gamma \in \Gamma$, $a_\gamma = \bigvee\{x \in L \mid x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} a_\gamma\}$ e $b_\gamma = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} b_\gamma\}$. Mas $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} a_\gamma$ e $y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} b_\gamma$ significam, respectivamente, que existem $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ tais que $E_1 \circ (x \oplus 1) \subseteq a_\gamma \oplus 1$ e $E_2 \circ (1 \oplus y) \subseteq 1 \oplus b_\gamma$; logo

$$E \circ (x \oplus y) \subseteq \Big(E \circ (x \oplus 1)\Big) \cap \Big(E \circ (1 \oplus y)\Big) \subseteq (a_\gamma \oplus b_\gamma),$$

para $E = E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$. Consequentemente,

$$\bigvee\{x \oplus y \mid x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} a_\gamma, y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} b_\gamma\} \subseteq \bigvee\{I \in L \oplus L \mid I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq} (a_\gamma \oplus b_\gamma)\}.$$

Reciprocamente, para todo o $x \in L$,

$$x \oplus 1 = \{I \in L \oplus L \mid I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq} (x \oplus 1)\} \leq \Big(\bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x\}\Big) \oplus 1,$$

porque $I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq} (x \oplus 1)$ implica, para qualquer $(a, b) \in I$, $a \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x$, i.e., $I \subseteq (\bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x\}) \oplus 1$. Então $x \leq \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x\}$.

A relação de ordem $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ possui as mesmas propriedades que a correspondente ordem $\overset{\mathcal{U}}{\lhd}$ para uniformidades por coberturas:

Proposição 4.8. *Suponhamos que $\mathcal{E}$ é uma base de um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$. Então a relação $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ é um sub-reticulado de $L \times L$ com as seguintes propriedades:*

(a) *para quaisquer x, y, z, w em L, $x \leq y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} z \leq w$ implica $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} w$;*

(b) *$x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ implica $x \prec y$.*

Além disso, no caso de $\mathcal{E}$ ser uma base de uma uniformidade de Weil, tem-se:

(c) *$\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ é interpoladora, isto é, se $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ então existe $z \in L$ tal que $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} z \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$;*

(d) *se $f : (L, \mathcal{E}) \longrightarrow (L', \mathcal{E}')$ é um homomorfismo uniforme de Weil e $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ então $f(x) \overset{\mathcal{E}'}{\lhd} f(y)$.*

Demonstração. Se $E_1 \circ (x_1 \oplus x_1) \subseteq y_1 \oplus y_1$ e $E_2 \circ (x_2 \oplus x_2) \subseteq y_2 \oplus y_2$ com $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ então, imediatamente,

$$\begin{aligned}(E_1 \cap E_2) \circ (x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_2) &\subseteq \Big(E_1 \circ (x_1 \oplus x_1)\Big) \cap \Big(E_2 \circ (x_2 \oplus x_2)\Big) \\ &\subseteq (y_1 \oplus y_1) \cap (y_2 \oplus y_2) \\ &\subseteq y_1 \wedge y_2 \oplus y_1 \wedge y_2.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{E}$ é uma base de filtro, existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \subseteq E_1 \cap E_2$, e então $x_1 \wedge x_2 \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y_1 \wedge y_2$ quando $x_1 \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y_1$ e $x_2 \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y_2$. Por outro lado, se $st(x_1, E_1) \leq y_1$ e $st(x_2, E_2) \leq y_2$ para $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ então $st(x_1 \vee x_2, E_1 \cap E_2) \leq y_1 \vee y_2$ porque

$$st(x_1 \vee x_2, E_1 \cap E_2) \leq st(x_1, E_1) \vee st(x_2, E_2).$$

Logo, $x_1 \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y_1$ e $x_2 \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y_2$ implicam $(x_1 \vee x_2) \overset{\mathcal{E}}{\lhd} (y_1 \vee y_2)$ e a relação $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ é um sub-reticulado de $L \times L$. É claro que $0 \overset{\mathcal{E}}{\lhd} 0$ e $1 \overset{\mathcal{E}}{\lhd} 1$ pelo que este sub-reticulado é limitado.

(a) É óbvio.

(b) Seja $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$. Então $st(x, E) \leq y$. Além disso

$$1 = \bigvee\{w \in L \mid (w, w) \in E\} = st(x, E) \vee \bigvee\{w \in L \mid (w, w) \in E, w \wedge x = 0\}.$$

Denotemos $\bigvee\{w \in L \mid (w, w) \in E, w \wedge x = 0\}$ por z. Como $z \wedge x = 0$ e $z \vee y \geq z \vee st(x, E) = 1$, z separa x e y.

(c) Suponhamos que $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ e seja $E \in \mathcal{E}$ tal que $st(x, E) \leq y$. Consideremos ainda $F \in \mathcal{E}$ tal que $F^2 \subseteq E$. É claro que $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} st(x, F)$. Provemos que $st(x, F) \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$. Como $st(x, F^2) \leq st(x, E) \leq y$, basta mostrar que $st(st(x, F), F) \leq st(x, F^2)$, o que é verdade para qualquer C-ideal F:

De facto, como $st(st(x, F), F) = \bigvee\{y \in L \mid (y, y) \in F, y \wedge st(x, F) \neq 0\}$, consideremos $y \in L$ tal que $(y, y) \in F$ e $y \wedge st(x, F) \neq 0$. Então existe $z \in L$ tal que $(z, z) \in F$, $z \wedge x \neq 0$ e $z \wedge y \neq 0$. Mas $(y, y \wedge z) \in F$ e $(y \wedge z, z) \in F$ pelo que $(y, z) \in F^2$. Analogamente, $(z, y) \in F^2$. Como os elementos (y, y) e (z, z) também pertencem a F^2, $(y \vee z, y \vee z) \in F^2$. Em conclusão, $(y \vee z, y \vee z) \in F^2$ e $(y \vee z) \wedge x \geq z \wedge x \neq 0$, logo $y \leq st(x, F^2)$ e $st(st(x, F), F) \leq st(x, F^2)$ como pretendíamos.

(d) Suponhamos que $E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$ para algum $E \in \mathcal{E}$. Aplicando o Lema 4.2 (a) obtemos

$$(f \oplus f)(E) \circ (f(x) \oplus f(x)) = \left(\bigcup_{(a,b) \in E} (f(a) \oplus f(b))\right) \circ (f(x) \oplus f(x)).$$

Se $(x', y') \leq (f(a), f(b))$ para algum $(a, b) \in E$, $(y', z') \leq (f(x), f(x))$ e $x', y', z' \neq 0$, então $f(b \wedge x) \neq 0$. Daqui segue-se que $b \wedge x \neq 0$ e $(a, x) \in E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$, i.e., $a, x \leq y$. Portanto, $(f \oplus f)(E) \circ (f(x) \oplus f(x)) \subseteq f(y) \oplus f(y)$. Como $(f \oplus f)(E) \in \mathcal{F}$ concluímos que $f(x) \overset{\mathcal{F}}{\lhd} f(y)$. ■

Em particular, (b) implica que L é necessariamente um reticulado local regular. De (c) decorre que, assumindo o Axioma da Escolha para Conjuntos Numeráveis, L é completamente regular.

É altura de apresentarmos alguns exemplos de reticulados locais uniformes.

Exemplos 4.9.

(a) Seja (L, d) um reticulado local métrico (consulte a Secção II.2 desta dissertação ou, para mais informação, [64]). Para qualquer número real $\epsilon > 0$ seja $E_\epsilon = \bigvee\{x \oplus x \mid d(x) < \epsilon\}$. A família $(E_\epsilon)_{\epsilon>0}$ é uma base para uma uniformidade de Weil em L.

(b) Para qualquer espaço uniforme (de Weil) $(X, \mathcal{E})$, seja $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ a topologia induzida por $\mathcal{E}$ em X e consideremos a família de todas as vizinhanças da diagonal da forma $\bigvee_{x\in X}(E[x] \oplus E[x])$, com $E \in \mathcal{E}$. Imediatamente, para quaisquer $E, F \in \mathcal{E}$,

$$\bigvee_{x\in X}\Big((E\cap F)[x] \oplus (E\cap F)[x]\Big) \subseteq \Big(\bigvee_{x\in X}(E[x] \oplus E[x])\Big) \cap \Big(\bigvee_{x\in X}(F[x] \oplus F[x])\Big).$$

Além disso, para quaisquer $E, F \in \mathcal{E}$ com F simétrica e tal que $F^2 \subseteq E$,

$$\Big(\bigvee_{x\in X}(F[x] \oplus F[x])\Big) \circ \Big(\bigvee_{x\in X}(F[x] \oplus F[x])\Big) \subseteq \bigvee_{x\in X}(E[x] \oplus E[x]),$$

e

$$\Big(\bigvee_{x\in X}(F[x] \oplus F[x])\Big) \circ (V \oplus V) \subseteq U \oplus U$$

sempre que $U, V \subseteq X$ e $E\circ(V\times V) \subseteq U\times U$. Portanto esta família de vizinhanças da diagonal de Weil é uma base para uma uniformidade de Weil $\mathcal{E}_{\mathcal{T}_\mathcal{E}}$ em $\mathcal{T}_\mathcal{E}$.

(c) Consideremos agora uma álgebra de Boole completa B. Para cada $b \in B$, o C-ideal

$$E_b = (b \oplus b) \vee (b^* \oplus b^*)$$

é uma vizinhança da diagonal de B. Pelo Lema 4.2 (a),

$$E_b \circ E_b = ((b \oplus b) \cup (b^* \oplus b^*)) \circ ((b \oplus b) \cup (b^* \oplus b^*)).$$

Então, obviamente, $E_b \circ E_b = E_b$. Analogamente, $E_b \circ (b \oplus b) = b \oplus b$, isto é, b está fortemente abaixo de b relativamente a $\{E_b\}$. Portanto, temos uma sub-base para uma uniformidade de Weil em B, ou seja, tomando todas as intersecções finitas de vizinhanças da diagonal de Weil deste tipo, formamos uma base para uma uniformidade de Weil.

(d) Do mesmo modo que a noção categorial de grupo [52] produz na categoria dos espaços topológicos os grupos topológicos, na categoria dos *locales* define os chamados "*grupos locálicos*" [40]. Portanto, um *grupo locálico* é um cogrupo na categoria dos reticulados locais, isto é, um reticulado local L equipado com uma multiplicação $\mu : L \longrightarrow L \oplus L$, um inverso $\imath : L \longrightarrow L$ e um elemento neutro $\varepsilon : L \longrightarrow \mathbf{2}$ satisfazendo as identidades

$$(\mu \oplus 1_L) \cdot \mu = (1_L \oplus \mu) \cdot \mu,$$

$$(\varepsilon \oplus 1_L) \cdot \mu = 1_L = (1_L \oplus \varepsilon) \cdot \mu$$

e

$$\nabla \cdot (\imath \oplus 1_L) \cdot \mu = \nabla \cdot (1_L \oplus \imath) \cdot \mu = \sigma \cdot \varepsilon,$$

sendo $\nabla : L \oplus L \longrightarrow L$ a codiagonal e σ o morfismo $\mathbf{2} \longrightarrow L$. Note-se que as propriedades usuais de grupos

$$\varepsilon \cdot \imath = \varepsilon,$$

$$\imath \cdot \imath = \imath$$

e

$$\mu \cdot \imath = \tau \cdot (\imath \oplus \imath) \cdot \mu,$$

onde τ designa o único morfismo de $L \oplus L$ em $L \oplus L$ satisfazendo $\tau \cdot u_L = u'_L$ e $\tau \cdot u'_L = u_L$ (u_L e u'_L são as imersões do coproduto), são também válidas para grupos *locálicos*. É possível munir estes grupos com estruturas de uniformidade de Weil, de um modo análogo ao caso espacial dos grupos topológicos. Para cada $x \in L$ tal que $\varepsilon(x) = 1$ definamos

$$E^l_x = (1_L \oplus \imath)(\mu(x)) \qquad \text{e} \qquad E^r_x = (\imath \oplus 1_L)(\mu(x)).$$

Proposição 4.10. *$\mathcal{E}^l = \{E^l_x \mid x \in L, \varepsilon(x) = 1\}$ e $\mathcal{E}^r = \{E^r_x \mid x \in L, \varepsilon(x) = 1\}$ são bases de uniformidades de Weil.*

Demonstração. Provaremos unicamente que $\mathcal{E}^r$ é uma base de uma uniformidade de Weil. A prova para $\mathcal{E}^l$ é similar.

Cada E^r_x é uma vizinhança da diagonal de Weil porque $\nabla \cdot (\imath \oplus 1_L) \cdot \mu(x) = 1$. Com efeito, qualquer C-ideal A satisfazendo $\nabla(A) = 1$ é uma vizinhança da diagonal de Weil: se $A = \bigvee_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma \oplus b_\gamma)$ e $\nabla(A) = \bigvee_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma \wedge b_\gamma) = 1$ então $\{a_\gamma \wedge b_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ é uma cobertura de L e $\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma \wedge b_\gamma \oplus a_\gamma \wedge b_\gamma) \subseteq A$.

Obviamente, $E^r_x \cap E^r_y = E^r_{x\wedge y}$. Como $\varepsilon(x \wedge y) = 1$ sempre que $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 1$, $\mathcal{E}^r$ é uma base de um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$.

A simetria é uma consequência do facto de que, para todo o x, $(E^r_x)^{-1} = E^r_{\imath(x)}$ que provaremos de seguida. Comecemos por escrever $\mu(x) = \bigvee_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma \oplus y_\gamma)$. Então $E^r_x = \bigvee_{\gamma\in\Gamma}(\imath(x_\gamma) \oplus y_\gamma)$. Por outro lado, como $\mu \cdot \imath = \tau \cdot (\imath \oplus \imath) \cdot \mu$, temos $\mu(\imath(x)) = \bigvee_{\gamma\in\Gamma}(\imath(y_\gamma) \oplus \imath(x_\gamma))$ e, consequentemente, $E^r_{\imath(x)} = \bigvee_{\gamma\in\Gamma}(y_\gamma \oplus \imath(x_\gamma))$.

Agora, consideremos $E^r_x \in \mathcal{E}^r$. Temos

$$\varepsilon = 1_{\mathbf{2}} \oplus \varepsilon = (1_{\mathbf{2}} \oplus \varepsilon) \cdot (\varepsilon \oplus 1_L) \cdot \mu = (\varepsilon \oplus \varepsilon) \cdot \mu.$$

Deste modo $(\varepsilon \oplus \varepsilon) \cdot \mu(x) = 1$, isto é, $\bigvee\{\varepsilon(a) \oplus \varepsilon(b) \mid (a, b) \in \mu(x)\} = 1$. Por esse motivo, existe $(a, b) \in \mu(x)$ tal que $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 1$. É claro que $(a\wedge b, a\wedge b) \in \mu(x)$ e $\varepsilon(a \wedge b) = 1$. Denotemos $a \wedge b$ por y e provemos que $E^r_y \circ E^r_y \subseteq E^r_x$. Como $E^r_y \circ E^r_y$ é a vizinhança da diagonal de Weil

$$\Big(\bigvee_{(a,b)\in\mu(y)} (\imath(a) \oplus b)\Big) \circ \Big(\bigvee_{(a,b)\in\mu(y)} (\imath(a) \oplus b)\Big) = \Big(\bigcup_{(a,b)\in\mu(y)} (\imath(a) \oplus b)\Big) \circ \Big(\bigcup_{(a,b)\in\mu(y)} (\imath(a) \oplus b)\Big),$$

tomando $(\imath(a), b)$ com $(a, b) \in \mu(y)$ e $(\imath(c), d)$ com $(c, d) \in \mu(y)$ tais que $b \wedge \imath(c) \neq 0$, da inclusão $y \oplus y \subseteq \mu(x)$ segue que

$$\mu(y) \oplus \mu(y) \subseteq (\mu \oplus \mu)(\mu(x)) = (1_L \oplus \mu \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L) \cdot (\mu(x)).$$

Então

$$a \oplus b \oplus c \oplus d \subseteq (1_L \oplus \mu \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L) \cdot (\mu(x)).$$

Aplicando $1_L \oplus \nabla \cdot (1_L \oplus \imath) \oplus 1_L$ a ambos os membros desta inclusão obtemos

$$a \oplus (b \wedge \imath(c)) \oplus d \subseteq (1_L \oplus \sigma \oplus 1_L) \cdot (\mu(x)) = \bigvee_{(a,b)\in\mu(x)} (a \oplus 1_L \oplus b).$$

Como $b \wedge \imath(c) \neq 0$, então $(a, d) \in \mu(x)$ e $(\imath(a), d) \in E^r_x$. Logo $E^r_y \circ E^r_y \subseteq E^r_x$.

Por fim, verifiquemos a condição de admissibilidade (UW4). Da identidade $(1_L \oplus \varepsilon) \cdot \mu = 1_L$ decorre que, para todo o $x \in L$,

$$x = \bigvee\{a \oplus \varepsilon(b) \mid a \oplus b \subseteq \mu(x)\} = \bigvee\{a \in L \mid \exists b \in L : \varepsilon(b) = 1 \text{ e } a \oplus b \subseteq \mu(x)\},$$

pelo que nos resta provar que a está fortemente abaixo de x relativamente a $\mathcal{E}^r$ sempre que existe $b \in L$ satisfazendo $\varepsilon(b) = 1$ e $a \oplus b \subseteq \mu(x)$. Pela Proposição 4.6 basta mostrar que $st(a, E_b^r) \leq x$. Então, seja $(c, c) \in E_b^r$ e $c \wedge a \neq 0$. Imediatamente $\imath(c) \oplus c \subseteq \mu(b)$. Por outro lado, $a \oplus b \subseteq \mu(x)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} a \oplus b \oplus a &\subseteq (\mu \oplus 1_L)(x \oplus a) \\ \Rightarrow a \oplus \mu(b) \oplus a &\subseteq (1_L \oplus \mu \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L)(x \oplus a) \\ \Rightarrow a \oplus \imath(c) \oplus a &\subseteq (1_L \oplus \mu \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L)(x \oplus a). \end{aligned}$$

Pela associatividade de μ,

$$(1_L \oplus \mu \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L) = ((1_L \oplus \mu) \cdot \mu) \oplus 1_L = ((\mu \oplus 1_L) \cdot \mu) \oplus 1_L = (\mu \oplus 1_L \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L).$$

Segue-se

$$a \oplus \imath(c) \oplus c \oplus a \subseteq (\mu \oplus 1_L \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L)(x \oplus a).$$

Aplicando $(\nabla \cdot (1_L \oplus \imath)) \oplus 1_L \oplus 1_L$ a ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned} a \wedge c \oplus c \oplus a &\subseteq (\sigma \cdot \varepsilon \oplus 1_L \oplus 1_L) \cdot (\mu \oplus 1_L)(x \oplus a) \\ &= ((\sigma \cdot \varepsilon \oplus 1_L) \cdot \mu \oplus 1_L)(x \oplus a) \\ &= (((\sigma \oplus 1_L) \cdot (\varepsilon \oplus 1_L) \cdot \mu) \oplus 1_L)(x \oplus a) \\ &= (\sigma \oplus 1_L \oplus 1_L)(x \oplus a). \end{aligned}$$

Mas $\sigma \oplus 1_L(x) = 1 \oplus x$, donde $(a \wedge c) \oplus c \oplus a \subseteq 1 \oplus x \oplus a$. Como $a \wedge c \neq 0$, obtemos por fim $c \oplus a \subseteq x \oplus a$. Em conclusão, qualquer que seja $(c, c) \in E_b^r$ com $c \wedge a \neq 0$, $c \oplus a \subseteq x \oplus a$. Logo $st(a, E_b^r) \oplus a \subseteq x \oplus a$ e $st(a, E_b^r) \leq x$. ■

Fazemos notar que, tal como para grupos topológicos, a aplicação $\imath$ é um isomorfismo entre as duas estruturas: $\imath$ é um isomorfismo de reticulados locais, e, para todo o $x \in L$,

$$(\imath \oplus \imath)(E_x^r) = (\imath \oplus \imath)(\imath \oplus 1_L)(\mu(x)) = (1_L \oplus \imath)(\mu(x)) = E_x^l.$$

Os functores aberto e espectral podem ser adaptados a este contexto. Basta para isso definir o functor aberto $\Omega : \mathsf{Unif} \longrightarrow \mathsf{WUFrm}$ do seguinte modo: a cada espaço uniforme $(X, \mathcal{E})$ fazemos corresponder o reticulado local uniforme de Weil $\Omega(X, \mathcal{E}) = (\mathcal{T}_{\mathcal{E}}, \mathcal{E}_{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}})$ do Exemplo 4.9 (b), e a cada aplicação uniformemente contínua $f : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (X', \mathcal{E}')$ o homomorfismo de Weil $\Omega(f) : \Omega(X', \mathcal{E}') \longrightarrow \Omega(X, \mathcal{E})$ definido por $\Omega(f)(U) = f^{-1}(U)$. Obtemos deste modo um functor contravariante de Unif em WUFrm.

Em sentido inverso, sendo $(L, \mathcal{E})$ um reticulado local uniforme de Weil, definamos, para cada $E \in \mathcal{E}$,

$$\Sigma_E = \bigcup_{(x,y) \in E} (\Sigma_x \times \Sigma_y).$$

Denotemos ainda por $\mathcal{E}_{ptL}$ a família de todas as vizinhanças da diagonal de ptL que contenham algum membro de $\{\Sigma_E : E \in \mathcal{E}\}$.

Proposição 4.11. *Para $(L, \mathcal{E}) \in \mathsf{WUFrm}$, $\Sigma(L, \mathcal{E}) = (ptL, \mathcal{E}_{ptL})$ é um espaço uniforme.*

Demonstração. Cada Σ_E é de facto uma vizinhança da diagonal pois $\bigvee\{x \in L \mid (x, x) \in E\} = 1$ implica que, qualquer que seja $p \in ptL$, $\bigvee\{p(x) \mid (x, x) \in E\} = 1$, i.e., a existência de algum par $(x, x) \in E$ tal que $p(x) = 1$.

A simetria de $\mathcal{E}_{ptL}$ é uma consequência da igualdade $(\Sigma_E)^{-1} = \Sigma_{E^{-1}}$.

Sejam $E, F \in \mathcal{E}$; trivialmente, $\Sigma_E \cap \Sigma_F = \Sigma_{E \cap F}$ e $E \subseteq F$ implicam $\Sigma_E \subseteq \Sigma_F$. Então $\{\Sigma_E : E \in \mathcal{E}\}$ é uma base de um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$.

Finalmente, assumindo que $E, F \in \mathcal{E}$ com $F^2 \subseteq E$, deduzimos que $\Sigma_F \circ \Sigma_F \subseteq \Sigma_E$. Para concluir isto, suponhamos que $(p, q), (q, r) \in \Sigma_F$ e que $(x, y), (x', y') \in F$ com $p(x) = 1, r(y') = 1$ e $q(y) = q(x') = 1$. Então $x' \wedge y \neq 0$, logo $(x, y') \in F^2 \subseteq E$ e $(p, r) \in \Sigma_E$. ■

Lema 4.12. *Suponhamos que $f : L \longrightarrow L'$ é um homomorfismo de reticulados locais e seja $E \in L \oplus L$. Então*

$$\bigcup_{(x,y) \in (f \oplus f)(E)} (\Sigma_x \times \Sigma_y) \subseteq \bigcup_{(x,y) \in E} (\Sigma_{f(x)} \times \Sigma_{f(y)}).$$

Demonstração. Este lema pode ser provado de um modo perfeitamente análogo ao do Lema 4.2; basta para isso considerar o conjunto

$$\mathbf{E}=\left\{V\in\mathcal{D}(L'\times L')\mid U\subseteq V\subseteq k(U),\ \bigcup_{(x,y)\in V}(\Sigma_x\times\Sigma_y)\subseteq\bigcup_{(x,y)\in E}(\Sigma_{f(x)}\times\Sigma_{f(y)})\right\},$$

onde

$$U=\bigcup_{(x,y)\in E}(f(x)\oplus f(y))\in\mathcal{D}(L'\times L'),$$

e verificar que $U\in\mathbf{E}$, que $k_0(V)\in\mathbf{E}$ quando $V\in\mathbf{E}$ e que $\bigcup_{i\in I}V_i\in\mathbf{E}$ sempre que todos os V_i pertencem a $\mathbf{E}$, o que é evidente depois de observado o facto essencial de que $p\in\Sigma_{x_i}$, para algum $i\in I$, caso $p\in\Sigma_x$ e $x=\bigvee_{i\in I}x_i$. ■

Dado um homomorfismo uniforme de Weil $f:(L,\mathcal{E})\longrightarrow(L',\mathcal{E}')$ definamos $\Sigma(f):\Sigma(L',\mathcal{E}')\longrightarrow\Sigma(L,\mathcal{E})$ por $\Sigma(f)(p)=p\cdot f$.

Proposição 4.13. *$\Sigma(f)$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $E\in\mathcal{E}$. Então

$$\begin{aligned}(\Sigma(f)\times\Sigma(f))^{-1}(\Sigma_E) &= \{(p,q)\in ptL\times ptL\mid(p\cdot f,q\cdot f)\in\Sigma_E\}\\ &= \{(p,q)\in ptL\times ptL\mid\exists(x,y)\in E:p\in\Sigma_{f(x)}\text{ e }q\in\Sigma_{f(y)}\}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.12 obtemos

$$\Big(\Sigma(f)\times\Sigma(f)\Big)^{-1}(\Sigma_E)\supseteq\Sigma_{(f\oplus f)(E)}\in\mathcal{E}_{ptL'}.$$

Então $\Big(\Sigma(f)\times\Sigma(f)\Big)^{-1}(\Sigma_E)\in\mathcal{E}_{ptL'}$. ■

Em conclusão, Σ é um functor contravariante de WUFrm em Unif.

Teorema 4.14. *Os functores contravariantes Ω e Σ acima construídos definem uma adjunção dual entre as categorias* Unif *e* WUFrm*.*

Demonstração. Para qualquer espaço uniforme $(X,\mathcal{E})$ seja $\eta_{(X,\mathcal{E})}:(X,\mathcal{E})\longrightarrow\Sigma\Omega(X,\mathcal{E})$ dado por $\eta_{(X,\mathcal{E})}(x)(U)=1$ se e só se $x\in U$. Verifiquemos que $\eta_{(X,\mathcal{E})}$ é uma aplicação uniformemente contínua. Para isso, consideremos $E\in\mathcal{E}$ e denotemos por $\overline{E}$ a vizinhança da diagonal $\bigvee_{x\in X}(E[x]\oplus E[x])$ de $pt\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$. Necessitamos de verificar que $(\eta_{(X,\mathcal{E})}\times\eta_{(X,\mathcal{E})})^{-1}(\Sigma_{\overline{E}})\in\mathcal{E}$. Um simples cálculo revela-se suficiente:

$$\begin{aligned}
(\eta_{(X,\mathcal{E})}\times\eta_{(X,\mathcal{E})})^{-1}(\Sigma_{\overline{E}}) &= \Big\{(x,y)\mid \Big(\eta_{(X,\mathcal{E})}(x),\eta_{(X,\mathcal{E})}(y)\Big)\in\bigcup_{(U,V)\in\overline{E}}(\Sigma_U\times\Sigma_V)\Big\}\\
&= \{(x,y)\mid \exists (U,V)\in\overline{E} : x\in U, y\in V\}\\
&\supseteq E.
\end{aligned}$$

Como, para qualquer $f:(X,\mathcal{E})\longrightarrow(X',\mathcal{E}')$, $\eta_{(X',\mathcal{E}')}(f(x))=\eta_{(X,\mathcal{E})}(x)\cdot\Omega(f)$, as aplicações $\eta_{(X,\mathcal{E})}$ definem uma transformação natural $\eta:1_{\mathsf{Unif}}\longrightarrow\Sigma\Omega$. Além disso, cada morfismo $\eta_{(X,\mathcal{E})}$ é universal de $(X,\mathcal{E})$ para Σ. Com efeito, dada uma aplicação uniformemente contínua $f:(X,\mathcal{E})\longrightarrow\Sigma(L,\mathcal{F})$, existe um e um só morfismo $\overline{f}:(L,\mathcal{F})\longrightarrow\Omega(X,\mathcal{E})$ em WUFrm tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{E}) \arrow[r, "\eta_{(X,\mathcal{E})}"] \arrow[dr, "f"'] & \Sigma\Omega(X,\mathcal{E}) \arrow[d, dashed, "\Sigma(\overline{f})"] \\
& \Sigma(L,\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

comuta:

Se exigirmos que, para todo o $x\in X$, $\Sigma(\overline{f})\cdot\eta_{(X,\mathcal{E})}(x)=f(x)$, então, necessariamente, para quaisquer $x\in X$ e $a\in L$, $x\in\overline{f}(a)$ se e só se $f(x)(a)=1$, isto é, qualquer que seja $a\in L$, $\overline{f}(a)$ terá que ser igual a $f^{-1}(\Sigma_a)\in\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$. Além disso, este morfismo $\overline{f}$ é um homomorfismo uniforme de Weil. Obviamente, é um morfismo de reticulados locais. Para qualquer vizinhança da diagonal de Weil F em $\mathcal{F}$, se considerarmos $G\in\mathcal{F}$ simétrica tal que $G^2\subseteq F$ então $E:=(f\times f)^{-1}(\Sigma_G)\in\mathcal{E}$. Logo, de modo a provar que $\overline{f}\oplus\overline{f}(F)$ é uma vizinhança da diagonal de Weil em $\Omega(X,\mathcal{E})$, basta-nos mostrar que $\bigvee_{x\in X}(E[x]\oplus E[x])\subseteq\overline{f}\oplus\overline{f}(F)$. Mas, para cada $x\in X$,

$$E[x] = \Big\{y\in X\mid (f(x),f(y))\in\bigcup_{(a,b)\in G}(\Sigma_a\times\Sigma_b)\Big\}$$

$$\begin{aligned} &= \Big\{y \in X \mid (x,y) \in \bigcup_{(a,b)\in G} (\overline{f}(a) \times \overline{f}(b))\Big\} \\ &= \bigcup \Big\{\overline{f}(b) \mid (a,b) \in G, x \in \overline{f}(a)\Big\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para quaisquer $(a,b),(c,d) \in G$ tais que $x \in \overline{f}(a) \cap \overline{f}(b)$,

$$\Big(\overline{f}(b), \overline{f}(d)\Big) \in \Big(\overline{f} \oplus \overline{f}(G)\Big) \circ \Big(\overline{f} \oplus \overline{f}(G)\Big) \subseteq \overline{f} \oplus \overline{f}(G^2)$$

donde se conclui que

$$(E[x], E[x]) \in \overline{f} \oplus \overline{f}(G^2) \subseteq \overline{f} \oplus \overline{f}(F).$$

Em conclusão, temos uma adjunção dual, sendo $\eta_{(X,\mathcal{E})}$ uma das unidades da adjunção. A outra é dada por

$$\begin{array}{rcccc} \xi_{(L,\mathcal{E})} & : & (L,\mathcal{E}) & \longrightarrow & \Omega\Sigma(L,\mathcal{E}) \\ & & x & \longmapsto & \Sigma_x. \end{array}$$

■

5. O isomorfismo entre as categorias UFrm, WUFrm e EUFrm

O functor Ψ : UFrm $\longrightarrow$ WUFrm

Seja U uma cobertura de L. Dizemos que $x \in L$ é *U-pequeno* se $x \leq st(z,U)$ sempre que $x \wedge z \neq 0$, e que um par $(x,y) \in L \times L$ é *U-pequeno* caso $x \vee y \leq st(z,U)$ quando $x \wedge z \neq 0$ e $y \wedge z \neq 0$. Note-se que isto não implica que x e y sejam U-pequenos. Contudo, (x,x) é U-pequeno se e só se x é U-pequeno.

Seja $\mathcal{U}$ uma família de coberturas de L. Para cada $U \in \mathcal{U}$ consideremos a vizinhança da diagonal de Weil

$$E_U = \bigvee_{x \in U} (x \oplus x),$$

e denotemos o conjunto $\{E_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ por $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$.

O lema seguinte diz-nos que podemos controlar, em termos da noção de U-pequeno, os elementos que estão dentro da vizinhança da diagonal E_U. Este resultado revelar-se-á decisivo na conclusão de que as vizinhanças da diagonal de Weil também servem para caracterizar as uniformidades de reticulados locais.

Lema 5.1. *Para $U \in Cov(L)$, se $(x, y) \in E_U$ então (x, y) é U-pequeno.*

Demonstração. Uma vez que E_U é simétrica, bastará provar que $x \leq st(z, U)$ sempre que $(x, y) \in E_U$ e $y \wedge z \neq 0$. Mas isto é uma consequência do seguinte resultado:

$$E_U \circ (x_1 \oplus x_2) \subseteq st(x_1, U) \oplus st(x_2, U) \text{ para quaisquer } x_1, x_2 \in L. \tag{5.1.1}$$

De facto, por 5.1.1, $E_U \circ (z \oplus z) \subseteq st(z, U) \oplus st(z, U)$ logo $(x, z) \in st(z, U) \oplus st(z, U)$ porque $(x, y \wedge z) \in E_U$ e $(y \wedge z, z) \in z \oplus z$.

Portanto, provemos 5.1.1:

De acordo com o Lema 4.2 (a),

$$E_U \circ (x_1 \oplus x_2) = \Big(\bigcup_{z \in U} (z \oplus z)\Big) \circ (x_1 \oplus x_2).$$

Consideremos $(a, b) \in \bigcup_{z \in U}(z \oplus z)$ e $(b, c) \in x_1 \oplus x_2$ com $a, b, c \neq 0$. Tem-se $(a, b) \leq (z, z)$ para algum $z \in U$ e $z \wedge x_1 \geq b \neq 0$. Então $a \leq z \leq st(x_1, U) \leq y_1$ e, por outro lado, $c \leq x_2 \leq st(x_2, U) \leq y_2$, pelo que $(a, c) \in st(x_1, U) \oplus st(x_2, U)$. ■

Observação 5.2. No seguimento, apenas necessitaremos do seguinte caso particular do Lema 5.1:

> *Seja U uma cobertura de L. Se $(x, x) \in E_U$ então x é U-pequeno.*

Estamos agora em condições de provar que $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ é uma base de uma uniformidade de Weil quando $\mathcal{U}$ é uma base de uma uniformidade.

Proposição 5.3. *Seja $\mathcal{U}$ uma base de uma uniformidade num reticulado local L. Então $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ é uma base de uma uniformidade de Weil em L.*

Demonstração. Sejam $E_U, E_V \in \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$. Tomemos $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \leq U \wedge V$. Imediatamente $E_W \subseteq E_U \cap E_V$, logo $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ é uma base de um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$.

Consideremos $E_U \in \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ e seja $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^* \leq U$. Então $E_V \circ E_V \subseteq E_U$:

Do Lema 4.2 (a) decorre que

$$E_V \circ E_V = \Big(\bigcup_{x \in V} (x \oplus x)\Big) \circ \Big(\bigcup_{x \in V} (x \oplus x)\Big).$$

Sejam $(a,b) \leq (x,x)$ e $(b,c) \leq (y,y)$ onde $x,y \in V$ e $b \neq 0$. Então $x \wedge y \neq 0$, $a \leq x \leq st(x,V)$ e $c \leq y \leq st(x,V)$. Como $st(x,V) \in V^* \leq U$, isto diz-nos que existe $u \in U$ tal que $a \leq u$ e $c \leq u$ e, consequentemente, $(a,c) \in E_U$.

A condição de simetria (UW3) é obviamente satisfeita porque cada E_U é simétrica.

Finalmente, testemos a condição de admissibilidade (UW4). Suponhamos $x \in L$. Por hipótese, $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x\}$. Verificamos (UW4) mostrando que, para qualquer $y \in L$ satisfazendo $y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x$, $y \overset{\mathcal{E}_{\mathcal{U}}}{\lhd} x$. Portanto, consideremos $y \in L$ com $y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x$ e $U \in \mathcal{U}$ tal que $st(y,U) \leq x$. Provemos que $st(y,E_U) \leq x$. Para isso, consideremos $(z,z) \in E_U$ tal que $z \wedge y \neq 0$. Pela Observação 5.2, z é U-pequeno donde $z \leq st(y,U) \leq x$. Logo $st(y,E_U) \leq x$. ∎

No seguimento, para cada uniformidade $\mathcal{U}$, $\psi(\mathcal{U})$ denota a uniformidade de Weil gerada por $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$. A correspondência $(L,\mathcal{U}) \longrightarrow (L,\psi(\mathcal{U}))$ é functorial. Com efeito, é a função em objectos de um functor $\Psi : \mathsf{UFrm} \longrightarrow \mathsf{WUFrm}$ cuja função nos morfismos é descrita na seguinte proposição:

Proposição 5.4. *Sejam $(L,\mathcal{U})$ e $(L',\mathcal{U}')$ dois reticulados locais uniformes e seja $f : (L,\mathcal{U}) \longrightarrow (L',\mathcal{U}')$ um homomorfismo uniforme. Então $f : (L,\psi(\mathcal{U})) \longrightarrow (L',\psi(\mathcal{U}'))$ é um homomorfismo uniforme de Weil.*

Demonstração. É óbvio pois, para qualquer $U \in \mathcal{U}$,

$$(f \oplus f)(E_U) = \bigvee_{x \in U} (f(x) \oplus f(x)) = E_{f[U]}. \qquad ∎$$

Exemplo 5.5. As uniformidades de Weil que considerámos num grupo *locálico* (Exemplo 4.9 (d)) são as uniformidades de Weil induzidas através do functor Ψ pelas uniformidades à esquerda e à direita de [40] (Proposição 3.2) cujas bases são dadas por, respectivamente,

$$\mathcal{U} = \{U(x) \mid \varepsilon(x) = 1\}, \quad \text{onde } U(x) = \{y \in L \mid y \oplus \imath(y) \subseteq \mu(x)\},$$

e

$$\mathcal{V} = \{V(x) \mid \varepsilon(x) = 1\}, \quad \text{onde } V(x) = \{y \in L \mid \imath(y) \oplus y \subseteq \mu(x)\}.$$

Vejamos, por exemplo, que $\mathcal{E}_{\mathcal{V}} = \{E_{V(x)} \mid \varepsilon(x) = 1\}$ e $\mathcal{E}^r$ geram a mesma uniformidade de Weil. É imediato que $E_{V(x)} = \bigvee\{y \oplus y \mid \imath(y) \oplus y \subseteq \mu(x)\}$ está contida em $E^r_x = (\imath \oplus 1_L) \cdot \mu(x)$. Por outro lado, para todo o $x \in L$, seja $y \in L$ tal que $(E^r_y)^2 \subseteq E^r_x$, e consideremos a vizinhança da diagonal simétrica $E^r_{y \wedge \imath(y)} = E^r_y \cap E^r_{\imath(y)} = E^r_y \cap (E^r_y)^{-1}$. Então $E^r_{y\wedge\imath(y)}$ está contida em $E_{V(x)}$: para $(a,b) \in E^r_{y\wedge\imath(y)}$ com $a, b \neq 0$, $(b,a) \in E^r_{y\wedge\imath(y)}$ e $(a,a), (b,b) \in (E^r_{y\wedge\imath(y)})^2$, donde $(a \vee b, a \vee b) \in (E^r_{y\wedge\imath(y)})^2 \subseteq E^r_x$. Logo $(a\vee b) \oplus (a \vee b) \subseteq E_{V(x)}$ e, consequentemente, $(a,b) \in E_{V(x)}$.

O functor Φ : WUFrm $\longrightarrow$ EUFrm

Seja $\mathcal{E} \subseteq L \oplus L$. Para cada $E \in \mathcal{E}$ consideremos a função $e_E : L \longrightarrow L$ definida por $e_E(x) = st(x, E)$ e denotemos o conjunto $\{e_E \mid E \in \mathcal{E}\}$ por $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$. É óbvio que cada e_E preserva supremos arbitrários e que é uma vizinhança sempre que E é uma vizinhança da diagonal de Weil porque x é e_E-pequeno desde que $(x,x) \in E$.

Proposição 5.6. *Seja $\mathcal{E}$ uma base de uma uniformidade de Weil num reticulado local L. Então $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ é uma base de uma uniformidade por vizinhanças em L.*

Demonstração. Verifiquemos as condições (UE1)-(UE4) da Definição 3.1.

(UE1) Sejam $e_E, e_F \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}$. De modo a provar que $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ é uma base de um filtro basta considerar e_G, para alguma vizinhança da diagonal G tal que $G \subseteq E \cap F$.

(UE2) Para $e_E \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ consideremos $F \in \mathcal{E}$ tal que $F^2 \subseteq E$. Na demonstração da Proposição 4.8 (c) observámos que $st(st(x,F),F) \leq st(x, F^2)$, donde se conclui que $e^2_F \leq e_E$.

(UE3) Sejam $E \in \mathcal{E}$ e $x, y \in L$. Então temos

$$x \wedge e_E(y) = 0 \Leftrightarrow \bigvee\{x \wedge u \mid (u,u) \in E \text{ e } u \wedge y \neq 0\} = 0 \tag{5.6.1}$$

e, analogamente,

$$e_E(x) \wedge y = 0 \Leftrightarrow \bigvee\{y \wedge u \mid (u,u) \in E \text{ e } u \wedge x \neq 0\} = 0. \tag{5.6.2}$$

Evidentemente 5.6.1 e 5.6.2 são equivalentes.

(UE4) É óbvia, pois $y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x$ se e só se $y \overset{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}}{\lhd} x$. ■

A partir de agora, dada uma uniformidade de Weil $\mathcal{E}$ em L, $\phi(\mathcal{E})$ denotará a uniformidade por vizinhanças gerada por $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$. A correspondência $(L,\mathcal{E}) \longmapsto (L,\phi(\mathcal{E}))$ é functorial:

Proposição 5.7. *Sejam* $(L,\mathcal{E})$ *e* $(L',\mathcal{E}')$ *dois reticulados locais uniformes de Weil e* $f : (L,\mathcal{E}) \longrightarrow (L,\mathcal{E}')$ *um homomorfismo uniforme de Weil. Então* $f : (L,\phi(\mathcal{E})) \longrightarrow (L',\phi(\mathcal{E}'))$ *é um morfismo de* EUFrm.

Demonstração. Seja $e_E \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}$, onde $E \in \mathcal{E}$. Consideremos $F \in \mathcal{E}$, simétrica, tal que $F^2 \subseteq E$. Uma vez que f é um homomorfismo uniforme de Weil, $(f \oplus f)(F) \in \mathcal{E}'$. Para mostrar que $f : (L,\phi(\mathcal{E})) \longrightarrow (L',\phi(\mathcal{E}'))$ é uniforme basta provar que $e_{(f\oplus f)(F)} \cdot f \leq f \cdot e_E$.

Então, fixemos $x \in L$ e consideremos $y \in L'$ tal que $(y,y) \in (f \oplus f)(F)$ e $y \wedge f(x) \neq 0$. Como $(y, y \wedge f(x)) \in (f \oplus f)(F)$ e $(y \wedge f(x), f(x)) \in f(x) \oplus f(x)$, deduzimos que $(y, f(x)) \in (f \oplus f)(F) \circ (f(x) \oplus f(x))$. Uma vez que F é da forma $\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma \oplus b_\gamma)$ tem-se

$$\begin{aligned}(f \oplus f)(F) \circ (f(x) \oplus f(x)) &= \Big((f \oplus f)\Big(\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(a_\gamma \oplus b_\gamma)\Big)\Big) \circ (f(x) \oplus f(x)) \\ &= k\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f(a_\gamma) \oplus f(b_\gamma))\Big) \circ k\Big(\downarrow(f(x), f(x))\Big),\end{aligned}$$

pelo que, por 4.2 (a),

$$(f \oplus f)(F) \circ (f(x) \oplus f(x)) = \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f(a_\gamma) \oplus f(b_\gamma))\Big) \circ (\downarrow(f(x), f(x))).$$

Mas

$$\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f(a_\gamma) \oplus f(b_\gamma))\Big) \circ (\downarrow(f(x), f(x)))$$

está contido em $(f \cdot e_E)(x) \oplus f(x)$:

Se

$$(a,b) \in \Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(f(a_\gamma) \oplus f(b_\gamma)) \cdot \downarrow(f(x), f(x))\Big) \setminus \mathbb{0},$$

existem $c \in L\backslash\{0\}$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que $(a,c) \leq (f(a_\gamma), f(b_\gamma))$ e $(c,b) \leq (f(x), f(x))$, donde deduzimos que $a \leq f(a_\gamma \vee b_\gamma)$ e, portanto, que $a \leq (f \cdot e_E)(x)$. De facto, $(a_\gamma \vee b_\gamma) \wedge x \neq 0$ porque $f(b_\gamma \wedge x) \geq c \neq 0$ e, pela simetria de F, $(a_\gamma \vee b_\gamma, a_\gamma \vee b_\gamma) \in F^2 \subseteq E$.

Concluindo, temos

$$(y, f(x)) \in (f \oplus f)(F) \circ f(x) \oplus f(x) \subseteq (f \cdot e_E)(x) \oplus f(x).$$

Então $y \leq (f \cdot e_E)(x)$, o que implica $e_{(f \oplus f)(F)}(f(x)) \leq f(e_E(x))$, como desejávamos. ∎

Denotaremos o functor acima definido por Φ.

O functor Θ : EUFrm $\longrightarrow$ UFrm

Para cada vizinhança e de L seja U_e a cobertura formada pelos elementos e-pequenos de L.

Proposição 5.8. (Fletcher e Hunsaker [23]) *Seja $\mathcal{M}$ uma base de uma uniformidade por vizinhanças num reticulado local L. Então $\mathcal{U}_\mathcal{M} := \{U_e \mid e \in \mathcal{M}\}$ é uma base de uma uniformidade em L.*

Demonstração. (U1) Consideremos $U_e, U_f \in \mathcal{U}_\mathcal{M}$ e seja $g \in \mathcal{M}$ tal que $g \leq e \wedge f$. É imediato que $U_g \leq U_e \wedge U_f$.

(U2) Seja $U_e \in \mathcal{U}_\mathcal{M}$ e consideremos $f \in \mathcal{M}$ tal que $f^3 \leq e$. Justifiquemos que $U_f^* \leq U_e$. Para isso, consideremos $st(x, U_f) \in U_f^*$. Basta provar que $st(x, U_f)$ é e-pequeno. Portanto, seja $z \in L$ tal que $z \wedge st(x, U_f) \neq 0$. Então existe $y \in U_f$ com $y \wedge x \neq 0$ e $y \wedge z \neq 0$. Do facto de x e y serem f-pequenos deduz-se que $x \leq f^2(z)$. Então, qualquer que seja $y' \in U_f$ tal que $y' \wedge x \neq 0$, temos $y' \leq f(x) \leq f^3(z) \leq e(z)$.

(U3) $\bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{U}_\mathcal{M}}{\lhd} x\}$ é menor ou igual a x porque $y \overset{\mathcal{U}_\mathcal{M}}{\lhd} x$ implica $y \leq x$. Para concluir que $x \leq \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{U}_\mathcal{M}}{\lhd} x\}$ é suficiente mostrar que $y \overset{\mathcal{M}}{\lhd} x$ implica $y \overset{\mathcal{U}_\mathcal{M}}{\lhd} x$. Seja $e \in \mathcal{M}$ com $e(y) \leq x$. Então, imediatamente, $z \leq e(y) \leq x$ qualquer que seja $z \in U_e$ tal que $z \wedge y \neq 0$, isto é, $st(y, U_e) \leq x$. ∎

No que se segue, dada uma uniformidade por vizinhanças $\mathcal{M}$, $\theta(\mathcal{M})$ denotará a uniformidade gerada por $\mathcal{U}_\mathcal{M}$.

Por outro lado, relativamente aos morfismos, temos:

Proposição 5.9. (Fletcher e Hunsaker [23]) *Sejam* $(L, \mathcal{M})$ *e* $(L', \mathcal{M}')$ *dois reticulados locais uniformes por vizinhanças e seja* $f : (L, \mathcal{M}) \longrightarrow (L', \mathcal{M}')$ *um morfismo de* EUFrm. *Então* $f : (L, \theta(\mathcal{M})) \longrightarrow (L', \theta(\mathcal{M}'))$ *é um morfismo de* UFrm.

Demonstração. Sejam $U \in \theta(\mathcal{M})$ e $e \in \mathcal{M}$ tais que $U_{e^3} \leq U$. Por hipótese, existe $g \in \mathcal{M}'$ satisfazendo $g \cdot f \leq f \cdot e$. Provemos que $U_g \leq f[U_{e^3}]$. Seja x um elemento não nulo g-pequeno de L'. Como $f[U_e]$ é uma cobertura de L', existe $y \in U_e$ tal que $x \wedge f(y) \neq 0$, donde $x \leq g \cdot f(y) \leq f \cdot e(y)$. Mas, como pode ser facilmente averiguado, o facto de y ser e-pequeno implica que $e(y)$ seja e^3-pequeno. Então, $U_g \leq f[U_{e^3}] \leq f[U]$ e $f[U] \in \theta(\mathcal{M}')$. ■

Obtemos deste modo um functor $\mathsf{EUFrm} \longrightarrow \mathsf{UFrm}$ que denotaremos por Θ.

O isomorfismo

Finalmente, provemos que os functores Ψ, Φ e Θ estabelecem um isomorfismo entre as categorias UFrm, WUFrm e EUFrm.

Lema 5.10. *Para qualquer cobertura* U *de* L *temos:*

(a) $U \leq U_{e_{E_U}}$;

(b) $U_{e_{E_U}} \leq U^*$.

Demonstração.

(a) Seja $x \in U$. Qualquer que seja $y \in L$ satisfazendo $x \wedge y \neq 0$, como $(x, x) \in E_U$, $x \leq st(y, E_U) = e_{E_U}(y)$, isto é, x é e_{E_U}-pequeno e, portanto, $x \in U_{e_{E_U}}$.

(b) Para qualquer elemento x de L, não nulo e e_{E_U}-pequeno, existe $y \in U$ tal que $x \wedge y \neq 0$. Então $x \leq st(y, E_U)$. Mas, para todo o par (z, z) em E_U, z é U-pequeno pelo que $z \leq st(y, U)$ caso $z \wedge y \neq 0$. Isto significa que $st(y, E_U) \leq st(y, U)$, donde $x \leq st(y, U) \in U^*$. ■

A propriedade correspondente para vizinhanças da diagonal de Weil é a seguinte:

Lema 5.11. *Seja E uma vizinhança da diagonal de Weil em L. Então:*

(a) $E \subseteq E_{U_{e_{E^2}}}$;

(b) $E_{U_{e_E}} \subseteq E^2$.

Demonstração.

(a) Consideremos $(x,y) \in E \setminus \mathbb{O}$. Então $(x \vee y, x \vee y) \in E^2$ porque $(x,y), (y,x), (x,x)$ e (y,y) pertencem a E^2. Como todo o membro de E^2 com coordenadas iguais é e_{E^2}-pequeno, $(x \vee y, x \vee y) \in E_{U_{e_{E^2}}}$ e, consequentemente, $(x,y) \in E_{U_{e_{E^2}}}$.

(b) Verifiquemos que

$$\bigcup\{x \oplus x \mid x \text{ é } e_E\text{-pequeno } \} \subseteq E^2$$

ou, o que é o mesmo, que $(x,x) \in E^2$ sempre que x é e_E-pequeno. Consideremos $x \neq 0$, e_E-pequeno. Temos $x \leq \bigvee\{z \in L \mid (z,z) \in E, z \wedge x \neq 0\}$. Como x é e_E-pequeno, obtemos $x \leq e_E(z) = \bigvee\{y \in L \mid (y,y) \in E, y \wedge z \neq 0\}$, para todo o z tal que $(z,z) \in E$ e $x \wedge z \neq 0$. Para cada y neste conjunto temos $(z, z \wedge y)$, $(z \wedge y, y) \in E$, donde decorre que $(z,y) \in E^2$. Então $(z,x) \in E^2$ e, consequentemente, $(x,x) \in E^2$. ∎

Por fim, para vizinhanças temos:

Lema 5.12. *Seja f uma vizinhança simétrica de L. Então:*

(a) $e \leq e_{E_{U_{e^3}}}$;

(b) $e_{E_{U_e}} \leq e$.

Demonstração.

(a) Por definição, $e_{E_{U_{e^3}}}(x) = st(x, E_{U_{e^3}})$ para todo o $x \in L$. Por outro lado,

$$e(x) = e\Big(\bigvee\{x \wedge y \mid y \text{ é } e\text{-pequeno }\}\Big) = \bigvee\{e(x \wedge y) \mid y \text{ é } e\text{-pequeno e } x \wedge y \neq 0\}.$$

Consideremos um elemento e-pequeno y tal que $x \wedge y \neq 0$. Evidentemente $e(x \wedge y)$ é e^3-pequeno donde $\big(e(x \wedge y), e(x \wedge y)\big) \in E_{U_{e^3}}$. Como $e(x \wedge y) \wedge x \wedge y = x \wedge y \neq 0$, deduz-se que

$$e(x \wedge y) \leq e_{E_{U_{e^3}}}(x \wedge y) \leq e_{E_{U_{e^3}}}(x),$$

logo $e(x) \leq e_{E_{U_{e^3}}}(x)$.

(b) Atendendo à Observação 5.2, y é U_e-pequeno caso $(y, y) \in E_{U_e}$. Então

$$e_{E_{U_e}} = \bigvee \{y \in L \mid (y, y) \in E_{U_e}, y \wedge x \neq 0\} \leq st(x, U_e) \leq e(x). \qquad \blacksquare$$

Proposição 5.13. *Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{M}$ respectivamente, uma uniformidade, uma uniformidade de Weil e uma uniformidade de vizinhanças em L. Então $\theta\phi\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, $\psi\theta\phi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ e $\phi\psi\theta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.*

Demonstração. Vejamos, em primeiro lugar, que $\theta\phi\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. O conjunto $\{U_e \mid e \in \phi\psi(\mathcal{U})\}$ constitui uma base da uniformidade $\theta\phi\psi(\mathcal{U})$. Bastará então provar que é também uma base de $\mathcal{E}$, o que é uma consequência do Lema 5.10: por (a), $\{U_e \mid e \in \phi\psi(\mathcal{U})\} \subseteq \mathcal{U}$, e, por (b), para cada $U \in \mathcal{U}$ existe um $V \in \mathcal{U}$ tal que $U_{e_{E_V}} \subseteq U$.

Analogamente, o Lema 5.11 implica que a base $\{E_U \mid U \in \theta\phi(\mathcal{E})\}$ de $\psi\theta\phi(\mathcal{E})$ é também uma base de $\mathcal{E}$, o que prova a segunda identidade, e o Lema 5.12 implica que a base $\{e_E \mid E \in \psi\theta(\mathcal{M})\}$ de $\phi\psi\theta(\mathcal{M})$ é uma base de $\mathcal{M}$, o que prova a terceira identidade. ■

Concluindo, decorre das Proposições 5.4, 5.7, 5.9 e 5.13 que:

Teorema 5.14. *As categorias* UFrm, WUFrm *e* EUFrm *são isomorfas.* ■

6. Aplicação: um teorema de Efremovič para espaços uniformes no contexto dos reticulados locais

Tal como acontece com as diferentes maneiras de introduzir uma estrutura topológica num conjunto, por vezes uma das noções de cobertura ou vizinhança da diagonal de Weil é mais adequada que a outra para um determinado fim. Vamos terminar este capítulo com uma ilustração deste facto. Nela, tomamos a liberdade de usar quer as vizinhanças da diagonal de Weil quer as coberturas na abordagem ao problema em questão. Este movimento livre entre vizinhanças da diagonal de Weil e coberturas permite grande flexibilidade.

Em [20] (v. também o Lema 12.17 e o Teorema 12.18 de [56]) Efremovič provou que, no quadro dos espaços uniformes,

> *se duas uniformidades no mesmo conjunto, com bases numeráveis, têm a mesma compactificação de Samuel, então são iguais.*

O nosso objectivo nesta secção é provar o seguinte teorema:

Teorema 6.1. *Se duas uniformidades no mesmo reticulado local, com bases numeráveis, têm a mesma correflexão totalmente limitada, então são iguais.*

Recordemos que um reticulado local uniforme se diz *totalmente limitado* se tiver uma base de coberturas finitas. Os reticulados locais uniformes são correflectivos em UFrm; a correflexão totalmente limitada de um reticulado local uniforme $(L,\mathcal{U})$ é construída do seguinte modo: consideremos o filtro $\mathcal{U}_\#$ de $(Cov(L),\leq)$ gerado pelas coberturas finitas de $\mathcal{U}$; o par $(L,\mathcal{U}_\#)$ é um reticulado local uniforme e é a correflexão totalmente limitada de $(L,\mathcal{U})$, sendo o morfismo correflector $(L,\mathcal{U}_\#) \longrightarrow (L,\mathcal{U})$ a aplicação identidade $L \longrightarrow L$ (cf. [10]).

A compactificação de Samuel de um reticulado local uniforme $(L,\mathcal{U})$ — isto é, a sua correflexão compacta regular (inicialmente construída por Banaschewski e Pultr em [10]) — pode ser descrita do seguinte modo: considere-se o reticulado local $\mathcal{R}(L,\mathcal{U})$ dos ideais regulares de L (um ideal I de L é *regular* se, para todo o $x \in I$, existe $y \in I$ tal que $x \overset{\mathcal{U}}{\triangleleft} y$). Uma vez que $\mathcal{R}(L,\mathcal{U})$ é um reticulado local compacto regular, possui uma única uniformidade $\mathcal{U}_{\mathcal{R}(L,\mathcal{U})}$ gerada pelas suas coberturas finitas. Além disso, o morfismo $\bigvee : \mathcal{R}(L,\mathcal{U}) \longrightarrow L$, que aplica cada ideal regular no seu supremo, é um homomorfismo uniforme de $(\mathcal{R}(L,\mathcal{U}),\mathcal{U}_{\mathcal{R}(L,\mathcal{U})})$ para $(L,\mathcal{U})$. O par $(\mathcal{R}(L,\mathcal{U}),\mathcal{U}_{\mathcal{R}(L,\mathcal{U})})$ é a compactificação de Samuel de $(L,\mathcal{U})$ e a aplicação $\bigvee$ é o morfismo correflector [10].

Mas, como é bem conhecido:

Proposição 6.2. *Se duas uniformidades no mesmo reticulado local têm a mesma compactificação de Samuel, então têm a mesma correflexão totalmente limitada.*

Portanto, deduz-se imediatamente do Teorema 6.1 a versão para reticulados locais daquele resultado de Efremovič:

Corolário 6.3. *Se duas uniformidades no mesmo reticulado local, com bases numeráveis, têm a mesma compactificação de Samuel, então são iguais.* ■

As demonstrações

Apresentemos, em primeiro lugar, uma prova da Proposição 6.2:

Suponhamos que $(L,\mathcal{U})$ e $(L,\mathcal{V})$ são dois reticulados locais uniformes com a mesma compactificação de Samuel e consideremos uma cobertura U em $\mathcal{U}_{\#}$. Então existe um refinamento finito $V \in \mathcal{U}_{\#}$ de U. Para cada $x \in V$,

$$\Downarrow\! x := \{y \in L \mid y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x\} \in \mathcal{R}(L,\mathcal{U})$$

e, como V é finito, $\bigvee\{\Downarrow\! x \mid x \in V\} = L$ (veja [10]), isto é, $\{\Downarrow\! x \mid x \in V\}$ é uma cobertura finita de $\mathcal{R}(L,\mathcal{U})$. Assim,

$$\{\Downarrow\! x \mid x \in V\} \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}(L,\mathcal{U})} = \mathcal{U}_{\mathcal{R}(L,\mathcal{V})}.$$

Mas

$$\bigvee : (\mathcal{R}(L,\mathcal{V}), \mathcal{U}_{\mathcal{R}(L,\mathcal{V})}) \longrightarrow (L, \mathcal{V}_{\#})$$

é uniforme, logo $\{\bigvee \Downarrow\! x \mid x \in V\} \in \mathcal{V}_{\#}$, isto é, $V \in \mathcal{V}_{\#}$.

Em conclusão, U também pertence a $\mathcal{V}_{\#}$ e, consequentemente, $\mathcal{U}_{\#} \subseteq \mathcal{V}_{\#}$. De um modo semelhante, $\mathcal{V}_{\#} \subseteq \mathcal{U}_{\#}$. ■

Demonstremos agora o Teorema 6.1:

Consideremos dois reticulados locais uniformes, $(L,\mathcal{U})$ e $(L,\mathcal{V})$, definidos em termos de coberturas, com bases numeráveis e a mesma correflexão totalmente limitada, e seja $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base descendente de $\mathcal{U}$, isto é, tal que $U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo o natural n.

Suponhamos que $\mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{U}$. Então $\psi(\mathcal{V}) \not\subseteq \psi(\mathcal{U})$ (senão $\mathcal{V} = \theta\phi\psi(\mathcal{V}) \subseteq \theta\phi\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$).

Seja $V \in \mathcal{V}$ tal que $E_V \notin \psi(\mathcal{U})$, ou seja, tal que $E_{U_n} \not\subseteq E_V$ para todo o natural n e seleccionemos, para cada n, $(a_n, b_n) \in E_{U_n} \setminus E_V$; além disso, consideremos W_1, W_2 e Y em $\mathcal{V}$ tais que $W_1^{**} \leq V$, $W_2^{**} \leq W_1$ e $Y^{**} \leq W_2$. Note-se que a_n e b_n são não nulos pois $(a_n, b_n) \notin E_V$. Para cada n,

$$a_n = a_n \wedge 1 = \bigvee\{a_n \wedge y \mid y \in Y, a_n \wedge y \neq 0\};$$

por definição de C-ideal, $(a_n, b_n) \notin E_V$ implica a existência de $y_n^1 \in Y$ tal que $a_n \wedge y_n^1 \neq 0$ e $(a_n \wedge y_n^1, b_n) \notin E_V$. Definamos

$$c_n := a_n \wedge y_n^1.$$

Analogamente existe, para cada n, algum $y_n^2 \in Y$ tal que $(c_n, b_n \wedge y_n^2) \notin E_V$. Definamos

$$d_n := b_n \wedge y_n^2.$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(c_n, d_n) \in E_{U_n} \setminus E_V$ e $c_n, d_n \in \downarrow Y$.

Seja

$$S := \{c_n, d_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

O seguinte resultado auxiliar ser-nos-á muito útil.

Lema 6.4. *Existe um subconjunto infinito I de $\mathbb{N}$ tal que*

$$\left(\bigvee_{i\in I} st(c_i, W_2)\right) \wedge \left(\bigvee_{i\in I} st(d_i, W_2)\right) = 0.$$

Demonstração.

Caso I: Para algum $x \in S$, $T := S \cap \{y \in L \mid (y, x) \in E_{W_1}\}$ é infinito.

Então, ou $\{i \in \mathbb{N} \mid c_i \in T\}$ é infinito ou $\{i \in \mathbb{N} \mid d_i \in T\}$ é infinito e, em ambos os casos, obtemos o desejado conjunto I. Com efeito, suponhamos que $I = \{i \in \mathbb{N} \mid c_i \in T\}$ é infinito (o caso de $\{i \in \mathbb{N} \mid d_i \in T\}$ ser infinito pode ser provado de modo análogo, por simetria). Temos que mostrar que, para quaisquer $i, j \in I$,

$$st(c_i, W_2) \wedge st(d_j, W_2) = 0.$$

Para isso consideremos i e j em I e suponhamos, por absurdo, que existe um par $(c,d) \in W_2 \times W_2$ satisfazendo $c \wedge c_i \neq 0$, $d \wedge d_j \neq 0$ e $c \wedge d \neq 0$. Então (c,c) e (d,d) pertencem a E_{W_2} e, consequentemente, $(d,c) \in E_{W_2} \circ E_{W_2}$. Adicionalmente, como é suposto i e j estarem em I, (c_i,x) e (c_j,x) pertencem a E_{W_1}. Como x é não nulo e a vizinhança da diagonal de Weil E_{W_1} é simétrica, $(c_i,c_j) \in E_{W_1} \circ E_{W_1}$. Por outro lado, dos factos $Y \leq W_2$, $c_i \leq y_i^1 \in Y$ e $d_j \leq y_j^2 \in Y$ decorre que (c_i,c_i) e (d_j,d_j) estão ambos em E_{W_2} e, portanto, que (c,c_i) e (d_j,d) pertencem a $E_{W_2} \circ E_{W_2}$. Então $(d_j,c_i) \in E_{W_2}^4 \subseteq E_{W_1}$. Mas $(c_i,c_j) \in E_{W_1}^2$ logo $(d_j,c_j) \in E_{W_1}^3 \subseteq E_V$, o que é uma contradição.

Caso II: Cada $S \cap \{y \in L \mid (y,x) \in E_{W_1}\}$ é finito.

O par (c_1,d_1) não pertence a E_V pelo que c_1 e d_1 não são E_{W_1}-*adjacentes*, isto é, $(c_1,d_1) \notin E_{W_1}$. Ponhamos $i_1 := 1$. As hipóteses de que $S \cap \{y \in L \mid (y,c_1) \in E_{W_1}\}$ e $S \cap \{y \in L \mid (y,d_1) \in E_{W_1}\}$ são finitos implicam a existência de um natural i tal que $c_i, d_i \notin S \cap \{y \in L \mid (y,c_1) \in E_{W_1}\}$ e $c_i, d_i \notin S \cap \{y \in L \mid (y,d_1) \in E_{W_1}\}$, ou seja, que nenhum par de elementos de $\{c_1,d_1,c_i,d_i\}$ é um par de elementos E_{W_1}-adjacentes. Definamos i_2 como o menor natural nestas condições. Repetindo indutivamente este raciocínio, obtemos uma sucessão $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde i_{n+1} é o menor natural k tal que nenhum par de elementos de $\{c_{i_1},d_{i_1},\ldots,c_{i_n},d_{i_n},c_k,d_k\}$ é um par de elementos E_{W_1}-adjacentes. Isto determina o conjunto I:

Quaisquer que sejam $i,j \in I$,

$$st(c_i,W_2) \wedge st(d_j,W_2) = \bigvee\{c \wedge d \mid c,d \in W_2, c \wedge c_i \neq 0, d \wedge d_j \neq 0\},$$

pois, como observámos no caso anterior, se existisse um par $(c,d) \in W_2 \times W_2$ satisfazendo $c \wedge c_i \neq 0$, $d \wedge d_j \neq 0$ e $c \wedge d \neq 0$, então $(d_j,c_i) \in E_{W_1}$, i.e., d_j e c_i seriam E_{W_1}-adjacentes, o que é contraditório com a definição de I. ■

Continuando com a demonstração do Teorema 6.1, seja W_0 o conjunto constituído pelos três elementos seguintes:

$$\bigvee_{i\in I} st(c_i,W_2),$$

$$\bigvee_{i\in I} st(d_i,W_2)$$

e

$$\bigvee\Big\{st(x,Y) \mid x \in L \setminus \Big\{z \in L : z \wedge \bigvee_{i\in I}(st(c_i,Y) \vee st(d_i,Y)) \neq 0\Big\}\Big\}.$$

Provemos que $Y \leq W_0$; para isso, consideremos $y \in Y$, não nulo. Se

$$y \in L \setminus \Big\{z \in L : z \wedge \bigvee_{i\in I}(st(c_i,Y) \vee st(d_i,Y)) \neq 0\Big\},$$

então

$$\begin{aligned} y &\leq st(y,Y) \\ &\leq \bigvee\Big\{st(x,Y) \mid x \in L \setminus \Big\{z \in L : z \wedge \bigvee_{i\in I}(st(c_i,Y) \vee st(d_i,Y)) \neq 0\Big\}\Big\} \in W_0. \end{aligned}$$

Caso contrário,

$$y \wedge \bigvee_{i\in I}\Big(st(c_i,Y) \vee st(d_i,Y)\Big) \neq 0,$$

i.e., para algum $i \in I$, $y \wedge st(c_i,Y) \neq 0$ ou $y \wedge st(d_i,Y) \neq 0$. Suponhamos que $y \wedge st(c_i,Y) \neq 0$ (o outro caso pode ser estudado de uma maneira análoga). Então existe $\overline{y}$ em Y satisfazendo $\overline{y} \wedge c_i \neq 0$ e $\overline{y} \wedge y \neq 0$. Denotemos a cobertura

$$Y \cup \{y_1 \vee y_2 \mid y_1, y_2 \in Y, y_1 \wedge y_2 \neq 0\}$$

por Y'. É claro que $\overline{y} \vee y \in Y'$ e $(\overline{y} \vee y) \wedge c_i \neq 0$ donde

$$y \leq \overline{y} \vee y \leq st(c_i,Y') \leq st(y_i^1,Y').$$

Mas, como pode ser facilmente observado, qualquer que seja a cobertura Y, $Y \leq Y' \leq Y^*$, pelo que, neste caso, podemos concluir que $Y'^* \leq Y^{**} \leq W_2$. Então, existe $w \in W_2$ tal que $y \leq w$. Logo

$$y \leq w \leq st(c_i,W_2) \leq \bigvee_{i\in I} st(c_i,W_2) \in W_0.$$

Em conclusão, W_0 é uma cobertura finita de $\mathcal{V}$.

Além disso

$$\left(\bigvee_{i\in I} st(c_i,W_0)\right) \wedge \left(\bigvee_{i\in I} st(d_i,W_0)\right) = 0 :$$

Para quaisquer $i, j \in I$,

$$st(c_i,W_0) \wedge st(d_j,W_0) = \bigvee\{u \wedge v \mid u, v \in W_0, u \wedge c_i \neq 0, v \wedge d_j \neq 0\}.$$

Por outro lado, se $u \in W_0$ e $u \wedge c_i \neq 0$, então u é necessariamente igual a $\bigvee_{i\in I} st(c_i, W_2)$ pois

- $u = \bigvee_{j\in I} st(d_j, W_2)$ implicaria, devido à definição do conjunto I no Lema 6.4, que $c_i \wedge u = 0$, o que seria uma contradição.
- $u = \bigvee\Big\{st(x,Y) \mid x \in L \setminus \Big\{z \in L : z \wedge \bigvee_{i\in I}(st(c_i,Y) \vee st(d_i,Y)) \neq 0\Big\}\Big\}$ implicaria a existência de x em
$$L \setminus \Big\{z \in L : z \wedge \bigvee_{i\in I}(st(c_i,Y) \vee st(d_i,Y)) \neq 0\Big\}$$
satisfazendo $c_i \wedge st(x,Y) \neq 0$ ou, equivalentemente, $st(c_i,Y) \wedge x \neq 0$, o que, por sua vez, implicaria
$$x \wedge \bigvee_{i\in I}(st(c_i,Y) \vee st(d_i,Y)) \neq 0,$$
uma contradição.

Analogamente, se $v \in W_0$ e $v \wedge d_j \neq 0$ então $v = \bigvee_{i\in I} st(d_i, W_2)$. Portanto, $u \wedge v = 0$ para quaisquer $u, v \in W_0$ tais que $u \wedge c_i \neq 0$ e $v \wedge d_j \neq 0$, e a prova da desejada identidade está terminada.

Por fim, concluamos a demonstração do teorema. A cobertura W_0 é finita pelo que pertence à correflexão totalmente limitada $\mathcal{V}_\#$ de $\mathcal{V}$. Por hipótese, $\mathcal{V}_\# = \mathcal{U}_\# \subseteq \mathcal{U}$. Então $W_0 \in \mathcal{U}$. Consequentemente, existe algum $n \in \mathbb{N}$ com $U_n \leq W_0$ e

$$\Big(\bigvee_{i\in I} st(c_i, W_0)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i\in I} st(d_i, W_0)\Big) \geq \Big(\bigvee_{i\in I} st(c_i, U_n)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i\in I} st(d_i, U_n)\Big),$$

o que é absurdo porque, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\bigvee_{i\in I} st(c_i, U_n)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i\in I} st(d_i, U_n)\Big) \neq 0 :$$

De facto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i \in I$ tal que $i \geq n$. Consideremos $m \in \mathbb{N}$ tal que $U_m^{**} \leq U_i$ e $j \in I$ com $j \geq m$. Então, como $(c_j, d_j) \in E_{U_j}$, $(c_j \vee d_j, c_j \vee d_j) \in E_{U_j} \circ E_{U_j}$. Mas $E_{U_j} \circ E_{U_j} \leq E_{U_j^*}$. Logo $(c_j \vee d_j, c_j \vee d_j) \in E_{U_j^*} \leq E_{U_m^*}$, donde se deduz que $c_j \vee d_j \in U_{E_{U_m^*}} \leq U_m^{**}$. Consequentemente, $c_j \vee d_j \in U_i \leq U_n$. Então

$$\Big(\bigvee_{i\in I} st(c_i, U_n)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i\in I} st(d_i, U_n)\Big) \geq c_j \vee d_j \neq 0. \qquad \blacksquare$$

Notas sobre o Capítulo I:

(1) Refira-se que olhando as categorias UFrm, EUFrm e WUFrm como categorias concretas sobre a categoria dos conjuntos, os isomorfismos do Teorema 5.14 são concretos.

O mesmo se passa com todos os isomorfismos de categorias que estabeleceremos nos capítulos seguintes.

(2) A Secção 6 ilustra o modo como a linguagem de vizinhanças da diagonal é muito conveniente aquando da transposição para reticulados locais do Teorema de Efremovič para espaços uniformes. Portanto, apesar de, tal como em espaços, a abordagem via coberturas se ter revelado mais conveniente e mais fácil de manusear, existem situações onde a abordagem via vizinhanças da diagonal se mostra útil. Indubitavelmente, a afirmação de Frith [29] de que "*covers constitute the only tool that works for frames*" não é exacta. Talvez a tese de Isbell [39] de que, para espaços uniformes, a abordagem de Tukey é mais conveniente "*nine-tenths of the time*" seja também válida para reticulados locais e a Secção 6 faça parte do décimo restante.

Desejo aqui realçar a influência determinante na demonstração do Teorema 6.1 de uma prova do resultado correspondente para espaços que me foi apresentada pelo Professor Bernhard Banaschewski, a quem devo a sugestão que deu origem à Secção 6.

(3) Existe uma outra abordagem aos espaços uniformes; tal descrição foi dada por Bourbaki em [14] em termos de pseudométricas. No capítulo seguinte faremos esta abordagem do ponto de vista dos reticulados locais e concluiremos que, tal como acontece com as outras abordagens, esta também é possível em reticulados locais.

(4) Depois de concluída a axiomatização da categoria dos reticulados locais uniformes de Weil, será natural procurar as correctas noções de "quase-uniformidade de Weil" e "adjacência de Weil" e estabelecer as relações com as correspondentes noções existentes na literatura. Investigaremos estes problemas nos Capítulos III e IV.

CAPÍTULO II

RETICULADOS LOCAIS UNIFORMES NO SENTIDO DE BOURBAKI

Um dos mais importantes resultados da teoria dos espaços uniformes afirma que num espaço uniforme qualquer cobertura uniforme pode ser "aproximada" por uma pseudométrica (v. p. ex. [77], Lema 38.1). Portanto qualquer uniformidade num conjunto X dá origem a uma família de pseudométricas que pode ser usada para recuperar a uniformidade original. Daqui decorre que os espaços uniformes podem ser descritos em termos destas famílias de pseudométricas, habitualmente designadas por "estruturas de medida" (do inglês "gauge structures"). Esta descrição foi introduzida por Bourbaki em [14]. A sua eficiência pode ser observada em [32].

O objectivo deste capítulo é o de estender estas estruturas de medida aos reticulados locais. As pseudométricas clássicas são substituídas pelos diâmetros métricos de Pultr [64]. Caracterizamos estruturas de medida para reticulados locais como famílias de diâmetros métricos que descrevem completamente as uniformidades, mostrando assim que esta abordagem alternativa também funciona para reticulados locais. Como aplicação desta nova caracterização dos reticulados locais uniformes, provamos que existe um completamento final ([2], [35]) da categoria dos reticulados locais métricos que contém uma cópia isomorfa da categoria dos reticulados locais uniformes, obtendo assim uma relação categorial entre reticulados locais métricos e uniformes, e estendendo o resultado correspondente de Adámek e Reiterman [2] para espaços.

1. Estruturas de medida em conjuntos

Recordemos que uma *pseudométrica* num conjunto X é uma função ρ de $X \times X$ em $\mathbb{R}$, satisfazendo, para quaisquer $x, y, z \in X$:

(a) $\rho(x, y) \geq 0$;

(b) $\rho(x, x) = 0$;

(c) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(d) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Portanto, uma pseudométrica difere de uma métrica somente no facto de que x não é necessariamente igual a y quando $\rho(x, y) = 0$.

As uniformidades num conjunto X podem ser completamente descritas por famílias $\mathcal{G}$ de pseudométricas em X [14], chamadas *estruturas de medida*, tais que:

(UP1) se $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{G}$ então

$$\begin{array}{rccl} \rho_1 \vee \rho_2 : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \max(\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)) \end{array}$$

também pertence a $\mathcal{G}$;

(UP2) se ρ é uma pseudométrica e

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \exists \rho' \in \mathcal{G} : \rho'(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(x, y) < \epsilon,$$

então $\rho \in \mathcal{G}$.

De facto, a categoria definida pelos pares $(X, \mathcal{G})$, formados por um conjunto X e uma estrutura de medida $\mathcal{G}$ em X, e pelas aplicações $f : (X, \mathcal{G}) \longrightarrow (X', \mathcal{G}')$ tais que, para cada $\rho \in \mathcal{G}'$, a pseudométrica σ em X dada por $\sigma(x, y) = \rho(f(x), f(y))$ pertence a $\mathcal{G}$ é isomorfa a `Unif` ([14], [22]).

Com a ajuda de alguns resultados de Pultr ([64], [67]) podemos apresentar uma descrição semelhante para reticulados locais uniformes. Esta abordagem permitir-nos-á concluir que a categoria dos reticulados locais uniformes está imersa num completamento final (universal) da categoria dos reticulados locais métricos (Secção 4).

2. Reticulados locais métricos

O processo de estender estruturas métricas a reticulados locais, devido a Pultr [64], usa a noção de diâmetro — uma extensão da noção clássica de distância — em substituição da métrica. Vamos recordar em seguida este processo; para uma informação mais pormenorizada sobre reticulados locais métricos remetemos o leitor para [9], [67] e [68].

Seja L um reticulado local. Um *pré-diâmetro* em L é uma aplicação $d : L \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que

(D1) $d(0) = 0$,

(D2) $d(x) \leq d(y)$ se $x \leq y$, e

(D3) $d(x \vee y) \leq d(x) + d(y)$ se $x \wedge y \neq 0$.

Recordemos a operação

$$st(x, U) = \bigvee\{y \in U \mid y \wedge x \neq 0\},$$

para subconjuntos U de L e elementos x de L. Obviamente

$$st\Big(\bigvee_{i \in I} x_i, U\Big) = \bigvee_{i \in I} st(x_i, U),$$

donde $st(\_\_, U) : L \longrightarrow L$ tem um adjunto à direita, α_U, dado por

$$\alpha_U(x) = \bigvee\{y \in L \mid st(y, U) \leq x\}.$$

Para cada pré-diâmetro d em L e cada $\epsilon > 0$, denotemos por U_ϵ^d o conjunto

$$\{x \in L \mid d(x) < \epsilon\}.$$

Um pré-diâmetro d em L diz-se *compatível* se

(D4) para cada $x \in L$ vale $x \leq \bigvee\{y \in L \mid y \overset{d}{\triangleleft} x\}$,

onde $y \overset{d}{\triangleleft} x$ significa que $st(y, U_\epsilon^d) \leq x$ para algum $\epsilon > 0$. É fácil deduzir que d é compatível se e só se, para cada $x \in L$, $x \leq \bigvee\{\alpha_{U_\epsilon^d}(x) \mid \epsilon > 0\}$. De aqui em diante, referenciaremos $\alpha_{U_\epsilon^d}$ simplesmente por α_ϵ^d.

Um *pré-diâmetro* $(\star)$ é um pré-diâmetro que satisfaz a condição

($\star$) se $S \subseteq L$ é *fortemente conexo* (i.e., $x \wedge y \neq 0$ para quaisquer $x, y \in S$) então

$$d(\bigvee S) \leq 2 \sup\{d(x) \mid x \in S\}.$$

Um pré-diâmetro chama-se *métrico* se

(M) para qualquer $\epsilon > 0$, sempre que $\alpha < d(x)$, existem $y, z \leq x$ tais que $d(y), d(z) < \epsilon$ e $\alpha < d(y \vee z)$.

A condição (M) implica ($\star$). Com efeito, (M) implica mesmo a propriedade

($\star'$) para cada $x \in L$ e para cada $S \subseteq L$ tais que $x \wedge y \neq 0$ para todo o $y \in S$

$$d(x \vee \bigvee S) \leq d(x) + \sup\{d(y) + d(z) \mid y, z \in S, y \neq z\},$$

que é uma condição mais forte que ($\star$).

Um pré-diâmetro que, adicionalmente, satisfaz

(D5) para cada $\epsilon > 0$, U_ϵ^d é uma cobertura de L,

é chamado um *diâmetro*. Os diâmetros são uma generalização natural da noção usual de diâmetro de subconjuntos de espaços métricos. Fazemos notar ainda que, quando d é um diâmetro compatível, a igualdade vale em (D4).

Caso L seja a topologia de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, os diâmetros métricos compatíveis d em L correspondem exactamente às metrizações ρ de $(X, \mathcal{T})$, pelas relações

$$d(U) = \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in U\}$$

e

$$\rho(x, y) = \inf\{d(U) \mid x, y \in U\}.$$

Um *reticulado local pré-diametral* é um par (L, d) formado por um reticulado local L e um pré-diâmetro compatível d em L. O par (L, d) é um *reticulado local diametral* ($\star$) se d é um diâmetro ($\star$) compatível. Um *reticulado local métrico* é um par (L, d), onde d é um diâmetro métrico compatível em L.

Dados dois reticulados locais pré-diametrais (L_1, d_1) e (L_2, d_2), um homomorfismo de reticulados locais $f : L_1 \longrightarrow L_2$ é chamado *uniforme* se, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$

tal que $U_\delta^{d_2} \leq f[U_\epsilon^{d_1}]$. Temos assim a categoria dos reticulados locais pré-diametrais. A categoria dos reticulados locais diametrais que satisfazem $(\star)$ e homomorfismos uniformes será denotada por $\star$-DFrm. A sua subcategoria plena dos reticulados locais métricos será denotada por MFrm.

A categoria $\star$-DFrm é epi-reflectiva na categoria dos reticulados locais pré-diametrais que satisfazem $(\star)$. A reflexão pode ser descrita do seguinte modo:

Seja (L, d) um reticulado local pré-diametral $(\star)$ e consideremos a relação R gerada por todos os pares $(\bigvee U_\epsilon^d, 1)$, para $\epsilon > 0$. Em L/R consideremos o diâmetro

$$\overline{d}(x) = \inf\{d(y) \mid x \leq \kappa(y)\}$$

induzido por d. A projecção $\kappa : (L, d) \longrightarrow (L/R, \overline{d})$ é o morfismo reflector.

Dado um diâmetro d em L satisfazendo $(\star)$, denotaremos por $\widetilde{d}$ o diâmetro métrico definido por

$$\widetilde{d}(x) = \inf_{\epsilon>0} \sup\{d(y \vee z) \mid y, z \leq x \text{ e } d(y), d(z) \leq \epsilon\},$$

que é o único diâmetro métrico compatível tal que $\frac{1}{2}d \leq \widetilde{d} \leq d$ ([67], Proposição 3.4). Além disso, $st(x, U_\epsilon^{\widetilde{d}}) = st(x, U_\epsilon^d)$, para quaisquer $x \in L$ e $\epsilon > 0$.

Seja d um diâmetro métrico compatível em L. Como $\epsilon \leq \delta$ implica $U_\epsilon^d \subseteq U_\delta^d$, as condições (D4) e (D5) dizem que $\{U_\epsilon^d \mid \epsilon > 0\}$ satisfaz os axiomas (U1) e (U3) da Definição I.2.1. Esta família é mesmo uma uniformidade pois $(U_\epsilon^d)^* \leq U_{3\epsilon}^d$. Reciprocamente, qualquer uniformidade com uma base numerável obtem-se desta maneira de um diâmetro métrico compatível e, portanto, um reticulado local possui um diâmetro métrico compatível se e só se possui uma uniformidade com uma base numerável.

Por fim, recordemos o seguinte processo de construir coprodutos binários de reticulados locais métricos [68]:

Sejam (L_1, d_1) e (L_2, d_2) dois reticulados locais métricos. No reticulado local $\mathcal{D}(L_1 \times L_2)$ dos conjuntos descendentes do produto cartesiano (com a ordem usual) $L_1 \times L_2$, consideremos a relação R' gerada por todos os pares

$$\left(\bigcup_{\epsilon>0} {\downarrow}(\alpha_\epsilon^{d_1}(x), \alpha_\epsilon^{d_2}(y)), {\downarrow}(x, y) \right),$$

$$\Big({\downarrow}(S_1 \times \{y\}), {\downarrow}(\bigvee S_1, y) \Big)$$

e

$$\Big(\downarrow(\{x\}\times S_2),\downarrow(x,\bigvee S_2)\Big),$$

com $x\in L_1$, $y\in L_2$, $S_1\subseteq L_1$ e $S_2\subseteq L_2$, e denotemos $\kappa(\downarrow(x,y))$, que coincide com $\downarrow(x,y)\cup \mathbb{0}_{L_1\times L_2}$, por $x\oplus y$.

Seja $L_1\oplus' L_2 := \mathcal{D}/R'$. Os elementos $x\oplus y$ geram, por supremos, $L_1\oplus' L_2$. Os morfismos $u'_{L_1} : L_1 \longrightarrow L_1\oplus' L_2$ e $u'_{L_2} : L_2 \longrightarrow L_1\oplus' L_2$ definidos por, respectivamente, $u'_{L_1}(x) = x\oplus 1$ e $u'_{L_2}(x) = 1\oplus x$ são homomorfismos de reticulados locais. A identidade

$$d'_{12}(X) = \inf\{\max(d_1(x), d_2(y)) \mid X\subseteq x\oplus y\}$$

define um pré-diâmetro $(\star)$ compatível em $L_1\oplus' L_2$. Então

$$(L_1,d_1)\xrightarrow{u'_{L_1}}(L_1\oplus' L_2, d'_{12})\xleftarrow{u'_{L_2}}(L_2,d_2)$$

é o coproduto de (L_1,d_1) e (L_2,d_2) na categoria dos reticulados locais pré-diametrais que satisfazem $(\star)$; quaisquer que sejam $f_{L_1} : (L_1,d_1)\longrightarrow (M,d)$, $f_{L_2} : (L_2,d_2)\longrightarrow (M,d)$ o único morfismo f de $(L_1\oplus' L_2, d'_{12})$ em (M,d) tal que $f\cdot u'_{L_1} = f_{L_1}$ e $f\cdot u'_{L_2} = f_{L_2}$ é dado por

$$f(x\oplus y) = \bigvee_{\epsilon>0}\Big(f_{L_1}(\alpha^{d_1}_{\epsilon}(x))\wedge f_{L_2}(\alpha^{d_2}_{\epsilon}(y))\Big).$$

Tomando a reflexão $(L_1\oplus L_2, d_{12})$ de $(L_1\oplus' L_2, d'_{12})$ em $\star$-DFrm e as extensões pelo morfismo reflector $u_{L_1} : (L_1,d_1)\longrightarrow (L_1\oplus L_2, d_{12})$ e $u_{L_2} : (L_2,d_2)\longrightarrow (L_1\oplus L_2, d_{12})$ de, respectivamente, u'_{L_1} e u'_{L_2}, obtemos o coproduto de (L_1,d_1) e (L_2,d_2) em $\star$-DFrm. Finalmente,

$$(L_1,d_1)\xrightarrow{u_{L_1}}\Big(L_1\oplus L_2, \widetilde{d_{12}}\Big)\xleftarrow{u_{L_2}}(L_2,d_2)$$

é o coproduto de (L_1,d_1) e (L_2,d_2) em MFrm.

3. Reticulados locais uniformes no sentido de Bourbaki

Lema 3.1. *Sejam d_1 e d_2 dois diâmetros $(\star)$ num reticulado local L. Então*

$$\begin{array}{rcl} d_1\vee d_2 : L & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ x & \longmapsto & \max(d_1(x), d_2(x)) \end{array}$$

é um diâmetro $(\star)$.

Demonstração. As condições (D1), (D2), (D3) e a condição ($\star$) são trivialmente satisfeitas. Para verificar a condição (D5) basta observar que, para qualquer $\epsilon > 0$, $U_\epsilon^{d_1 \vee d_2} = U_\epsilon^{d_1} \cap U_\epsilon^{d_2} = U_\epsilon^{d_1} \wedge U_\epsilon^{d_2}$. ∎

É importante prevenir que $d = d_1 \vee d_2$ não é necessariamente métrico, mesmo que d_1 e d_2 o sejam. No entanto, podemos sempre considerar o diâmetro métrico $\widetilde{d}$ a ele associado, que denotaremos por $d_1 \sqcup d_2$.

Definição 3.2. Dizemos que uma família não vazia $\mathcal{G}$ de diâmetros métricos em L é uma *estrutura de medida* se satisfaz as seguintes condições:

(UP1) quaisquer que sejam $d_1, d_2 \in \mathcal{G}$, $d_1 \sqcup d_2 \in \mathcal{G}$;

(UP2) se d é um diâmetro métrico e

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \exists d' \in \mathcal{G} : U_\delta^{d'} \subseteq U_\epsilon^d,$$

então $d \in \mathcal{G}$;

(UP3) para cada $x \in L$ vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{G}}{\lhd} x\}$, onde $y \overset{\mathcal{G}}{\lhd} x$ significa que existem $d \in \mathcal{G}$ e $\epsilon > 0$ tais que $st(y, U_\epsilon^d) \leq x$.

Proposição 3.3. *Seja $\mathcal{U}$ uma uniformidade em L. A família $\psi(\mathcal{U}) := \{d_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ de todos os diâmetros métricos tais que, para cada $\alpha \in \Lambda$ e para cada $\epsilon > 0$ $U_\epsilon^{d_\alpha} \in \mathcal{U}$, é uma estrutura de medida em L.*

Demonstração. (UP1) Sejam $\alpha, \beta \in \Lambda$ e $\epsilon > 0$. Como $U_\epsilon^{d_\alpha} \wedge U_\epsilon^{d_\beta} \leq U_\epsilon^{d_\alpha \sqcup d_\beta}$, $U_\epsilon^{d_\alpha \sqcup d_\beta} \in \mathcal{U}$. Então $d_\alpha \sqcup d_\beta \in \psi(\mathcal{U})$.

(UP2) Suponhamos que d é um diâmetro métrico tal que

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \exists d_\alpha \in \psi(\mathcal{U}) : U_\delta^{d_\alpha} \subseteq U_\epsilon^d.$$

Então, $U_\epsilon^d \in \mathcal{U}$ para qualquer $\epsilon > 0$, i.e., $d \in \psi(\mathcal{U})$.

(UP3) Seja $x \in L$. Por hipótese, $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x\}$. Por isso, basta provar que $y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x$ implica $y \overset{\psi(\mathcal{U})}{\lhd} x$. Então, consideremos $U \in \mathcal{U}$ tal que $st(y, U) \leq x$ e tomemos, indutivamente, $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ em $\mathcal{U}$ tais que $U_1 = U$ e $U_{n+1}^* \leq U_n$. A família

$\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ gera uma uniformidade com uma base numerável. Então, de acordo com o Teorema 4.6 de [64], existe um diâmetro métrico d em $\psi(\mathcal{U})$ tal que $U^d_\epsilon \subseteq U$ para algum $\epsilon > 0$ e, portanto, $st(y, U^d_\epsilon) \leq st(y, U) \leq x$. ■

Notemos que o recíproco

$$y \overset{\psi(\mathcal{U})}{\lhd} x \text{ implica } y \overset{\mathcal{U}}{\lhd} x$$

é claramente verdadeiro.

Proposição 3.4. *Seja $\mathcal{G}$ uma estrutura de medida em L. A família*

$$\mathcal{B}_\mathcal{G} := \{U^d_\epsilon \mid d \in \mathcal{G}, \epsilon > 0\}$$

é uma base de uma uniformidade $\phi(\mathcal{G})$ on L.

Demonstração. (U1) Para $\epsilon, \delta > 0$ e $d_1, d_2 \in \mathcal{G}$ seja $\gamma = \min(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\delta}{2})$. Imediatamente,

$$U^{d_1 \sqcup d_2}_\gamma \subseteq U^{d_1}_\epsilon \cap U^{d_2}_\delta = U^{d_1}_\epsilon \wedge U^{d_2}_\delta$$

e $U^{d_1 \sqcup d_2}_\gamma \in \mathcal{B}_\mathcal{G}$ logo $U^{d_1}_\epsilon \wedge U^{d_2}_\delta \in \phi(\mathcal{G})$.

(U2) Provemos que, para quaisquer $d \in \mathcal{G}$ e $\epsilon > 0$, $\left(U^d_{\frac{\epsilon}{3}}\right)^* \leq U^d_\epsilon$. Para isso, consideremos $x \in U^d_{\frac{\epsilon}{3}}$ e escolhamos $y_0 \in U^d_{\frac{\epsilon}{3}}$ tal que $y_0 \wedge x \neq 0$. O conjunto

$$S = \{y \vee y_0 \mid y \in U^d_{\frac{\epsilon}{3}}, y \wedge x \neq 0\}$$

é fortemente conexo e $st(x, U^d_{\frac{\epsilon}{3}}) = \bigvee S$. Então

$$d(st(x, U^d_{\frac{\epsilon}{3}})) \leq 2 \sup\{d(x) \mid x \in S\} < \epsilon,$$

pelo que $st(x, U^d_{\frac{\epsilon}{3}}) \in U^d_\epsilon$.

(U3) É óbvio, pois $x \overset{\mathcal{G}}{\lhd} y$ se e só se $x \overset{\phi(\mathcal{G})}{\lhd} y$. ■

Por outras palavras,

$$\phi(\mathcal{G}) = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \exists d \in \mathcal{G} \ \exists \epsilon > 0 \ : \ U^d_\epsilon \leq U\}$$

é uma uniformidade em L.

Teorema 3.5. *Existe uma correspondência bijectiva entre o conjunto das uniformidades em L e o conjunto das estruturas de medida em L.*

Demonstração. Vejamos em primeiro lugar que, para cada estrutura de medida $\mathcal{G}$, $\psi\phi(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$. Se $d \in \psi\phi(\mathcal{G})$ então $U_\epsilon^d \in \phi(\mathcal{G})$, para qualquer $\epsilon > 0$, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $d' \in \mathcal{G}$ tais que $U_\delta^{d'} \subseteq U_\epsilon^d$. Então $d \in \mathcal{G}$. A inclusão $\mathcal{G} \subseteq \psi\phi(\mathcal{G})$ é trivial.

Por outro lado, para cada uniformidade $\mathcal{U}$, a inclusão $\phi\psi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ é óbvia. A inclusão contrária é uma consequência do Teorema 4.6 de [64]: dado $U \in \mathcal{U}$, tomemos indutivamente

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

em $\mathcal{U}$ tais que $U_1 = U$ e $U_{n+1}^* \leq U_n$ e, de acordo com o Teorema 4.6 de [64], o diâmetro métrico d em $\psi(\mathcal{U})$ tal que $U_\epsilon^d \subseteq U$ para algum $\epsilon > 0$. Então $U \in \phi\psi(\mathcal{U})$. ■

Em conclusão, podemos considerar as estruturas de medida como uniformidades. Designando os pares $(L, \mathcal{G})$ formados por um reticulado local L e uma estrutura de medida $\mathcal{G}$ em L por *reticulados locais de medida*, temos uma bijecção entre reticulados locais uniformes e reticulados locais de medida. Relativamente a esta bijecção, os homomorfismos uniformes correspondem precisamente aos *homomorfismos de medida*, isto é, aos homomorfismos de reticulados locais $f : L \longrightarrow L'$ entre reticulados locais de medida $(L, \mathcal{G})$ e $(L', \mathcal{G}')$ tais que, para cada $\epsilon > 0$ e $d \in \mathcal{G}$, existem $\delta > 0$ e $d' \in \mathcal{G}'$ satisfazendo $U_\delta^{d'} \leq f[U_\epsilon^d]$. A categoria dos reticulados locais de medida e homomorfismos de medida é portanto isomorfa a Unif.

As estruturas de medida clarificam a natureza da generalização dos reticulados locais métricos a reticulados locais uniformes: um reticulado local métrico é um reticulado local com uma uniformidade (estrutura de medida) gerada por um só diâmetro.

É importante registar, por razões de aplicação posterior, o seguinte facto óbvio:

Observação 3.6. Qualquer que seja o reticulado local de medida $(L, \mathcal{G})$, $(L, \bigsqcup_{d \in \mathcal{G}} d)$ é um reticulado local métrico.

4. Aplicação: UFrm admite uma imersão plena num completamento final de MFrm

Vamos agora descrever um completamento final universal de MFrm que contém uma cópia isomorfa de UFrm.

Com o intuito de tornar este trabalho o mais autocontido possível, começamos por fazer uma breve digressão sobre as noções e resultados que nos são necessários para o estudo pretendido.

Seja $(\mathcal{A}, |\cdot| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X})$ uma categoria concreta sobre a categoria de base $\mathcal{X}$. Uma cofonte $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ em $\mathcal{A}$ diz-se *final* se cada morfismo $f : |A| \longrightarrow |B|$ de $\mathcal{X}$ é um morfismo de $\mathcal{A}$ sempre que cada composição $f \cdot |f_i| : |A_i| \longrightarrow |B|$ é um morfismo de $\mathcal{A}$. Um morfismo de $\mathcal{A}$ é *final* se, como cofonte, for final.

Dada uma família Δ de cofontes na categoria de base $\mathcal{X}$, designaremos por Δ-*cofontes finais* as cofontes finais $(f_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{A}$ tais que $(|f_i|)_{i \in I} \in \Delta$.

Definições 4.1. (1) (Herrlich [35]) Diz-se que uma categoria $\mathcal{A}$ concreta sobre $\mathcal{X}$ é *completa relativamente a cofontes finais* se, qualquer que seja a família $(A_i)_{i \in I}$ de objectos de $\mathcal{A}$ indexada por uma classe I, e qualquer que seja a cofonte $(|A_i| \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ em $\mathcal{X}$, existe uma cofonte final $(A_i \xrightarrow{g_i} A)_{i \in I}$ em $\mathcal{A}$ com $|A| = X$ e $|g_i| = f_i$ para todo o $i \in I$.

Uma categoria $\mathcal{A}^-$ concreta sobre $\mathcal{X}$ diz-se um *completamento final* de $\mathcal{A}$ se for completa relativamente a cofontes finais e existir uma imersão plena concreta $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^-$. Se, além disso,

(a) *$\mathcal{A}$ é fechada para cofontes finais em $\mathcal{A}^-$*, ou seja, para cada cofonte final $(A_i \xrightarrow{g_i} A)_{i \in I}$ em $\mathcal{A}^-$, A pertence a $\mathcal{A}$ sempre que A_i pertence a $\mathcal{A}$ para todo o $i \in I$, e

(b) para cada categoria completa relativamente a cofontes finais $\mathcal{B}$ e cada functor concreto $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ que preserva cofontes finais, existir um único functor (a menos de isomorfismo natural) $F^- : \mathcal{A}^- \longrightarrow \mathcal{B}$ que preserva cofontes finais,

$\mathcal{A}^-$ é chamada um *completamento final universal* de $\mathcal{A}$.

(2) (Ehresmann [21]) Mais geralmente, dada uma família Δ de cofontes na categoria de base $\mathcal{X}$, um completamento final $\mathcal{A}^-$ de $\mathcal{A}$ diz-se um *completamento final* Δ-*universal* de $\mathcal{A}$ desde que:

(a) $\mathcal{A}$ seja fechada para Δ-cofontes finais em $\mathcal{A}^-$;

(b) para cada categoria completa relativamente a cofontes finais $\mathcal{B}$ e cada functor concreto $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ que preserve Δ-cofontes finais, exista um functor $F^- : \mathcal{A}^- \longrightarrow \mathcal{B}$, único a menos de isomorfismo natural, que preserve Δ-cofontes finais.

Definições 4.2. (Ehresmann [21]) Seja Δ uma família de cofontes na categoria de base $\mathcal{X}$.

(1) Uma cofonte $\sigma = (|A_i| \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ em $\mathcal{X}$ diz-se Δ-*completa* se:

(a) para todo o morfismo $f : A \longrightarrow A_i$ de $\mathcal{A}$, os morfismos $|A| \xrightarrow{|f|} |A_i| \xrightarrow{f_i} X$ pertencem a σ;

(b) quaisquer que sejam o morfismo $f : |B| \longrightarrow X$ de $\mathcal{X}$ e a Δ-cofonte final $(B_j \xrightarrow{g_j} B)_{j \in J}$ tais que os morfismos $|B_j| \xrightarrow{|g_j|} |B| \xrightarrow{f} X$ pertencem a σ, o morfismo f pertence a σ.

(2) Um *homomorfismo de cofontes* Δ-*completas de* $\mathcal{X}$

$$f : (|A_i| \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I} \longrightarrow (|B_j| \xrightarrow{g_j} Y)_{j \in J}$$

é um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{X}$ tal que, para todo o $i \in I$, $f \cdot f_i \in (g_j)_{j \in J}$.

No Teorema 4 de [21] afirma-se que os conglomerados das cofontes Δ-completas de $\mathcal{X}$ e dos homomorfismos de cofontes Δ-completas de $\mathcal{X}$ formam uma categoria legítima, que denotaremos por Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$, e prova-se que esta categoria é um completamento final Δ-universal de $\mathcal{A}$. No entanto, Adámek e Reiterman em [2] provam que Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ nem sempre é uma categoria legítima e apresentam condições suficientes para que Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ seja de facto uma categoria. É claro que nestas condições Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ é também uma categoria concreta sobre $\mathcal{X}$.

Recorde de [2] que, supondo que $\mathcal{X}$ tem um sistema de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, $\mathcal{A}$ se diz *co-hereditária* caso todo o morfismo $e : |A| \longrightarrow X$ de $\mathcal{E}$ seja um morfismo final de $\mathcal{A}$.

Teorema 4.3. (Adámek e Reiterman [2]) *Seja $\mathcal{X}$ uma categoria com um sistema de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, bem-potenciada relativamente a $\mathcal{M}$, e seja Δ uma família de cofontes contendo todos os morfismos de $\mathcal{E}$ (considerados como cofontes). Então, para toda a categoria $\mathcal{A}$ concreta sobre $\mathcal{X}$ co-hereditária e com fibras pequenas, Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ é uma categoria.* ■

Observação 4.4. A demonstração do Teorema 4.3 baseia-se no seguinte facto, que é uma consequência da co-hereditariedade de $\mathcal{A}$ e da inclusão $\mathcal{E} \subseteq \Delta$:

Sejam $\sigma = (|A_i| \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ uma cofonte Δ-completa de $\mathcal{X}$ e $m_i \cdot e_i$ a $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorização de f_i. A cofonte σ é precisamente a cofonte de todas as composições de morfismos de $\mathcal{A}$ com morfismos de $(m_i)_{i \in I}$.

Portanto, nas condições do Teorema 4.3, a prova apresentada em [21] de que Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ é o completamento final Δ-universal é válida.

Teorema 4.5. (Ehresmann [21], Adámek e Reiterman [2]) *Seja $\mathcal{X}$ uma categoria com um sistema de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, bem-potenciada relativamente a $\mathcal{M}$, e seja Δ uma família de cofontes contendo todos os morfismos de $\mathcal{E}$ (considerados como cofontes). Então toda a categoria $\mathcal{A}$ concreta sobre $\mathcal{X}$ co-hereditária e com fibras pequenas tem um completamento final Δ-universal com fibras pequenas, que é precisamente a categoria Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$.* ■

A categoria MFrm dos reticulados locais métricos é concreta sobre Frm e, uma vez que Frm é uma categoria algébrica, a classe $\mathcal{R}eg\mathcal{E}pi$ dos epimorfismos regulares (i.e., morfismos sobrejectivos) e a classe $\mathcal{M}ono$ dos monomorfismos (i.e., morfismos injectivos) formam um sistema de factorização $(\mathcal{R}eg\mathcal{E}pi, \mathcal{M}ono)$ (v. p. ex. [43]). Claramente, Frm é uma categoria bem-potenciada relativamente a $\mathcal{M}ono$. Por outro lado, MFrm tem fibras pequenas e é co-hereditária: qualquer diâmetro métrico compatível d em L induz num quociente M de L (i.e., num homomorfismo sobrejectivo $e : L \longrightarrow M$) um diâmetro métrico compatível $\overline{d}$ (cf. Proposições 2.11 e 2.12 de [68]); a prova de que $e : (L, d) \longrightarrow (M, \overline{d})$ é um morfismo final de MFrm é imediata.

Portanto, podemos aplicar o Teorema 4.5 a MFrm e concluir que, para qualquer Δ contendo os epimorfismos regulares, o completamento final Δ-universal de MFrm é a categoria Δ-$\mathcal{CS}(\mathsf{MFrm}, \mathsf{Frm})$. O nosso objectivo é provar que, sendo Δ a classe das epi-cofontes finitas, esta categoria contém uma cópia isomorfa da categoria UFrm dos reticulados locais uniformes.

Começamos por apresentar uma outra descrição da categoria Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ do Teorema 4.3.

Proposição 4.6. *Nas condições do Teorema 4.3, existe uma correspondência bijectiva entre a fibra de X em Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$, para todo o objecto X de $\mathcal{X}$, e a classe de todas as cofontes $\sigma = (|A_i| \xrightarrow{m_i} X)_{i \in I}$ tais que:*

(S1) *$m_i \in \mathcal{M}$, para todo o $i \in I$;*

(S2) *um morfismo $Y \xrightarrow{m} X$ de $\mathcal{M}$ pertence a σ sempre que existem $i \in I$ e $g \in \mathcal{A}$ tais que $m = m_i \cdot |g|$;*

(S3) *para cada Δ-cofonte final $(A_i \xrightarrow{f_i} B)_{i \in I}$ e cada $f : |B| \longrightarrow X$ tais que o morfismo de $\mathcal{M}$ da $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorização de $f \cdot |f_i|$ pertence a σ, o morfismo de $\mathcal{M}$ da $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorização de f pertence a σ.*

Demonstração. Dada $\sigma = (|A_i| \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ em Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ consideremos $\sigma' = (|A_i'| \xrightarrow{m_i} X)_{i \in I}$, onde m_i é o morfismo em $\mathcal{M}$ da $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorização $m_i \cdot e_i$ de f_i. Atendendo à Observação 4.4, σ' satisfaz as condições (S2) e (S3).

Reciprocamente, se $\sigma' = (|A_i'| \xrightarrow{m_i} X)_{i \in I}$ satisfizer (S1), (S2) e (S3), tomamos a cofonte σ de todas as composições de morfismos de $\mathcal{A}$ com os morfismos de σ'. Esta cofonte σ é uma cofonte Δ-completa; com efeito:

(a) Consideremos um morfismo $f : A \longrightarrow A_i$ de $\mathcal{A}$. Se $f_i : |A_i| \longrightarrow X$ pertence a σ podemos escrever $f_i = m_i \cdot |t_i|$, onde $m_i \in \sigma'$ e $t_i \in \mathcal{A}$. Denotando por $m_i' \cdot e_i'$ a $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorização de $f_i \cdot |f|$, existe um e um só morfismo g tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
{|A|} \arrow[rr, "{|f|}"] \arrow[dd, "e'_i"'] & & {|A_i|} \arrow[dl, "{|t_i|}"'] \arrow[dd, "f_i"] \\
& {|A'_i|} \arrow[dr, "m_i"'] & \\
{|A'|} \arrow[ur, dashed, "g"'] \arrow[rr, "m'_i"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Como $t_i \cdot f \in \mathcal{A}$ e e'_i é final, $g \in \mathcal{A}$. Então, por (S2), $m'_i \in \sigma'$, logo $f_i \cdot |f| \in \sigma$.

(b) Para cada morfismo $f : |B| \longrightarrow X$ de $\mathcal{X}$ e para cada Δ-cofonte final $(B_j \xrightarrow{g_j} B)_{j \in J}$ tais que, para qualquer $j \in J$, $f \cdot |g_j| \in \sigma$ (isto é, para qualquer $j \in J$, $f \cdot |g_j| = m_j \cdot |t_j|$ para algum $m_j \in \sigma'$ e para algum $t_j \in \mathcal{A}$), se $m \cdot e$ for a $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorização de f então, aplicando (S3), $m \in \sigma'$ logo $f \in \sigma$.

Da Observação 4.4 resulta que estas duas correspondências são mutuamente inversas. ■

As cofontes definidas na proposição precedente serão referenciadas, daqui em diante, por *cofontes* $\mathcal{M}$-Δ-*completas.*

A proposição que se segue caracteriza os morfismos de Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ em termos de cofontes $\mathcal{M}$-Δ-completas e tem demonstração óbvia:

Proposição 4.7. *Sejam* $\sigma_1 = (|A_i| \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$ *e* $\sigma_2 = (|B_j| \xrightarrow{g_j} Y)_{j \in J}$ *duas cofontes* Δ-*completas e sejam* $\sigma'_1 = (|A'_i| \xrightarrow{m_i} X)_{i \in I}$ *e* $\sigma'_2 = (|B'_j| \xrightarrow{u_j} Y)_{j \in J}$ *as correspondentes cofontes* $\mathcal{M}$-Δ-*completas. Um morfismo* $f : X \longrightarrow Y$ *de* $\mathcal{X}$ *é um morfismo de* Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ *se e só se o morfismo em* $\mathcal{M}$ *da* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-*factorização de* $f \cdot m_i$ *pertence a* σ'_2, *para todo o* $i \in I$. ■

Concluindo:

Proposição 4.8. *A categoria* Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ *é isomorfa à categoria* $\mathcal{M}$-Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ *das cofontes* $\mathcal{M}$-Δ-*completas e dos morfismos definidos na Proposição 4.7.* ■

Em seguida descrevemos um processo de introduzir em qualquer reticulado local L uma estrutura de medida a partir de uma cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa.

Proposição 4.9. *Seja M um sub-reticulado local de L. Se d é um diâmetro $(\star)$ em M então a relação*

$$\overset{\circ}{d}(x) = \inf\{d(y) \mid y \in M, x \leq y\}$$

define um diâmetro $(\star)$ em L.

Demonstração. A prova de que $\overset{\circ}{d}$ é um diâmetro é imediata. Verifiquemos a propriedade $(\star)$. Seja S um subconjunto fortemente conexo de L. Para cada $\epsilon > 0$ e $s \in S$ existe $y_s \in M$ que satisfaz as condições $d(y_s) < \overset{\circ}{d}(s) + \epsilon$ e $s \leq y_s$. Claramente $S_M := \{y_s \mid s \in S\}$ é fortemente conexo pelo que

$$\overset{\circ}{d}(\bigvee S) \leq d(\bigvee S_M) \leq 2\sup\{d(y_s) \mid s \in S\} < 2\sup\{\overset{\circ}{d}(s) \mid s \in S\} + \epsilon.$$

Portanto, $\overset{\circ}{d}(\bigvee S) \leq 2\sup\{\overset{\circ}{d}(s) \mid s \in S\}$. ■

Contudo $\overset{\circ}{d}$ não é necessariamente métrico, mesmo que d o seja.

Observação 4.10. Como anteriormente, existe um (e um só) diâmetro métrico $\tilde{d}$ em L tal que $\frac{1}{2}\overset{\circ}{d} \leq \tilde{d} \leq \overset{\circ}{d}$ e $st(x, U_\epsilon^{\tilde{d}}) = st(x, U_\epsilon^{\overset{\circ}{d}})$ quaisquer que sejam $x \in L$ e $\epsilon > 0$.

Dado um diâmetro d em L, denotemos o sub-reticulado local

$$\Big\{x \in L \mid x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{d}{\lhd} x\}\Big\}$$

de L por L_d. Note-se que, para cada $x \in L$, $\bigvee\{y \in L \mid y \overset{d}{\lhd} x\} \in L_d$. De facto, denotando $\bigvee\{y \in L \mid y \overset{d}{\lhd} x\}$ por x_d temos $x_d = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{d}{\lhd} x_d\}$ pois se $y \overset{d}{\lhd} x$, isto é, se existe $\epsilon > 0$ com $st(y, U_\epsilon^d) \leq x$ então

$$st\Big(st(y, U_{\frac{\epsilon}{2}}^d), U_{\frac{\epsilon}{2}}^d\Big) \leq st(y, U_\epsilon^d) \leq x,$$

ou seja, $st(y, U_{\frac{\epsilon}{2}}^d) \overset{d}{\lhd} x$ e, portanto, $st(y, U_{\frac{\epsilon}{2}}^d) \leq x_d$.

Daqui resulta que podemos considerar a aplicação $f_d : L \longrightarrow L_d$ dada por $f_d(x) = x_d$, que é um homomorfismo sobrejectivo de reticulados locais. Pelas Proposições 2.9 e 2.11 de [68], se d é um diâmetro métrico em L,

$$\overline{d}(x) = \inf\{d(y) \mid x \leq f_d(y)\}$$

define um diâmetro métrico em L_d. É importante notar que $\overline{d}$ é a restrição de d a L_d. Além disso, temos:

Proposição 4.11. *Seja d um diâmetro métrico em L. Então $(L_d, \overline{d})$ é um reticulado local métrico.*

Demonstração. Falta somente verificar a compatibilidade de $\overline{d}$. Seja $x \in L_d$. Então vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{d}{\lhd} x\}$. Como $x = f_d(x)$, temos

$$x = \bigvee\{f_d(y) \mid y \in L, y \overset{d}{\lhd} x\} \leq \bigvee\{f_d(y) \mid y \in L, f_d(y) \overset{d}{\lhd} x\} = \bigvee\{z \in L_d \mid z \overset{d}{\lhd} x\}.$$

Mas, para cada $z \in L_d$ e $\epsilon > 0$, $st(z, U_\epsilon^{\overline{d}}) \leq st(z, U_\epsilon^d)$ logo

$$z \overset{d}{\lhd} x \text{ implica } z \overset{\overline{d}}{\lhd} x$$

e, consequentemente, $x \leq \bigvee\{z \in L_d \mid z \overset{\overline{d}}{\lhd} x\} \leq x$. ■

Corolário 4.12. *Seja d um diâmetro métrico em L. Então:*

(a) *para cada $x \in L$ e $\epsilon > 0$, existe $y \in L_d$ tal que $x \leq y$ e $d(y) < d(x) + \epsilon$.*

(b) $\overset{\circ}{\overline{d}} = d$.

Demonstração.

(a) Para cada $x \in L$ e $\epsilon > 0$, como $\overline{d}$ é um diâmetro em L_d, temos

$$\begin{aligned} x &= x \wedge \bigvee\{a \in L_d \mid \overline{d}(a) < \frac{\epsilon}{2}\} \\ &= \bigvee\{x \wedge a \mid a \in L_d, x \wedge a \neq 0, \overline{d}(a) < \frac{\epsilon}{2}\} \\ &\leq \bigvee\{a \in L_d \mid x \wedge a \neq 0, \overline{d}(a) < \frac{\epsilon}{2}\}. \end{aligned}$$

Daqui resulta que

$$\bigvee\{a \in L_d \mid x \wedge a \neq 0, \overline{d}(a) < \frac{\epsilon}{2}\} \in L_d$$

é o elemento y que procurávamos. Com efeito, aplicando a propriedade $(\star')$, $d(y) = d(x \vee y) \leq d(x) + \sup\{d(a_1) + d(a_2) \mid a_1, a_2 \in L_d, a_1 \neq a_2, a_1 \wedge x \neq 0, a_2 \wedge x \neq 0, \overline{d}(a_1), \overline{d}(a_2) < \frac{\epsilon}{2}\} < d(x) + \epsilon$.

(b) Qualquer que seja $x \in L$,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\overline{d}}(x) &= \inf\{\overline{d}(y) \mid y \in L_d, x \leq y\} \\ &= \inf\{d(y) \mid y \in L_d, x \leq y\}, \end{aligned}$$

logo $\overset{\circ}{\overline{d}}(x) \geq d(x)$. A igualdade é agora consequência imediata de (a). ■

Podemos também concluir de (a) que a relação $\overset{\overline{d}}{\lhd}$ é a restrição de $\overset{d}{\lhd}$ a L_d.

Corolário 4.13. *Seja $\mathcal{G}$ uma estrutura de medida em L. Para cada $d \in \mathcal{G}$, a inclusão $(L_d, \overline{d}) \hookrightarrow (L, \bigsqcup_{d\in\mathcal{G}} d)$ é um homomorfismo uniforme de reticulados locais métricos.*

Demonstração. Provemos que, para $\epsilon > 0$ e $d \in \mathcal{G}$,

$$U_{\frac{\epsilon}{4}}^{\bigsqcup_{d\in\mathcal{G}} d} \leq U_{\epsilon}^{\overline{d}}.$$

Assim, suponhamos que $x \in L$ é tal que $(\bigsqcup_{d\in\mathcal{G}} d)(x) < \frac{\epsilon}{4}$. Então $d(x) < \frac{\epsilon}{2}$, o que implica, por via do Corolário 4.12 (a), a existência de $y \in L_d$ satisfazendo $\overline{d}(y) = d(y) < d(x) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ e tal que $x \leq y$. Por isso $x \leq y \in U_{\epsilon}^{\overline{d}}$. ■

Seja M um sub-reticulado local de L. Para cada diâmetro métrico d em M é óbvio que $\overline{\overset{\circ}{d}} = d$. Adicionalmente:

Proposição 4.14. *Seja M um sub-reticulado local de L. Para cada diâmetro métrico compatível d em M, $L_{\tilde{d}} = M$.*

Demonstração. Consideremos $x \in L_{\tilde{d}}$. Comecemos por provar que, para cada $y \in L$ tal que $y \overset{\tilde{d}}{\lhd} x$, existe $z \in M$ tal que

$$y \leq z \overset{\tilde{d}}{\lhd} x :$$

Por hipótese, existe $\epsilon > 0$ para o qual $st(y, U_{\epsilon}^{\tilde{d}}) \leq x$. Igualmente

$$y = y \wedge \bigvee\{z' \in M \mid d(z') < \frac{\epsilon}{2}\} \leq \bigvee\{z' \in M \mid z' \wedge y \neq 0, d(z') < \frac{\epsilon}{2}\} \in M.$$

Ponhamos $z := \bigvee\{z' \in M \mid z' \wedge y \neq 0, d(z') \leq \frac{\epsilon}{2}\}$. Então $st(z, U^{\tilde{d}}_{\frac{\epsilon}{2}}) \leq st(y, U^{\tilde{d}}_{\epsilon})$; com efeito, considerando $w \in L$ com $w \wedge z \neq 0$ e $\tilde{d}(w) < \frac{\epsilon}{2}$, existe $z' \in M$ tal que $z' \wedge w \neq 0$, $z' \wedge y \neq 0$ e $d(z') < \frac{\epsilon}{2}$. Então $w \leq z' \vee w$, $(z' \vee w) \wedge y \neq 0$ e

$$\tilde{d}(z' \vee w) \leq \tilde{d}(z') + \tilde{d}(w) = d(z') + \tilde{d}(w) < \epsilon.$$

Em resumo, $st(z, U^{\tilde{d}}_{\frac{\epsilon}{2}}) \leq st(y, U^{\tilde{d}}_{\epsilon}) \leq x$, i.e.,

$$y \leq z \overset{\tilde{d}}{\lhd} x.$$

Agora, a prova da inclusão $L_{\tilde{d}} \subseteq M$ é imediata; para cada $x \in L_{\tilde{d}}$,

$$x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\tilde{d}}{\lhd} x\} = \bigvee\{z \in M \mid z \overset{\tilde{d}}{\lhd} x\} \in M.$$

Para provar a inclusão contrária $M \subseteq L_{\tilde{d}}$, é suficiente verificar que, para $x, y \in M$,

$$y \overset{d}{\lhd} x \text{ implica } y \overset{\tilde{d}}{\lhd} x,$$

pois $x = \bigvee\{y \in M \mid y \overset{d}{\lhd} x\}$ para todo o $x \in M$. Então, suponhamos que $st(y, U^d_\epsilon) \leq x$ para algum $\epsilon > 0$. Nesse caso $st(y, U^{\tilde{d}}_{\frac{\epsilon}{4}}) \leq x$ porque $st(y, U^{\tilde{d}}_{\frac{\epsilon}{4}}) \leq st(y, U^d_\epsilon)$: qualquer que seja $z \in L$ tal que $z \wedge y \neq 0$ e $\tilde{d}(z) < \frac{\epsilon}{4}$ existe, atendendo ao Corolário 4.12 (a), $w \in L_{\tilde{d}}$ tal que $z \leq w$ e $\tilde{d}(w) < \tilde{d}(z) + \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2}$. Já vimos que $L_{\tilde{d}} \subseteq M$ pelo que $w \in M$. Por outro lado, $w \wedge y \neq 0$ e $\frac{1}{2}d(w) = \frac{1}{2}\overset{\circ}{d}(w) \leq \tilde{d}(w) < \frac{\epsilon}{2}$, i.e., $w \leq st(y, U^d_\epsilon)$. ∎

Fazemos notar que da Observação 4.10 decorre que $L_{\overset{\circ}{d}} = L_{\tilde{d}}$.

Dizemos que uma cofonte

$$(|(M_i, d_i)| \xrightarrow{m_i} L)_{i \in I}$$

em $\mathcal{M}ono$-Δ-$\mathcal{CS}(\mathsf{MFrm}, \mathsf{Frm})$ é de *medida fraca* se L é gerado por $\bigcup_{i \in I} m_i(M_i)$. Denotamos por d_i o diâmetro métrico compatível em $m_i(M_i)$ – que é um sub-reticulado local de L isomorfo a M_i – induzido por d_i. Segundo a Proposição 4.14, $L_{\overset{\sim}{d_i}} = m_i(M_i) \cong M_i$.

Lema 4.15. *Seja* $\sigma = (|(M_i, d_i)| \xrightarrow{m_i} L)_{i \in I} \in \mathcal{M}ono$-$\Delta$-$\mathcal{CS}(\mathsf{MFrm}, \mathsf{Frm})$. *Para cada* $i, j \in I$ *existe* $k \in I$ *tal que*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ U^{\overset{\sim}{d_k}}_{\delta} \subseteq U^{\overset{\sim}{d_i} \sqcup \overset{\sim}{d_j}}_{\epsilon}.$$

Demonstração. Denotemos $\widetilde{d_i} \sqcup \widetilde{d_j}$ por d. Vejamos, em primeiro lugar, que para cada $x \in m_i(M_i)$, $st(x, U_\epsilon^d) \leq st(x, U_{4\epsilon}^{d_i})$:

Qualquer que seja $y \in L$ tal que $y \wedge x \neq 0$ e $d(y) < \epsilon$, temos $\frac{1}{2}(\widetilde{d_i} \vee \widetilde{d_j})(y) < \epsilon$ o que implica $\widetilde{d_i}(y) < 2\epsilon$ e $\mathring{d_i} < 4\epsilon$. Isto significa que existe $z \in m_i(M_i)$ com $y \leq z$ e $d_i(z) < 4\epsilon$.

Daquela desigualdade decorre que, para $x, y \in m_i(M_i)$, $y \overset{d_i}{\lhd} x$ implica $y \overset{d}{\lhd} x$ e, consequentemente, que $m_i(M_i) \subseteq L_d$. Analogamente $m_j(M_j) \subseteq L_d$. É agora claro que $(M_i, d_i) \xrightarrow{m_i} (L_d, \overline{d})$ e $(M_j, d_j) \xrightarrow{m_j} (L_d, \overline{d})$ são homomorfismos de reticulados locais uniformes. Consideremos o coproduto

$$(M_i, d_i) \xrightarrow{u_i} (M_i \oplus M_j, \widetilde{d_{ij}}) \xleftarrow{u_j} (M_j, d_j)$$

de (M_i, d_i) e (M_j, d_j), em MFrm. Então existe um e um só homomorfismo de reticulados locais uniformes f que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M_i, d_i) \arrow[r, "u_i"] \arrow[dr, "m_i"'] & (M_i \oplus M_j, \widetilde{d_{ij}}) \arrow[d, dashed, "f"] & (M_j, d_j) \arrow[l, "u_j"'] \arrow[dl, "m_j"] \\
& (L_d, \overline{d}) &
\end{tikzcd}$$

comutativo.

Por fim consideramos a $(RegEpi, Mono)$-factorização

$$\begin{tikzcd}
(M_i \oplus M_j, \widetilde{d_{ij}}) \arrow[r, "e"] & (M, d_M) \arrow[r, "u"] & (L_d, \overline{d})
\end{tikzcd}$$

de f em MFrm([68], Proposição 4.10) Como (u_i, u_j) é uma epi-cofonte finita final (cf. Secção 10 de [1]), podemos concluir da condição (S3) que o morfismo de reticulados locais

$$m : |(M, d_M)| \xrightarrow{u} |(L_d, \overline{d})| \hookrightarrow L$$

pertence a σ e, portanto, que existe $k \in I$ tal que $\widetilde{d}_M = \widetilde{d}_k$. É este o k que procurávamos. Com efeito,

$$\forall \epsilon > 0 \quad U_{\frac{\epsilon}{4}}^{\widetilde{d}_M} \subseteq U_{\epsilon}^{\widetilde{d}_i \sqcup \widetilde{d}_j} :$$

Consideremos $x \in L$ tal que $\widetilde{d}_M(x) < \frac{\epsilon}{4}$. Como $\frac{1}{2}\overset{\circ}{d}_M \leq \widetilde{d}_M$, é suficiente mostrar que $\frac{1}{2}(\overset{\circ}{d}_i \vee \overset{\circ}{d}_j)(x) \leq \overset{\circ}{d}_M(x)$. Por definição

$$\overset{\circ}{d}_M(x) = \inf\{d_M([X]_M) \mid X \in M_i \oplus M_j, x \leq u([X]_M) = f(X)\},$$

pelo que basta provar que,

$$\text{se } X \in M_i \oplus M_j \text{ e } x \leq f(X) \text{ então } \frac{1}{2}(\overset{\circ}{d}_i \vee \overset{\circ}{d}_j)(x) \leq d_M([X]_M). \tag{4.15.1}$$

Mas

$$d_M([X]_M) = \inf\{\widetilde{d}_{ij}(Y) \mid Y \in M_i \oplus M_j, [X]_M \leq [Y]_M\}$$

e $\frac{1}{2}d_{ij} \leq \widetilde{d}_{ij}$, logo a condição 4.15.1 é verdadeira se, sempre que $Y \in M_i \oplus M_j$ e $x \leq f(Y)$, se tem $(\overset{\circ}{d}_i \vee \overset{\circ}{d}_j)(x) \leq d_{ij}(Y)$. Como

$$d_{ij}(Y) = \inf\{d'_{ij}(Z) \mid Z \in M_i \oplus' M_j, Y \leq [Z]_{M_i \oplus M_j}\},$$

a veracidade de 4.15.1 é uma consequência do Lema 4.16 que provamos a seguir. ■

Lema 4.16. *Sejam (M_i, d_i) e (M_j, d_j) dois reticulados locais métricos e consideremos $X = \bigvee_{\gamma \in \Gamma}(x_\gamma \oplus y_\gamma) \in M_i \oplus' M_j$. Então $d'_{ij}(X) \geq (\overset{\circ}{d}_i \vee \overset{\circ}{d}_j)(\bigvee_{\gamma \in \Gamma}(x_\gamma \wedge y_\gamma))$.*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que, para cada $\gamma \in \Gamma$, $(x_\gamma, y_\gamma) \notin \mathbb{O}$. Se $X \subseteq x \oplus y$ então, para cada $\gamma \in \Gamma$, $(x_\gamma, y_\gamma) \leq (x, y)$, logo $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \leq x$ e $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma \leq y$. Portanto

$$\max(d_i(x), d_j(y)) \geq \max(d_i(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma), d_j(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma))$$

qualquer que seja o par $(x, y) \in M_i \times M_j$ tal que $X \subseteq x \oplus y$. Por conseguinte,

$$d'_{ij}(X) \geq \max\left(d_i\Big(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma\Big), d_j\Big(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} y_\gamma\Big)\right) \geq \left(\overset{\circ}{d}_i \vee \overset{\circ}{d}_j\right)\left(\bigvee_{\gamma \in \Gamma}(x_\gamma \wedge y_\gamma)\right). \qquad ■$$

Teorema 4.17. *Dada uma cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida fraca*

$$\sigma = (|(M_i, d_i)| \xrightarrow{m_i} L)_{i \in I},$$

a família $\Gamma(\sigma)$ formada pelos diâmetros métricos d' em L tais que, para cada $\epsilon > 0$, existem $i \in I$ e $\delta > 0$ satisfazendo $U_\delta^{\widetilde{d_i}} \subseteq U_\epsilon^{d'}$ é uma estrutura de medida em L.

Demonstração. (UP1) Sejam $d'_1, d'_2 \in \Gamma(\sigma)$. Para cada $\epsilon > 0$, existem $i_1, i_2 \in I$ e $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $U_{\delta_1}^{\widetilde{d_{i_1}}} \subseteq U_\epsilon^{d'_1}$ e $U_{\delta_2}^{\widetilde{d_{i_2}}} \subseteq U_\epsilon^{d'_2}$. Consideremos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Então

$$U_{\frac{\delta}{2}}^{\widetilde{d_{i_1}} \sqcup \widetilde{d_{i_2}}} \leq U_\delta^{\widetilde{d_{i_1}}} \wedge U_\delta^{\widetilde{d_{i_2}}} \leq U_\epsilon^{d'_1} \wedge U_\epsilon^{d'_2} \leq U_\epsilon^{d'_1 \sqcup d'_2}.$$

Agora, usando o Lema 4.15, podemos deduzir que $d'_1 \sqcup d'_2 \in \Gamma(\sigma)$.

(UP2) Seja d um diâmetro métrico em L tal que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists d' \in \Gamma(\sigma) : U_\delta^{d'} \subseteq U_\epsilon^d.$$

Uma vez que $d' \in \Gamma(\sigma)$, existem $\gamma > 0$ e $i \in I$ tais que $U_\gamma^{\overline{d_i}} \subseteq U_\delta^{d'}$. Portanto $U_\gamma^{\overline{d_i}} \subseteq U_\epsilon^d$ e $d \in \Gamma(\sigma)$.

(UP3) É uma consequência imediata do facto de σ ser uma cofonte de medida fraca.

■

Se considerarmos, para cada reticulado local L, o conjunto das estruturas de medida e o conjunto das cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas ordenados por inclusão, o Teorema 4.17 dá-nos uma aplicação Γ do conjunto parcialmente ordenado das cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ--completas de medida fraca para o conjunto parcialmente ordenado das estruturas de medida, aplicação essa que preserva a ordem.

Dado um diâmetro métrico d em L, denotamos por m_d o homomorfismo de reticulados locais $L_d \hookrightarrow L$.

Teorema 4.18. *Suponhamos que Δ é a classe das epi-cofontes finitas e seja $(L, \mathcal{G})$ um reticulado local de medida. A cofonte*

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathcal{G}) \ := \ \Big\{ & |(M,d)| \xrightarrow{m} L \mid m \in \mathcal{M}ono \textit{ e existem } d' \in \mathcal{G} \textit{ e} \\ & f : (M,d) \longrightarrow (L_{d'}, \overline{d'}) \textit{ em } \mathsf{MFrm} \textit{ tais que } m_{d'} \cdot |f| = m \Big\} \end{aligned}$$

é uma cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida fraca.

Demonstração. As condições (S1) e (S2) são obviamente satisfeitas. Verifiquemos a condição (S3):

Para isso, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
{|(M_i, d_i)|} \arrow[r, "|f_i|"] \arrow[dd, "e_i"'] & {|(M, d)|} \arrow[dr, "e"] \arrow[dd, "f"] & \\
& & {|(M', d')|} \arrow[dl, "m"] \\
{|(M'_i, d'_i)|} \arrow[r, "m_i"'] & L &
\end{tikzcd}$$

onde $(f_i)_{i \in I}$ é uma Δ-cofonte final e $m_i \cdot e_i$ e $m \cdot e$ são as $(\mathcal{R}eg\mathcal{E}pi, \mathcal{M}ono)$-factorizações de, respectivamente, $f \cdot |f_i|$ e f, e suponhamos que cada m_i pertence a $\Upsilon(\mathcal{G})$, i.e., que, para cada $i \in I$, existe um $d''_i \in \mathcal{G}$ e um morfismo $g_i : (M'_i, d'_i) \longrightarrow (L_{d''_i}, \overline{d''_i})$ em MFrm tal que $m_{d''_i} \cdot |g_i| = m_i$:

$$\begin{tikzcd}
{|(M_i, d_i)|} \arrow[rr, "|f_i|"] \arrow[dd, "e_i"'] & & {|(M, d)|} \arrow[dr, "e"] \arrow[dd, "f"] & \\
& & & {|(M', d')|} \arrow[dl, "m"] \\
{|(M'_i, d'_i)|} \arrow[rr, "m_i"'] \arrow[dr, "|g_i|"'] & & L & \\
& {|(L_{d''_i}, \overline{d''_i})|} \arrow[ur, "m_{d''_i}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Pretendemos provar que, nestas condições, m também pertence a $\Upsilon(\mathcal{G})$. Como $\mathcal{G}$ é uma estrutura de medida e I é finito, $d'' := \bigsqcup_{i \in I} d''_i \in \mathcal{G}$. De modo a mostrar que $m \in \Upsilon(\mathcal{G})$ é suficiente provar que existe um morfismo $g : (M', d') \longrightarrow (L_{d''}, \overline{d''})$ em MFrm tal que $m_{d''} \cdot |g| = m$:

$$\begin{tikzcd}
{|(M_i,d_i)|} \arrow[rr, "|f_i|"] \arrow[dd, "e_i"'] & & {|(M,d)|} \arrow[dd, "f"] \arrow[drr, "e"] & & \\
& & & & {|(M',d')|} \arrow[dll, "m"] \arrow[ddd, "|g|"] \\
{|(M'_i,d'_i)|} \arrow[rr, "m_i"] \arrow[ddr, "|g_i|"'] & & L & & \\
& & & & \\
& {|(L_{d''_i},\overline{d''_i})|} \arrow[uur, "m_{d''_i}"'] & & & {|(L_{d''},\overline{d''})|} \arrow[uull, "m_{d''}"]
\end{tikzcd}$$

Vejamos em primeiro lugar que $M' \subseteq L_{d''}$:

Considerando $x \in M'$, como $M' = f(M)$, podemos escrever $x = f(y)$ para algum $y \in M$. Mas $(f_i)_{i\in I}$ é uma epi-cofonte pois $(f_i)_{i\in I}$ pertence a Δ, pelo que $M = \bigvee_{i\in I} f_i(M_i)$. Nesse caso, m pode ser escrito como $\bigvee_{i\in I} f_i(y_i)$ para alguma família $\{y_i \mid i \in I\}$ (onde cada y_i pertence a M_i). Então

$$x = \bigvee_{i\in I}(f \cdot f_i(y_i)) = \bigvee_{i\in I}(m_i \cdot e_i(y_i)) = \bigvee_{i\in I}(m_{d_i} \cdot g_i \cdot e_i(y_i)) \in \bigvee_{i\in I} L_{d''_i} \subseteq L_d.$$

Provemos agora que a inclusão $g : M' \hookrightarrow L_d$ é um homomorfismo uniforme de (M', d') para $(L_{d''}, \overline{d''})$. Pelo Corolário 4.13,

$$m_{d''_i} : (L_{d''_i}, \overline{d''_i}) \longrightarrow (L, \bigsqcup_{d\in\mathcal{G}} d)$$

é um homomorfismo uniforme. Portanto, para cada $i \in I$,

$$m_{d''} \cdot g \cdot e \cdot f_i = f \cdot f_i = m_{d''_i} \cdot g_i \cdot e_i$$

é uniforme. Então $g \cdot e \cdot f_i$ é uniforme e, por conseguinte, como $(f_i)_{i\in I}$ e e são finais, g é uniforme.

Como todo o m_d pertence a $\Upsilon(\mathcal{G})$ e, por (UP3), $L = \bigvee_{d\in\mathcal{G}} L_d$, então $\Upsilon(\mathcal{G})$ é de medida fraca. ■

Temos assim, para cada reticulado local L, uma aplicação Υ do conjunto parcialmente ordenado das estruturas de medida em L para o conjunto parcialmente ordenado das cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas de medida fraca em L, que preserva a ordem.

Estamos finalmente em condições de estabelecer uma imersão de UFrm num completamento final Δ-universal de MFrm.

Teorema 4.19. *Suponhamos que* Δ *é a classe das epi-cofontes finitas em* Frm. *Para cada reticulado local* L, Γ *e* Υ *definem uma conexão de Galois* $\Gamma \dashv \Upsilon$ *entre o conjunto parcialmente ordenado das estruturas de medida e o conjunto parcialmente ordenado das cofontes* $\mathcal{M}ono$-Δ-*completas de medida fraca. Além disso,* $\Gamma\Upsilon = 1$.

Demonstração. Principiaremos por demonstrar que $\Gamma\Upsilon(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$, qualquer que seja a estrutura de medida $\mathcal{G}$ em L. De modo a provar que $d \in \mathcal{G}$ se $d \in \Gamma\Upsilon(\mathcal{G})$ basta mostrar que, para todo o $\epsilon > 0$, existem $\gamma > 0$ e $d' \in \mathcal{G}$ tais que $U_\gamma^{d'} \subseteq U_\epsilon^d$. Consideremos então $\epsilon > 0$. Necessariamente, existem $\delta > 0$ e

$$m_\epsilon : |(M_\epsilon, d_\epsilon)| \longrightarrow L$$

em $\Upsilon(\mathcal{G})$ satisfazendo $U_\delta^{\overset{\sim}{d_\epsilon}} \subseteq U_\epsilon^d$. Como $m_\epsilon \in \Upsilon(\mathcal{G})$, existem d'_ϵ e

$$f_\epsilon : (M_\epsilon, d_\epsilon) \longrightarrow (L_{d'_\epsilon}, \overline{d'_\epsilon})$$

em MFrm para os quais o diagrama

$$\begin{tikzcd}
{|(M_\epsilon, d_\epsilon)|} \arrow[rr, "m_\epsilon"] \arrow[dr, "|f_\epsilon|"'] & & L \\
& {|(L_{d'_\epsilon}, \overline{d'_\epsilon})|} \arrow[ur, "m_{d'_\epsilon}"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Uma vez que f_ϵ é uniforme, existe, para cada $\delta > 0$, $\delta' > 0$ tal que $U_{\delta'}^{\overline{d'_\epsilon}} \subseteq f_\epsilon[U_\delta^{d_\epsilon}]$. Fixemos $\gamma = \frac{\delta'}{2}$ e provemos que $U_\gamma^{d'_\epsilon} \subseteq U_\delta^{\overset{\sim}{d_\epsilon}}$: para cada $x \in U_\gamma^{d'_\epsilon}$ existe, atendendo ao Corolário 4.12 (a), $y \in L_{d'_\epsilon}$ com $x \leq y$ e $d'_\epsilon < d'_\epsilon(x) + \gamma < \delta'$. Consequentemente, existe também $z \in M_\epsilon$ tal que $y \leq f_\epsilon(z)$ e $d_\epsilon(z) < \delta$. Por consequência, $\overset{\sim}{d_\epsilon}(x) \leq \overset{\circ}{d}_\epsilon(x) \leq d_\epsilon(z) < \delta$.

Em conclusão, $U_\gamma^{d'_\epsilon} \subseteq U_\delta^{\overset{\sim}{d_\epsilon}} \subseteq U_\epsilon^d$ como afirmáramos.

Reciprocamente, se $d \in \mathcal{G}$ então $m_d \in \Upsilon(\mathcal{G})$ logo $\overset{\sim}{\overline{d}} \in \Gamma\Upsilon(\mathcal{G})$. Pelo Corolário 4.12 (b), $\overset{\sim}{\overline{d}} = \overset{\circ}{\overline{d}} = d$ donde $d \in \Gamma\Upsilon(\mathcal{G})$.

Finalmente, provemos que $\sigma \subseteq \Upsilon\Gamma(\sigma)$ para qualquer cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida fraca σ em L. Para cada $|(M,d)| \xrightarrow{m} L$ em σ, o diâmetro $\tilde{d}$ pertence a $\Gamma(\sigma)$. Pela Proposição 4.14, $L_{\tilde{d}} = m(M)$. Como

$$\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\overline{\overset{\circ}{d}} \leq \overline{\tilde{d}} \leq \overline{\overset{\circ}{d}} \leq d,$$

então

$$(M,d) \xrightarrow{m} (L_{\tilde{d}}, \overline{\tilde{d}}) \in \mathsf{MFrm}$$

o que significa que $m \in \Upsilon\Gamma(\sigma)$. ∎

Por consequência, para cada reticulado local L, $\Upsilon\Gamma$ é um operador de fecho no conjunto parcialmente ordenado das cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas de medida fraca em L, aplicando cada cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida fraca σ no seu *fecho* σ^-, e então a restrição de Υ às estruturas de medida em L é uma bijecção entre estas e as cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas de medida fraca σ em L para as quais $\sigma^- = \sigma$. Chamamos a estas cofontes as *cofontes* $\mathcal{M}ono$-Δ-*completas de medida* e consideramos a categoria das cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas de medida como a subcategoria plena de $\mathcal{M}ono$-Δ-$\mathcal{CS}(\mathsf{MFrm}, \mathsf{Frm})$ cujos objectos são as cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas de medida.

Como nesta bijecção os morfismos em $\mathcal{M}ono$-Δ-$\mathcal{CS}(\mathsf{MFrm}, \mathsf{Frm})$ entre cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas de medida correspondem precisamente aos homomorfismos de medida, temos:

Corolário 4.20. *A categoria* UFrm *é isomorfa à categoria das cofontes* $\mathcal{M}ono$-Δ-*completas de medida de* MFrm *(sendo* Δ *a classe das epi-cofontes finitas) e, por isso, a categoria* UFrm *é, a menos de isomorfismo, uma subcategoria plena de um completamento final de* MFrm*, universal relativamente à classe das epi-cofontes finitas.* ∎

Finalizamos este capítulo com algumas considerações.

Substituamos a condição (UP2) na Definição 3.2 pela condição

(UP2′) se d é um diâmetro métrico e existe $d' \in \mathcal{G}$ tal que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : U_\delta^{d'} \subseteq U_\epsilon^d, \text{ então } d \in \mathcal{G}.$$

Chamamos *estrutura de medida fraca* no reticulado local L à estrutura daí resultante.

A imagem por Υ de uma estrutura de medida fraca em L é ainda uma cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida fraca.

Reciprocamente, temos:

Proposição 4.21. *Para cada cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida fraca em L*

$$\sigma = (|(M_i, d_i)| \xrightarrow{m_i} L)_{i \in I},$$

a subfamília $\Gamma'(\sigma) := \{\widetilde{d_i} | \ i \in I\}$ de $\Gamma(\sigma)$ é uma estrutura de medida fraca em L.

Demonstração. (UP2′) Seja d um diâmetro métrico e suponhamos que existe $d' \in \Gamma'(\sigma)$ tal que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ U_\delta^{d'} \subseteq U_\epsilon^d.$$

Então $y \overset{d'}{\lhd} x$ se $y \overset{d}{\lhd} x$, logo $L_d \subseteq L_{d'}$ e a inclusão $(L_d, \overline{d}) \hookrightarrow (L_{d'}, \overline{d'})$ é uniforme. Mas $d' \in \Gamma'(\sigma)$ pelo que existe $|(M_i, d_i)| \xrightarrow{m_i} L$ em σ tal que $d' = \widetilde{d_i}$. Pela Proposição 4.14, $(M_i, d_i) \cong (L_{d'}, \overline{d'})$ logo, aplicando (S2), $|(L_d, \overline{d})| \longrightarrow L$ pertence a σ e, consequentemente,

$$d = \overset{\circ}{\overline{d}} = \widetilde{\overline{d}} \in \Gamma'(\sigma).$$

(UP1) Consideremos $\widetilde{d_i}, \widetilde{d_j} \in \Gamma'(\sigma)$. O Lema 4.15 garante a existência de $k \in I$ tal que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ U_\delta^{\widetilde{d_k}} \subseteq U_\epsilon^{\widetilde{d_i} \sqcup \widetilde{d_j}}.$$

Então, por (UP2′), $\widetilde{d_i} \sqcup \widetilde{d_j} \in \Gamma'(\sigma)$.

A prova de (UP3) é óbvia. ■

Adaptando a prova do Teorema 4.19 a este novo contexto, podemos concluir que $\Gamma'\Upsilon = 1$ e $\Upsilon\Gamma' = 1$. Obtemos assim um isomorfismo entre a categoria dos *reticulados* *locais de medida fraca* (cujos morfismos são os homomorfismos de medida) e a subcategoria plena de $\mathcal{M}ono\text{-}\Delta\text{-}\mathcal{CS}(\mathsf{MFrm},\mathsf{Frm})$ das cofontes $\mathcal{M}ono$-Δ-completas de medida fraca.

Note-se que, no caso particular de σ ser uma cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida, $\Gamma'(\sigma)$ e $\Gamma(\sigma)$ coincidem. De facto, se $\sigma = \sigma^-$,

$$\Gamma'(\sigma) = \Gamma'(\sigma^-) = \Gamma'\Upsilon\Gamma(\sigma) = \Gamma(\sigma).$$

O diagrama seguinte resume as nossas conclusões:

Δ =epi-cofontes finitas

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\mathcal{M}ono\text{-}\Delta\text{-}CS(\mathsf{MFrm},\mathsf{Frm})} \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{reticulados locais}\\ \text{de medida fraca}\end{array}} \arrow[r, shift left, "\Upsilon"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{cofontes } \mathcal{M}ono\text{-}\Delta\text{-completas}\\ \text{de medida fraca}\end{array}} \arrow[l, shift left, "\Gamma'"', "\text{(isomorfismo)}"] \arrow[u, hook, "E"'] \\
\mathsf{UFrm} \cong \boxed{\begin{array}{c}\text{reticulados locais}\\ \text{de medida}\end{array}} \arrow[u, hook] \arrow[r, shift left, "\Upsilon"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{cofontes } \mathcal{M}ono\text{-}\Delta\text{-completas}\\ \text{de medida}\end{array}} \arrow[l, shift left, "\Gamma"', "\text{(isomorfismo)}"] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Notas sobre o Capítulo II:

(1) Do diagrama precedente surge uma questão: será que a noção de cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa de medida fraca é de facto mais forte que a noção de cofonte $\mathcal{M}ono$-Δ-completa, isto é, a imersão plena E é ou não realmente estrita?

(2) As estruturas de medida poderiam ser definidas como sistemas de diâmetros ($\star$) satisfazendo os axiomas (UP2), (UP3) e

$$\text{(UP1}'\text{)}\ d_1 \vee d_2 \in \mathcal{G} \text{ sempre que } d_1, d_2 \in \mathcal{G}.$$

Com efeito, prova-se (de um modo análogo à prova do Teorema 3.5) que o conjunto parcialmente ordenado das estruturas de medida (neste sentido) num reticulado local L é também isomorfo ao conjunto parcialmente ordenado das uniformidades em L.

(3) O conhecimento de alguns factos sobre coprodutos de reticulados locais e sobre os C-ideais gerados por conjuntos descendentes revelaram-se cruciais na demonstração de que as vizinhanças da diagonal de Weil funcionam para reticulados locais uniformes.

Neste capítulo, o trabalho notável de Pultr nos reticulados locais métricos ([64], [65], [67], [68]) constitui a base onde se apoia a nossa conclusão de que as estruturas de medida podem também ser consideradas nos reticulados locais.

CAPÍTULO III

RETICULADOS LOCAIS QUASE-UNIFORMES NO SENTIDO DE WEIL

Os espaços quase-uniformes são habitualmente apresentados na literatura em termos de vizinhanças da diagonal [28]: uma quase-uniformidade num conjunto é definida eliminando da axiomatização de Weil de espaço uniforme o axioma da simetria. Esta teoria tem obtido muito sucesso; como justificação para esta afirmação veja, por exemplo, [28] e [50].

É natural esperar que a partir de uma teoria de uniformidades para reticulados locais definida em termos de vizinhanças da diagonal se possa também desenvolver uma teoria de quase-uniformidades de fácil manuseamento. Neste capítulo confirmamos esta afirmação. Provamos ainda que a nossa teoria de quase-uniformidades para reticulados locais é equivalente à estabelecida por Frith [29] via coberturas. Consequentemente, a categoria aqui introduzida é também isomorfa à categoria dos reticulados locais quase-uniformes de Fletcher, Hunsaker e Lindgren [27].

1. Espaços quase-uniformes

A teoria clássica dos espaços quase-uniformes, introduzida por Nachbin, é habitualmente apresentada, contrariamente à dos espaços uniformes, em termos de vizinhanças da diagonal.

Definição 1.1. (Nachbin [55]) Sejam X um conjunto e $\mathcal{E}$ uma família de vizinhanças da diagonal de X. O par $(X, \mathcal{E})$ é chamado um *espaço quase-uniforme* se:

(QUW1) $\mathcal{E}$ é um filtro relativamente a $\subseteq$;

(QUW2) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \circ F \subseteq E$.

Uma aplicação f entre dois espaços quase-uniformes $(X, \mathcal{E})$ e $(X', \mathcal{E}')$ diz-se *uniformemente contínua* se $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}$ para todo o $E \in \mathcal{E}'$. Denotamos a categoria dos espaços quase-uniformes e aplicações uniformemente contínuas por QUnif.

Gantner e Steinlage em [30] apresentaram uma abordagem aos espaços quase-uniformes em termos de coberturas, mais exactamente "pares conjugados de coberturas". Um *par conjugado de coberturas* (abreviadamente, *cobertura conjugada*) de um conjunto X é um subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ satisfazendo a condição

$$\bigcup\{U_1 \cap U_2 \mid (U_1, U_2) \in \mathcal{U}\} = X.$$

A cobertura conjugada $\mathcal{U}$ diz-se *forte* se, adicionalmente,

$$\text{para cada } (U_1, U_2) \in \mathcal{U}, U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \text{ caso } U_1 \neq \emptyset \text{ ou } U_2 \neq \emptyset.$$

Habitualmente, dadas duas coberturas conjugadas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ escreve-se $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ se, para cada $(U_1, U_2) \in \mathcal{U}$, existe $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$ com $U_1 \subseteq V_1$ e $U_2 \subseteq V_2$.

Definição 1.2. (Gantner e Steinlage [30]) Uma família não vazia μ de coberturas conjugadas de um conjunto X diz-se uma *quase-uniformidade por coberturas* em X se satisfizer as seguintes condições:

(QU1) se $\mathcal{U} \in \mu$, $\mathcal{V}$ é uma cobertura conjugada de X e $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} \in \mu$;

(QU2) quaisquer que sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mu$ existe uma cobertura conjugada forte $\mathcal{W} \in \mu$ tal que

$$\mathcal{W} \leq \{(U_1 \cap V_1, U_2 \cap V_2) \mid (U_1, U_2) \in \mathcal{U}, (V_1, V_2) \in \mathcal{V}\};$$

(QU3) para cada $\mathcal{U} \in \mu$ existe $\mathcal{V} \in \mu$ tal que

$$\mathcal{V}^* := \{(st_1(V_1, \mathcal{V}), st_2(V_2, \mathcal{V})) \mid (V_1, V_2) \in \mathcal{V}\} \leq \mathcal{U},$$

onde

$$st_1(V_1, \mathcal{V}) := \bigcup \{V_1' \mid (V_1', V_2') \in \mathcal{V} \text{ e } V_2' \cap V \neq \emptyset\}$$

e

$$st_2(V_2, \mathcal{V}) := \bigcup \{V_2' \mid (V_1', V_2') \in \mathcal{V} \text{ e } V_1' \cap V \neq \emptyset\}.$$

Em [30] os autores provaram que estas duas abordagens são equivalentes.

Como elemento de consulta sobre espaços quase-uniformes remetemos o leitor para a monografia [28] de Fletcher e Lindgren.

2. Reticulados locais quase-uniformes

Do mesmo modo que os espaços bitopológicos assumem um papel natural no estudo dos espaços quase-uniformes [51], os reticulados quase-uniformes conduzem-nos naturalmente à consideração dos bi-reticulados locais.

As seguintes definições e notações são transcritas de [29].

Seja $B = (B_0, B_1, B_2)$ um bi-reticulado local. Um subconjunto U de $B_1 \times B_2$ chama-se uma *cobertura conjugada* de B se $\bigvee\{u_1 \wedge u_2 \mid (u_1, u_2) \in U\} = 1$. Uma cobertura conjugada U diz-se *forte* se, para cada $(u_1, u_2) \in U$, $u_1 \wedge u_2 \neq 0$ quando $u_1 \vee u_2 \neq 0$.

Recordemos ainda mais algumas definições. Dadas duas coberturas conjugadas U e V de B, a relação $U \leq V$ significa que, para cada $(u_1, u_2) \in U$, existe $(v_1, v_2) \in V$ tal que $u_1 \leq v_1$ e $u_2 \leq v_2$. Relativamente a esta pré-ordem,

$$\{(u_1 \wedge v_1, u_2 \wedge v_2) \mid (u_1, u_2) \in U, (v_1, v_2) \in V\},$$

que é claramente uma cobertura conjugada, é o ínfimo $U \wedge V$ das duas coberturas conjugadas U e V. Dados $x \in B_0$ e uma cobertura conjugada U de B,

$$st_1(x, U) := \bigvee\{u_1 \mid (u_1, u_2) \in U, u_2 \wedge x \neq 0\}$$

e

$$st_2(x, U) := \bigvee\{u_2 \mid (u_1, u_2) \in U, u_1 \wedge x \neq 0\}.$$

Por fim, U^* denota a cobertura conjugada

$$\Big\{\Big(st_1(u_1, U), st_2(u_2, U)\Big) \mid (u_1, u_2) \in U\Big\}.$$

Importa ainda salientar que, quaisquer que sejam $x \in B_0$ e $i \in \{1, 2\}$ [29]:

- $x \leq st_i(x, U)$

e

- $st_i(st_i(x, U), U) \leq st_i(x, U^*)$.

Definição 2.1. (Frith [29]) Uma família $\mathcal{U}$ de coberturas conjugadas de um bi-reticulado local B é uma *quase-uniformidade* em B se satisfizer as seguintes condições:

(QU1) $\mathcal{U}$ é um filtro relativamente à relação de ordem $\leq$ e a família das coberturas conjugadas fortes de $\mathcal{U}$ é uma base desse filtro;

(QU2) para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^* \leq U$;

(QU3) para cada $x \in B_i$ ($i \in \{1, 2\}$) vale $x = \bigvee\{y \in B_i \mid y \overset{\mathcal{U}}{\lhd}_i x\}$, onde $y \overset{\mathcal{U}}{\lhd}_i x$ significa que $st_i(y, U) \leq x$ para algum $U \in \mathcal{U}$.

Um *reticulado local quase-uniforme* é um par $(B, \mathcal{U})$ formado por um bi-reticulado local B e uma quase-uniformidade $\mathcal{U}$ em B. Sejam $(B, \mathcal{U})$ e $(B', \mathcal{U}')$ reticulados locais quase-uniformes. Um *homomorfismo uniforme* $f : (B, \mathcal{U}) \longrightarrow (B', \mathcal{U}')$ é um homomorfismo de bi-reticulados locais $f : B \longrightarrow B'$ tal que, para cada $U \in \mathcal{U}$, $f[U] := \{(f(u_1), f(u_2)) \mid (u_1, u_2) \in U\} \in \mathcal{U}'$.

Denotaremos a categoria dos reticulados locais quase-uniformes e homomorfismos uniformes por QUFrm.

3. Reticulados locais quase-uniformes no sentido de Weil

No contexto espacial, eliminando o axioma da simetria obtem-se a noção de quase-uniformidade. Aqui, num contexto "livre de pontos", depois de eliminado o axioma da simetria devemos observar o seguinte: a equivalência entre as condições (i) e (ii) da Proposição I.4.6 deixa de ser válida pelo que, no lugar de $\overset{\mathcal{E}}{\triangleleft}$, temos agora duas relações de ordem,

$$x\overset{\mathcal{E}}{\triangleleft}_1 y \equiv E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y, \text{ para algum } E \in \mathcal{E},$$

e

$$x\overset{\mathcal{E}}{\triangleleft}_2 y \equiv (x \oplus x) \circ E \subseteq y \oplus y, \text{ para algum } E \in \mathcal{E},$$

que por sua vez dão origem, como veremos, a dois sub-reticulados locais de L,

$$L^1 := \left\{x \in L \mid x = \bigvee\{y \in L \mid y\overset{\mathcal{E}}{\triangleleft}_1 x\}\right\}$$

e

$$L^2 := \left\{x \in L \mid x = \bigvee\{y \in L \mid y\overset{\mathcal{E}}{\triangleleft}_2 x\}\right\},$$

que correspondem, no caso espacial, às duas topologias definidas pela quase-uniformidade.

Note-se que $\overset{\mathcal{E}}{\triangleleft}_2$ não é mais nem menos do que a ordem $\overset{\mathcal{E}^{-1}}{\triangleleft}_1$, sendo $\mathcal{E}^{-1}$ o *conjugado* $\{E^{-1} \mid E \in \mathcal{E}\}$ de $\mathcal{E}$.

Dados $x \in L$ e um C-ideal E, denotamos os elementos

$$\bigvee\{y \in L \mid (y,z) \in E, z \wedge x \neq 0\},$$

$$\bigvee\{y \in L \mid (z,y) \in E, z \wedge x \neq 0\}$$

e

$$\bigvee\{y \in L \mid (y,y) \in E, y \wedge x \neq 0\}$$

por, respectivamente, $st_1(x,E)$, $st_2(x,E)$ e $st(x,E)$. Quaisquer que sejam $x, y \in L$ e $E, F \in L \oplus L$, temos:

- $st_1(x,E) \wedge y = 0$ se e só se $x \wedge st_2(y,E) = 0$;

- $st_1(st_1(x,E),F) \leq st_1(x,F\circ E)$ e $st_2(st_2(x,E),F) \leq st_2(x,E\circ F)$.

É também fácil concluir que, para todo o x em L e toda a vizinhança da diagonal E de L, $x \leq st(x,E) \leq st_1(x,E) \wedge st_2(x,E)$.

Proposição 3.1. *Suponhamos que $\mathcal{E}$ é uma base de um filtro de $(WEnt(L),\subseteq)$. Então, para $i\in\{1,2\}$, as relações $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i$ são sub-reticulados de $L\times L$ satisfazendo as propriedades seguintes:*

(a) *quaisquer que sejam x,y,z,w em L, $x\leq y\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i z\leq w$ implica $x\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i w$;*

(b) *$x\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i y$ se e só se, para algum $E\in\mathcal{E}$, $st_i(x,E)\leq y$;*

(c) *$x\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i y$ implica $x\prec y$;*

(d) *L^i é um sub-reticulado local de L.*

Demonstração. A prova de que cada $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i$ define um sub-reticulado de $L\times L$ é similar à prova da propriedade correspondente da relação $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ na Proposição 4.8 do Capítulo I.

(a) É óbvio.

(b) Se $E\circ(x\oplus x)\subseteq y\oplus y$ e $(a,b)\in E$ com $b\wedge x\neq 0$, então, como $(a,b\wedge x)\in E$ e $(b\wedge x,b\wedge x)\in x\oplus x$, $(a,b\wedge x)\in y\oplus y$, e, consequentemente, $a\leq y$. Logo $st_1(x,E)\leq y$.

Reciprocamente, consideremos $(a,b)\in E$ e $(b,c)\leq(x,x)$ com $b\neq 0$. Então $(a,c)\in y\oplus y$; de facto, $a\leq st_1(x,E)\leq y$ e $c\leq x\leq st_1(x,E)\leq y$.

(c) De (b) sabemos já que $st(x,E)\leq y$ quando $x\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i y$. Basta agora recordar a prova da Proposição I.4.8.

(d) Uma vez que, por (c), $x\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i y$ implica $x\leq y$, trata-se de um corolário imediato do facto de cada $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i$ ser um sub-reticulado de $L\times L$ e da propriedade (a). ■

Observação 3.2. Um raciocínio análogo ao da prova de (b) mostra que:

- $x\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 y$ é também equivalente à existência de algum $E\in\mathcal{E}$ tal que $E\circ(x\oplus 1)\subseteq y\oplus 1$;
- similarmente, $x\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_2 y$ se e só se $(1\oplus x)\circ E\subseteq 1\oplus y$ para algum $E\in\mathcal{E}$.

De modo a formalizarmos a definição “adequada” de quase-uniformidade de Weil, temos que substituir a condição de admissibilidade (UW4) da Definição I.4.5 pela condição de (L, L^1, L^2) ser um bi-reticulado local:

Definição 3.3. Uma família $\mathcal{E}$ de vizinhanças da diagonal de um reticulado local L é uma *quase-uniformidade de Weil* se satisfizer as seguintes condições:

(QUW1) $\mathcal{E}$ é um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$;

(QUW2) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \circ F \subseteq E$;

(QUW3) (L, L^1, L^2) é um bi-reticulado local.

Uma *base de uma quase-uniformidade de Weil* é um conjunto $\mathcal{E}$ de vizinhanças da diagonal de Weil tal que $\uparrow \mathcal{E}$ é uma quase-uniformidade de Weil. Portanto $\mathcal{E}$ é uma base de uma quase-uniformidade de Weil se e só se é uma base de um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$ satisfazendo as condições (QUW2) e (QUW3).

Um *reticulado local quase-uniforme de Weil* é um par $(L, \mathcal{E})$ constituído por um reticulado local L e uma quase-uniformidade de Weil $\mathcal{E}$ em L. Sejam $(L, \mathcal{E})$ e $(L', \mathcal{E}')$ reticulados locais quase-uniformes de Weil. Um *homomorfismo uniforme de Weil* $f : (L, \mathcal{E}) \longrightarrow (L', \mathcal{E}')$ é um homomorfismo de reticulados locais $f : L \longrightarrow L'$ tal que $(f \oplus f)(E) \in \mathcal{E}'$ para todo o $E \in \mathcal{E}$. Estes são os objectos e os morfismos da categoria QWUFrm.

Observações 3.4. (a) No caso da quase-uniformidade de Weil $\mathcal{E}$ ser simétrica, isto é, ter uma base de vizinhanças da diagonal simétricas, as relações $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1$ e $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_2$ são idênticas e coincidem com a relação $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ do Capítulo I. Nesse caso $L^1 = L^2$ e, portanto, a condição (QUW3) significa que $L = L^1 = L^2$ ou, o que é o mesmo, que, para todo o $x \in L$, $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x\}$. Em conclusão, acontece aqui o mesmo que em espaços: uma família de vizinhanças da diagonal de Weil é uma uniformidade de Weil se e só se é uma quase-uniformidade de Weil simétrica.

(b) Se $\mathcal{E}$ é uma quase-uniformidade de Weil em L, então o seu conjugado $\mathcal{E}^{-1}$ é também uma quase-uniformidade de Weil em L.

(c) A adaptação da adjunção dual do Teorema I.4.14 às categorias QUnif e QWUFrm é imediata. Por essa razão, e para evitar desviarmo-nos do objectivo principal deste capítulo, dispensamo-nos de a descrever.

4. O isomorfismo entre as categorias QUFrm e QWUFrm

O lema seguinte, do mesmo género do Lema 4.2 do Capítulo I, será essencial no seguimento.

Lema 4.1. *Sejam $A \in \mathcal{D}(L \times L)$ e $x \in L$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, $st_i(x, k(A)) = st_i(x, A)$.*

Demonstração. Limitamo-nos a apresentar uma prova do lema para $i = 1$ pois o caso $i = 2$ pode ser provado de forma semelhante.

Seja $A \in \mathcal{D}(L \times L)$ e consideremos o subconjunto não vazio

$$\mathbf{E} = \{E \in \mathcal{D}(L \times L) \mid A \subseteq E \subseteq k(A), st_1(x, E) = st_1(x, A)\}.$$

Se $E \in \mathbf{E}$ então também $k_0(E) \in \mathbf{E}$:

Evidentemente, basta verificar que $st_1(x, k_0(E)) \leq st_1(x, E)$. Seja $(a, b) \in k_0(E)$ com $b \wedge x \neq 0$. Caso $(a, b) = (a, \bigvee S)$ para algum S satisfazendo $\{a\} \times S \subseteq E$, existe $s \in S$ não nulo tal que $s \wedge x \neq 0$ e $(a, s) \in E$, e portanto $a \leq st_1(x, E)$. Senão, caso $(a, b) = (\bigvee S, b)$ para algum S com $S \times \{b\} \subseteq E$, imediatamente $a = \bigvee S \leq st_1(x, E)$.

Além disso, para qualquer subconjunto não vazio $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$, $\bigcup_{F \in \mathbf{F}} F \in \mathbf{E}$ porque

$$st_1(x, \bigcup_{F \in \mathbf{F}} F) = \bigvee_{F \in \mathbf{F}} st_1(x, F).$$

Então $T := \bigcup_{E \in \mathbf{E}} B$ pertence a $\mathbf{E}$, ou seja, $\mathbf{E}$ possui um elemento maximal T. Mas, como acabámos de ver, $k_0(T) \in \mathbf{E}$ donde $T = k_0(T)$, isto é, T é um C-ideal. Então $k(A) = T \in \mathbf{E}$ e, consequentemente, $st_1(x, k(A)) = st_1(x, A)$. ■

Proposição 4.2. *Seja $\mathcal{U}$ uma quase-uniformidade num bi-reticulado local (B_0, B_1, B_2). Para cada cobertura conjugada U definamos $E_U = k(U)$. Então $\mathcal{E}_{\mathcal{U}} := \{E_U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma base de uma quase-uniformidade de Weil em B_0.*

Demonstração. É claro que qualquer elemento de $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ é uma vizinhança da diagonal de Weil pois

$$\bigvee\{x \mid (x,x) \in k(U)\} \geq \bigvee\{u_1 \wedge u_2 \mid (u_1,u_2) \in U\}.$$

Sejam $E_{U_1}, E_{U_2} \in \mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ e tomemos $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \leq U_1 \wedge U_2$. Evidentemente $E_U \subseteq E_{U_1} \cap E_{U_2}$, logo $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ é uma base de um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$.

Para cada $U \in \mathcal{U}$ consideremos $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^* \leq U$. Então $E_V \circ E_V \subseteq E_U$:

Uma aplicação do Lema I.4.2 dá-nos $E_V \circ E_V = \downarrow V \circ \downarrow V$. Sejam $(x,y) \leq (v_1,v_2) \in V$ e $(y,z) \leq (v_1', v_2') \in V$ com $x,y,z \neq 0$. Ora $x \leq v_1 \leq st_1(v_1,V)$, $z \leq v_2' \leq st_2(v_2,V)$ e $(st_1(v_1,V), st_2(v_2,V)) \in V^*$, pelo que existe um par $(u_1,u_2) \in U$ tal que $(x,z) \leq (u_1,u_2)$, e, consequentemente, tal que $(x,z) \in E_U$.

Finalmente, (B_0, B_0^1, B_0^2) é um bi-reticulado local:

Por hipótese

$$B_i \subseteq \Big\{x \in B_0 \mid x = \bigvee\{y \in B_i \mid y \overset{\mathcal{U}}{\lhd}_i x\}\Big\}.$$

Atendendo ao Lema 4.1, $y \overset{\mathcal{U}}{\lhd}_i x$ significa que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $st_i(y, k(U)) \leq x$, o que, como já observámos, é equivalente a dizer que $y \overset{\mathcal{E}_{\mathcal{U}}}{\lhd}_i x$. Então

$$B_i \subseteq \Big\{x \in B_0 \mid x = \bigvee\{y \in B_i \mid y \overset{\mathcal{E}_{\mathcal{U}}}{\lhd}_i x\}\Big\}.$$

Agora verifica-se imediatamente que, sendo (B_0, B_1, B_2) um bi-reticulado local e sendo

$$B_0^i = \{x \in B_0 \mid x = \bigvee\{y \in B_i \mid y \overset{\mathcal{E}_{\mathcal{U}}}{\lhd}_i x\}\},$$

para $i \in \{1,2\}$, um sub-reticulado local de B_0 (Proposição 3.1 (d)), (B_0, B_0^1, B_0^2) é um bi-reticulado local. ■

Seja $\mathcal{E}$ uma quase-uniformidade de Weil em L. Uma vez que, para quaisquer $E \in \mathcal{E}$ e $x \in L$, $st_i(x,E)$ pode não pertencer a L^i, vamos, por necessidade técnica, introduzir em $L \oplus L$ as relações $\overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq}_i$ $(i \in \{1,2\})$:

Quaisquer que sejam $I, J \in L \oplus L$,

$$I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq}_1 J \equiv E \circ I \subseteq J \text{ para algum } E \in \mathcal{E}$$

e

$$I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq}_2 J \equiv I \circ E \subseteq J \text{ para algum } E \in \mathcal{E}.$$

Estas relações são mais fortes do que a inclusão $\subseteq$. De facto, para todo o $E \in \mathcal{E}$ e todo o $I \in L \oplus L$, $I \subseteq (E \circ I) \cap (I \circ E)$ como em seguida provamos; para qualquer $(x, y) \in I$ podemos escrever $x = \bigvee\{x \wedge z \mid (z, z) \in E, x \wedge z \neq 0\}$, e, além disso, para cada z tal que $(z, z) \in E$ e $x \wedge z \neq 0$, $(x \wedge z, x \wedge z) \in E$ e $(x \wedge z, y) \in I$. Então $(x, y) \in E \circ I$. Analogamente $I \subseteq I \circ E$. Logo $I \subseteq (E \circ I) \cap (I \circ E)$, como afimáramos.

Adicionalmente precisaremos também, para cada $i \in \{1, 2\}$, do seguinte operador em $\mathcal{E}$:

$$int_i(E) := \bigvee\{I \in L \oplus L \mid I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq}_i E\}.$$

Proposição 4.3. *Seja $\mathcal{E}$ uma quase-uniformidade de Weil em L. Quaisquer que sejam $i \in \{1, 2\}$ e $E \in \mathcal{E}$, tem-se que:*

(a) *$int_i(E) \subseteq E \subseteq int_i(E^2)$;*

(b) *para cada $x \in L$, $st_i(x, int_i(E)) \in L^i$.*

Demonstração. (a) É trivial.

(b) Para provar que

$$st_1(x, int_1(E)) \leq \bigvee\Big\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 st_1(x, int_1(E))\Big\}$$

basta provar que

$$int_1(E) \circ (x \oplus 1) \subseteq \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 st_1(x, int_1(E))\} \oplus 1 \qquad \text{(cf. Observação 3.2).}$$

Pelo Lema I.4.2,

$$int_1(E) \circ (x \oplus 1) = \bigcup\{I \in L \oplus L \mid I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq}_1 E\} \circ \downarrow(x, 1).$$

Se $(b, c) \leq (x, 1)$, $b \neq 0$, $(a, b) \in I$ e existe algum $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \circ I \subseteq E$, então para qualquer $G \in \mathcal{E}$ tal que $G^2 \subseteq F$ temos $G \circ I \subseteq int_1(E)$, pois $G \circ I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq}_1 E$. Um cálculo simples mostra que

$$G \circ (a \oplus a) \subseteq st_1(x, int_1(E)) \oplus st_1(x, int_1(E)),$$

ou seja, $a\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 st_1(x, int_1(E))$. Então

$$(a, c) \in \bigvee\{y \in L \mid y\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 st_1(x, int_1(E))\} \oplus 1. \qquad \blacksquare$$

Por (a), cada $int_i(E)$ é uma vizinhança da diagonal de Weil. Observe-se que, para $i = 1$ e $i = 2$, $\{int_i(E) \mid E \in \mathcal{E}\}$ é uma base de $\mathcal{E}$.

Observação 4.4. A Proposição 4.3 também nos permite concluir que a condição (QUW3) da Definição 3.3 pode ser formulada como uma condição de admissibilidade de uma uniformidade em L; de facto, aquela condição é equivalente a dizer que o filtro $\overline{\mathcal{E}}$ gerado por $\{E \cap E^{-1} \mid E \in \mathcal{E}\}$ é admissível, isto é, que, para cada $x \in L$, vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y\overset{\overline{\mathcal{E}}}{\lhd} x\}$:

Se $\overline{\mathcal{E}}$ é admissível e $x \in L$, então $x = \bigvee S$ sendo $S = \{y \in L \mid y\overset{\overline{\mathcal{E}}}{\lhd} x\}$. Para cada $y \in S$ existem $\overline{E}_y \in \overline{\mathcal{E}}$ e $E_y \in \mathcal{E}$ tais que $\overline{E}_y \circ (y \oplus y) \subseteq x \oplus x$ e $E_y \cap E_y^{-1} \subseteq \overline{E}_y$. Consideremos $F_y \in \mathcal{E}$ tal que $F_y^2 \subseteq E_y$ e denotemos por $\overline{F}_y$ a intersecção $F_y \cap F_y^{-1} \in \overline{\mathcal{E}}$. É imediato que $\overline{F}_y^2 \subseteq \overline{E}_y$ donde $int_i(\overline{F}_y^2) \subseteq int_i(\overline{E}_y)$ $(i \in \{1, 2\})$. Temos então

$$\begin{aligned} x = \bigvee S &\leq \bigvee_{y \in S} (st_1(y, \overline{F}_y) \wedge st_2(y, \overline{F}_y)) \\ &\leq \bigvee_{y \in S} (st_1(y, int_1(\overline{D}_y^2)) \wedge st_2(y, int_2(\overline{F}_y^2))) \\ &\leq \bigvee_{y \in S} (st_1(y, int_1(\overline{E}_y)) \wedge st_2(y, int_2(\overline{E}_y))). \end{aligned}$$

Ora

$$\bigvee_{y \in S} (st_1(y, int_1(\overline{E}_y)) \wedge st_2(y, int_2(\overline{E}_y))) \leq x$$

porque $\overline{E}_y \circ (y \oplus y) \subseteq x \oplus x$. Então, como $st_i(y, int_i(\overline{E}_y)) \in L^i$ $(i \in \{1, 2\})$, (L, L^1, L^2) é um bi-reticulado local. Reciprocamente, para todo o $x \in L$, podemos escrever $x = \bigvee_{\gamma \in \Gamma}(x_\gamma^1 \wedge x_\gamma^2)$ para $\{x_\gamma^1 \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq L^1$ e $\{x_\gamma^2 \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq L^2$. Mas, para cada $\gamma \in \Gamma$,

$$x_\gamma^1 = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 x_\gamma^1\}$$

e

$$x_\gamma^2 = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_2 x_\gamma^2\},$$

donde se conclui que bastará provar que, caso $y_1 \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 x_1$ e $y_2 \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_2 x_2$, $y_1 \wedge y_2 \overset{\overline{\mathcal{E}}}{\lhd} x_1 \wedge x_2$, o que é simples: se $E \circ (y_1 \oplus y_1) \subseteq x_1 \oplus x_1$ e $(y_2 \oplus y_2) \circ F \subseteq x_2 \oplus x_2$ então $F^{-1} \circ (y_2 \oplus y_2) \subseteq x_2 \oplus x_2$ logo

$$(E \cap F)^{-1} \circ (y_1 \wedge y_2 \oplus y_1 \wedge y_2) \subseteq x_1 \wedge x_2 \oplus x_1 \wedge x_2.$$

Resumindo, tal como acontece com os espaços quase-uniformes, se $(L, \mathcal{E})$ é um reticulado local quase-uniforme de Weil, a menor quase-uniformidade de Weil $\overline{\mathcal{E}}$ em L que contém $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}^{-1}$ é uma uniformidade e tem a família $\{E \cap E^{-1} \mid E \in \mathcal{E}\}$ por base.

Definição 4.5. Dada uma vizinhança da diagonal de Weil E de L, diremos que um elemento x de L é *E-pequeno* caso $x \leq st(y, E)$ sempre que $x \wedge y \neq 0$.

Para cada vizinhança da diagonal de Weil E definamos

$$U_E := \Big\{ \big(st_1(x, int_1(E)), st_2(x, int_2(E)) \big) \mid x \text{ é um elemento } E\text{-pequeno de } L \Big\}.$$

Proposição 4.6. *Seja $(L, \mathcal{E})$ um reticulado local quase-uniforme de Weil. Para cada $x \in L$ e cada $E \in \mathcal{E}$ tem-se para $i \in \{1, 2\}$:*

(a) $st_i(x, U_E) \leq st_i(x, E^3)$ $(i \in \{1, 2\})$;

(b) $st_i(x, E) \leq st_i(x, U_{E^2})$ $(i \in \{1, 2\})$.

Demonstração. (a) Fixemos $i \in \{1, 2\}$ e seja z um elemento E-pequeno tal que $st_j(z, int_j(E)) \wedge x \neq 0$, $(j \in \{1, 2\}; j \neq i)$. Então $z \wedge st_i(x, int_j(E)) \neq 0$ e, como z é E-pequeno,

$$z \leq st(st_i(x, int_j(E)), E) \leq st_i(st_i(x, E), E) \leq st_i(x, E^2).$$

Logo $st_i(z, int_i(E)) \leq st_i(x, E^3)$ e, consequentemente,

$$\bigvee \Big\{ st_i(z, int_i E) \mid z \text{ é } E\text{-pequeno, } st_j(z, int_j E) \wedge x \neq 0,\ (j \in \{1, 2\}; j \neq i) \Big\} \leq st_i(x, E^3),$$

isto é, $st_i(x, U_E) \leq st_i(x, E^3)$.

(b) Seja $(a, b) \in E$ tal que $b \wedge x \neq 0$. Podemos escrever

$$a = \bigvee \{a \wedge z \mid (z, z) \in E^2, a \wedge z \neq 0\}.$$

Observemos que

$$\Big(st_1(a \wedge z, int_1(E^2)), st_2(a \wedge z, int_2(E^2))\Big) \in U_{E^2}$$

sempre que $(z, z) \in E^2$ e $a \wedge z \neq 0$. Ora

$$\begin{array}{rcl} x \wedge st_2(a \wedge z, int_2(E^2)) & = & \bigvee\{x \wedge d \mid (c,d) \in int_2(E^2), c \wedge a \wedge z \neq 0\} \\ & \geq & \bigvee\{x \wedge d \mid (c,d) \in E, c \wedge a \wedge z \neq 0\} \\ & \geq & x \wedge b \neq 0. \end{array}$$

pelo que a desigualdade desejada está provada. ■

Dada uma quase-uniformidade de Weil $\mathcal{E}$ em L, denotamos por $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ o conjunto $\{U_E \mid E \in \mathcal{E}\}$.

Proposição 4.7. *$\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ é uma base para uma quase-uniformidade em (L, L^1, L^2), constituída por coberturas conjugadas fortes.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3 (b), cada U_E é um subconjunto de $L^1 \times L^2$. Além disso, é mesmo uma cobertura conjugada forte:

- $\bigvee\{st_1(x, int_1(E)) \wedge st_2(x, int_2(E)) \mid x \text{ é } E\text{−pequeno}\} \geq \bigvee\{x \mid x \text{ é } E\text{−pequeno}\}$ $\geq \bigvee\{x \mid (x,x) \in E\} = 1$;
- se

  $$st_1(x, int_1(E)) \vee st_2(x, int_2(E)) \neq 0$$

  então $x \neq 0$ logo

  $$st_1(x, int_1(E)) \wedge st_2(x, int_2(E)) \neq 0.$$

Dados $E, F \in \mathcal{E}$, tem-se, para qualquer $G \in \mathcal{E}$ tal que $G \subseteq E \cap F$, $U_G \leq U_E \wedge U_F$ (claramente, x é E-pequeno e F-pequeno quando é G-pequeno).

Verifiquemos as condições (QU2) e (QU3) da Definição 2.1:

(QU2) Consideremos $U_E \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ e tomemos $F \in \mathcal{E}$ tal que $F^8 \subseteq E$. Então $U_F^* \leq U_E$:

Seja x um elemento F-pequeno de L. Temos que $st_1(st_1(x, int_1(F)), U_F)$ coincide com

$$\bigvee\{st_1(z, int_1(F)) \mid z \text{ é } F\text{-pequeno}, st_2(z, int_2(F)) \wedge st_1(x, int_1(F)) \neq 0\}.$$

Como

$$st_2(z, int_2(F)) \wedge st_1(x, int_1(F)) \neq 0$$

é equivalente a

$$z \wedge st_1(st_1(x, int_1(F)), int_2(F)) \neq 0$$

e z é F-pequeno,

$$z \leq st(st_1(st_1(x, int_1(F)), int_2(F)), F) \leq st_1(st_1(st_1(x, F), F), F).$$

Daqui resulta que

$$st_1(z, int_1(F)) \leq st_1(z, F) \leq st_1(x, F^4) \leq st_1(x, int_1(E)).$$

Acabámos assim de provar que $st_1(st_1(x, int_1(F)), U_F) \leq st_1(x, int_1(E))$.

Analogamente, prova-se que $st_2(st_2(x, int_2(F)), U_F) \leq st_2(x, int_2(E))$.

(QU3) Seja $x \in L^1$. Então vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 x\}$. Verifiquemos (QU3) mostrando que, para cada $y \in L$ satisfazendo $y \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 x$, existe $y' \in L^1$ tal que $y \leq y' \overset{\mathcal{U}_\mathcal{E}}{\lhd}_1 x$. Portanto, consideremos $y \in L$ com $y \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 x$ e tomemos $F, G \in \mathcal{E}$ tais que $G^{16} \subseteq F$ e $F^3 \subseteq E$ (onde $E \in \mathcal{E}$ satisfaz $st_1(y, E) \leq x$). Como $y \leq st_1(y, int_1(G)) \in L^1$, basta provar que $st_1(st_1(y, int_1(G)), U_{G^2}) \leq x$:

Ora

$$\begin{aligned} st_1\left(st_1(y, int_1(G)), U_{G^2}\right) &\leq st_1\left(st_1(y, G), U_{G^2}\right) \\ &\leq st_1\left(st_1(y, U_{G^2}), U_{G^2}\right) \\ &\leq st_1(y, {U_{G^2}}^*) \end{aligned}$$

e, por (b), ${U_{G^2}}^* \leq U_{G^{16}}$, logo

$$st_1\left(st_1(y, int_1(G)), U_{G^2}\right) \leq st_1(y, {U_{G^2}}^*) \leq st_1(y, U_F) \leq st_1(y, F^3) \leq st_1(y, E) \leq x,$$

o que completa a demonstração. ■

Lema 4.8. *Seja $(L, \mathcal{U})$ um reticulado local quase-uniforme. Para qualquer cobertura conjugada forte V em $\mathcal{U}$, tem-se que:*

(a) $V \leq U_{E_{V^*}}$;

(b) $U_{E_V} \leq V^{**}$.

Demonstração. (a) Seja $(v_1, v_2) \in V$ com $v_1 \vee v_2 \neq 0$. É claro que, $(v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2) \in E_V \subseteq E_{V^*}$ e, sendo V forte, $v_1 \wedge v_2 \neq 0$. Logo $v_1 \wedge v_2$ é E_{V^*}-pequeno e

$$\Big(st_1(v_1 \wedge v_2, int_1(E_{V^*})), st_2(v_1 \wedge v_2, int_2(E_{V^*}))\Big) \in U_{E_{V^*}}.$$

Por outro lado, é fácil deduzir que $E_V \circ E_V \subseteq E_{V^*}$, pelo que podemos afirmar que $E_V \subseteq int_i(E_{V^*})$ $(i \in \{1, 2\})$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) &\leq \Big(st_1(v_1 \wedge v_2, E_V), st_2(v_1 \wedge v_2, E_V)\Big) \\ &\leq \Big(st_1(v_1 \wedge v_2, int_1(E_{V^*})), st_2(v_1 \wedge v_2, int_2(E_{V^*}))\Big).\end{aligned}$$

(b) Para cada elemento E_V-pequeno não nulo x de L, existe um par $(v_1, v_2) \in V$ tal que $x \wedge v_1 \wedge v_2 \neq 0$, pela definição de cobertura conjugada. Obviamente

$$x \leq st(v_1 \wedge v_2, E_V) \leq st_1(v_1, E_V) \wedge st_2(v_2, E_V) = st_1(v_1, V) \wedge st_2(v_2, V).$$

Por conseguinte

$$st_i(x, V) \leq st_i(st_i(v_i, V), V) \leq st_i(st_i(v_i, V), V^*) \quad (i \in \{1, 2\}),$$

logo

$$\begin{aligned}\Big(st_1(x, int_1 E_V), st_2(x, int_2 E_V)\Big) &\leq \Big(st_1(x, V), st_2(x, V)\Big) \\ &\leq \Big(st_1(st_1(v_1, V), V^*), st_2(st_2(v_2, V), V^*)\Big) \in V^{**}.\end{aligned}$$

■

Lema 4.9. *Seja $(L, \mathcal{E})$ um reticulado local quase-uniform de Weil. Para qualquer $F \in \mathcal{E}$, tem-se que:*

(a) $F \subseteq E_{U_{F^2}}$;

(b) $E_{U_F} \subseteq F^3$.

Demonstração. (a) Seja $(x,y) \in F$. Escrevendo y na forma

$$\bigvee\{y \wedge z \mid (z,z) \in F^2, y \wedge z \neq 0\},$$

basta-nos confirmar que

$$(x, y \wedge z) \in k(U_{F^2}) \text{ quando } (z,z) \in F^2 \text{ e } y \wedge z \neq 0. \tag{4.9.1}$$

Ora, como $x \leq st_1(z,F) \leq st_1(z, int_1(F^2))$, $y \wedge z \leq z \leq st_2(z, int_2(F^2))$ e z é F^2-pequeno, então 4.9.1 é de facto verdadeira.

(b) Verifiquemos que $U_F \subseteq F^3$ ou, equivalentemente, que $(x,w) \in F^3$ quando $(x,y) \in int_1(F), (z,w) \in int_2(F), y \wedge s \neq 0, z \wedge s \neq 0$, e s é F-pequeno. O facto de s ser F-pequeno implica que $s \leq st(z,F) \leq st_1(z,F)$, donde $y \wedge st_1(z,F) \neq 0$, isto é, $st_2(y,F) \wedge z \neq 0$. Mas $(x, st_2(y,F)) \in F^2$ e $(z,w) \in F$, logo $(x,w) \in F^3$. ∎

No seguimento, dadas uma quase-uniformidade $\mathcal{U}$ e uma quase-uniformidade de Weil, denotaremos por, respectivamente, $\psi(\mathcal{U})$ e $\psi'(\mathcal{E})$ a quase-uniformidade de Weil gerada por $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ e a quase-uniformidade para a qual $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ é uma base.

Proposição 4.10. *$\psi'\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e $\psi\psi'(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.*

Demonstração. Comecemos por provar que $\psi'\psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. O conjunto $\{U_E \mid E \in \psi(\mathcal{U})\}$ é uma base da quase-uniformidade $\psi'\psi(\mathcal{U})$. Basta agora observar que é também uma base de $\mathcal{U}$, o que é uma consequência do Lema 4.9: por (a), $\{U_E \mid E \in \psi(\mathcal{U})\} \subseteq \mathcal{U}$, e, por (b), para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $V' \in \mathcal{U}$ tal que $U_{E_{V'}} \subseteq V$.

De um modo semelhante, o Lema 4.8 implica que a base $\{E_U \mid U \in \psi'(\mathcal{E})\}$ de $\psi\psi'(\mathcal{E})$ é também uma base de $\mathcal{E}$, o que prova a segunda identidade. ∎

A correspondência $(L,\mathcal{U}) \longmapsto (L, \psi(\mathcal{U}))$ é functorial. Com efeito, ela é a função de objectos do functor de QUFrm em QWUFrm cuja função de morfismos é descrita na proposição seguinte:

Proposição 4.11. *Sejam $(L,\mathcal{U})$ e $(L',\mathcal{U}')$ dois reticulados locais quase-uniformes e seja $f : (L,\mathcal{U}) \longrightarrow (L',\mathcal{U}')$ um homomorfismo uniforme. Então $f : (L, \psi(\mathcal{U})) \longrightarrow (L', \psi(\mathcal{U}'))$ é um homomorfismo uniforme de Weil.*

Demonstração. Provemos que $(f \oplus f)(E) \in \psi(\mathcal{U}')$, para todo o $E \in \psi(\mathcal{U})$. Então, seja E um C-ideal contendo $k(U)$, para algum $U \in \mathcal{U}$. Por hipótese, $f[U] \in \mathcal{U}'$. Basta agora observar que $k(f[U]) \subseteq (f \oplus f)(E)$, o que é trivial pois $(f(u_1), f(u_2)) \in (f \oplus f)(E)$, qualquer que seja $(u_1, u_2) \in U$. ■

Por outro lado, a correspondência $(L, \mathcal{E}) \longmapsto (L, \psi'(\mathcal{E}))$ define um functor de QWUFrm em QUFrm como veremos já de seguida.

Lema 4.12. *Seja $f : (L, \mathcal{E}) \longrightarrow (L', \mathcal{E}')$ um homomorfismo uniforme de Weil. Então, quaisquer que sejam $x, y \in L$ e $i \in \{1, 2\}$, tem-se $f(x) \overset{\mathcal{E}'}{\lhd}_i f(y)$ quando $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i y$.*

Demonstração. O caso $x = 0$ é trivial. Se x é não nulo, como, para todo o $E \in \mathcal{E}$, $(f \oplus f)(E) \in \mathcal{E}'$, é suficiente verificar que $(f \oplus f)(E) \circ (f(x) \oplus f(x)) \subseteq f(y) \oplus f(y)$ sempre que $E \in \mathcal{E}$ é tal que $E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$. Ora $(f \oplus f)(E) = \bigvee\{f(a) \oplus f(b) \mid (a, b) \in E\}$. Recorramos ao Lema 4.2 do Capítulo I:

$$(f \oplus f)(E) \circ (f(x) \oplus f(x)) = \left(\bigcup_{(a,b) \in E} (f(a) \oplus f(b)) \right) \circ \downarrow (f(x), f(x)).$$

Se $(c, d) \in f(a) \oplus f(b)$ para algum $(a, b) \in E$, $(d, e) \in \downarrow (f(x), f(x))$ e $d \neq 0$, então, no caso de $c \neq 0$ ser não nulo (o caso $c = 0$ é óbvio), temos $b \wedge x \neq 0$, e, consequentemente, $(a, x) \in E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$. Então $a \leq y$ e $x \leq y$, donde se deduz $c \leq f(y)$ e $e \leq f(y)$, isto é, $(c, e) \in f(y) \oplus f(y)$. ■

Lema 4.13. *Suponhamos que $f : L \longrightarrow L'$ é um homomorfismo de reticulados locais. Então, quaisquer que sejam $x \in L$ e $E \in L \oplus L$, $st_i(f(x), (f \oplus f)(E)) \leq f(st_i(x, E))$ para $i \in \{1, 2\}$.*

Demonstração. Seja $E = \bigvee_{(a,b) \in E} (a \oplus b)$. Então

$$\begin{aligned}
st_1(f(x), (f \oplus f)(E)) &= st_1\left(f(x), \bigvee_{(a,b) \in E} (f(a) \oplus f(b)) \right) \\
&= st_1\left(f(x), \bigcup_{(a,b) \in E} (f(a) \oplus f(b)) \right) \qquad \text{(pelo Lema 4.1)} \\
&= \bigvee \{f(a) \mid (a, b) \in E, f(b) \wedge f(x) \neq 0\} \\
&\leq f\Big(\bigvee \{a \mid (a, b) \in E, b \wedge x \neq 0\} \Big) = f(st_1(x, E)).
\end{aligned}$$

A prova para $i = 2$ é semelhante. ■

Proposição 4.14. *Sejam* $(L, \mathcal{E})$ *e* $(L', \mathcal{E}')$ *reticulados locais quase-uniformes de Weil e seja* $f : (L, \mathcal{E}) \longrightarrow (L', \mathcal{E}')$ *um homomorfismo uniforme de Weil. Então* $f : (L, \psi'(\mathcal{E})) \longrightarrow (L', \psi'(\mathcal{E}'))$ *é um homomorfismo uniforme.*

Demonstração. Atendendo ao Lema 4.12, f é um homomorfismo de bi-reticulados locais. Com efeito, para cada $a \in L^i$,

$$f(a) = \bigvee\{f(b) \mid b \in L, b\overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i a\}$$

logo

$$f(a) \leq \bigvee\Big\{f(b) \mid f(b)\overset{\mathcal{E}'}{\lhd}_i f(a)\Big\} \leq \bigvee\Big\{x \in L' \mid x\overset{\mathcal{E}'}{\lhd}_i f(a)\Big\},$$

isto é, $f(a) \in L'^i$.

O nosso objectivo é provar que, para todo o $F \in \mathcal{E}$, $f[U_F]$ pertence a $\psi'(\mathcal{E}')$:

Consideremos $G \in \mathcal{E}$ tal que $G^6 \subseteq F$. Então $E_{U_G} \in \psi\psi'(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ logo, por hipótese, $(f \oplus f)(E_{U_G}) \in \mathcal{E}'$. Como $\mathcal{E}' = \psi\psi'(\mathcal{E}')$, podemos considerar $V \in \psi'(\mathcal{E}')$ tal que $E_V \subseteq (f \oplus f)(E_{U_G})$. Podemos ainda supor, sem perda de generalidade, que V é forte. De maneira a mostrar que $f[U_F] \in \psi'(\mathcal{E}')$ provaremos que $V \leq f[U_F]$. Assumamos que $(v_1, v_2) \in V$ com $v_1 \wedge v_2 \neq 0$. Então, existe um par $(x, y) \in U_G$ tal que $v_1 \wedge v_2 \wedge f(x) \wedge f(y) \neq 0$. Consequentemente,

$$v_1 \leq st_1(f(x \wedge y), V) = st_1(f(x \wedge y), E_V) \leq st_1\Big(f(x \wedge y), (f \oplus f)(E_{U_G})\Big),$$

e então, recorrendo ao Lema 4.13, deduzimos que $v_1 \leq f(st_1(x \wedge y, E_{U_G}))$. Recorrendo desta vez ao Lema 4.9 (b) obtemos

$$v_1 \leq f(st_1(x \wedge y, G^3)) \leq f(st_1(x \wedge y, int_1(F))).$$

Analogamente, $v_2 \leq f(st_2(x \wedge y, int_2(F)))$.

Por outro lado, $x \wedge y$ é F-pequeno pois $(x \wedge y, x \wedge y) \in E_{U_G} \subseteq G^3 \subseteq F$, e, concluindo, temos

$$(v_1, v_2) \leq \Big(f(st_1(x \wedge y, int_1(F))), f(st_2(x \wedge y, int_2(F)))\Big) \in f[U_F].$$ ■

Resulta imediatamente das Proposições 4.10, 4.11 e 4.14 que:

Teorema 4.15. *As categorias* QWUFrm *e* QUFrm *são isomorfas.* ■

Notas sobre o Capítulo III:

(1) Em [25], [26] e [27] Fletcher, Hunsaker e Lindgren estudaram a teoria das quase-uniformidades que emerge da teoria dos reticulados locais uniformes de Fletcher e Hunsaker [23]. Como acontece com as uniformidades, esta é também uma abordagem equivalente à nossa.

(2) Além das coberturas e vizinhanças da diagonal, uma quase-uniformidade num conjunto pode ser descrita em termos das chamadas "quase-pseudo-métricas" (pseudométricas não simétricas) [30]. Portanto, existem caracterizações de quase-uniformidades análogas às existentes para uniformidades em termos de coberturas, vizinhanças da diagonal e pseudométricas. Para completar o quadro análogo nos reticulados locais põe-se o problema de saber qual a entidade que nestes poderá representar um papel semelhante ao das quase-pseudométricas no caso espacial, isto é, precisamos de uma teoria de "diâmetros não simétricos".

Esta questão está sob consideração.

CAPÍTULO IV

ESPAÇOS E RETICULADOS LOCAIS DE ADJACÊNCIA NO SENTIDO DE WEIL

Neste capítulo apresentamos a noção de reticulado local de adjacência no sentido de Weil e as suas relações com os reticulados locais de adjacência e com os espaços de adjacência no sentido de Weil (os espaços que emergem como a noção natural de adjacência via vizinhanças da diagonal). Estes espaços, embora distintos dos espaços clássicos de adjacência de Herrlich, formam uma categoria topológica interessante. Provamos que no quadro destes espaços é possível considerar vários tipos de espaços de natureza topológica como, por exemplo, os espaços topológicos simétricos, os espaços de proximidade ou os espaços uniformes. O conceito de Weil de vizinhança da diagonal é, portanto, um conceito topológico básico através do qual diversas noções ou ideias topológicas podem ser expressas.

Estudamos também, com o auxílio das vizinhanças da diagonal de Weil, alguns aspectos dos reticulados locais de proximidade.

1. Espaços de adjacência

Os espaços topológicos são fruto da axiomatização da noção de vizinhança entre um ponto x e um conjunto A (expressa pela relação $x \in cl(A)$). Por seu lado, os espaços de proximidade obtêm-se como axiomatização do conceito de vizinhança entre dois conjuntos (habitualmente denotado por $A\delta B$, i.e., "A está perto de B" [56]) e os espaços de contiguidade expressam o conceito de vizinhança entre os elementos de uma família finita de conjuntos (habitualmente denotado por $\sigma(\mathcal{A})$ [41]).

O conceito de espaço de adjacência foi introduzido por Herrlich [33] (sob a designação "nearness space") como uma axiomatização do conceito de vizinhança entre os elementos de uma família arbitrária de conjuntos (usualmente denotado por $\mathcal{A} \in \xi$ [33]), com o objectivo de unificar diversos tipos de estruturas topológicas; como o autor afirma em [34]:

> "*The aim of this approach is to find a basic topological concept — if possible intuitively accessible — by means of which any topological concept or idea can be expressed*".

Além desta, existem outras axiomatizações (equivalentes) da categoria dos espaços de adjacência e aplicações de adjacência [34]. Aqui preferimos utilizar a que é definida em termos de coberturas.

Definição 1.1. (Herrlich [34]) Sejam X um conjunto e μ uma família não vazia de coberturas de X. Consideremos os seguintes axiomas:

(N1) se $\mathcal{U} \in \mu$, $\mathcal{V} \in \mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ então $\mathcal{V} \in \mu$;

(N2) se $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mu$ então $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mu$;

(N3) se $\mathcal{U} \in \mu$ então

$$int_\mu \mathcal{U} := \{int_\mu U \mid U \in \mathcal{U}\}$$

também pertence a μ, onde, para cada $U \subseteq X$,

$$int_\mu U = \{x \in X \mid \{U, X \setminus x\} \in \mu\}.$$

A família μ chama-se uma *estrutura de pré-adjacência* em X se satisfaz o axioma (N1); μ diz-se uma *estrutura de semiadjacência* em X caso satisfaça (N1) e (N2) e μ é uma *estrutura de adjacência* em X se satisfaz os axiomas (N1), (N2) e (N3). O par (X, μ) diz-se um *espaço de pré-adjacência* (respectivamente *espaço de semiadjacência*, *espaço* *de adjacência*) se μ é uma estrutura de pré-adjacência (respectivamente semiadjacência, adjacência) em X.

Dados dois espaços de pré-adjacência, (X, μ) e (X', μ'), uma função $f : X \longrightarrow X'$ chama-se uma *aplicação de adjacência* de (X, μ) em (X', μ') se f^{-1} preserva coberturas de adjacência, isto é, se $\mathcal{U} \in \mu'$ implica $f^{-1}[\mathcal{U}] \in \mu$.

Denotemos por PNear a categoria dos espaços de pré-adjacência e das aplicações de adjacência e por, respectivamente, SNear e Near as subcategorias plenas de PNear dos espaços de semiadjacência e dos espaços de adjacência.

Observações 1.2.

(a) Se μ é uma pré-adjacência em X então int_μ é um operador em $\mathcal{P}(X)$ tal que

(T0) $x \in int_\mu(X \setminus \{y\})$ se e só se $y \in int_\mu(X \setminus \{x\})$,

(T1) $int_\mu(X) = X$,

(T2) $int_\mu(A) \subseteq A$

e

(T3) $int_\mu(A) \subseteq int_\mu(B)$ se $A \subseteq B$.

No caso de μ ser uma semiadjacência então int_μ também satisfaz o axioma

(T4) $int_\mu(A \cap B) = int_\mu(A) \cap int_\mu(B)$.

Finalmente, se μ é uma adjacência, int_μ satisfaz adicionalmente o axioma

(T5) $int_\mu(int_\mu(A)) = int_\mu(A)$.

Portanto, cada estrutura de adjacência em X induz em X uma topologia satisfazendo o axioma (T0) de Šanin, isto é, uma *topologia simétrica.* Estes espaços topológicos são habitualmente designados na literatura por *espaços topológicos simétricos* ou *espaços* R_0. Denotaremos a subcategoria plena de Top formada por estes espaços por $\mathsf{R_0Top}$. Quando (X, μ) é somente um espaço de semiadjacência então int_μ não é, em geral, um operador de interior mas define simplesmente um espaço de fecho no sentido de Čech [16]. Os espaços de semiadjacência são os "quasi-uniform spaces" de Isbell [38]. A categoria SNear é isomorfa à categoria dos "merotopic spaces" e "merotopic maps" de Katětov [46].

(b) Como (N3) é implicada pela condição (U2) da Definição I.1.3, a categoria dos espaços uniformes é uma subcategoria plena da categoria dos espaços de adjacência. Em [34] Herrlich provou que Near é uma categoria topológica — assim como PNear e SNear — e que as categorias dos espaços topológicos simétricos, dos espaços uniformes, dos espaços de proximidade e dos espaços de contiguidade estão imersas em Near como subcategorias bi-reflectivas (o caso dos espaços uniformes, dos espaços de proximidade e dos espaços de contiguidade) ou como subcategorias bicorreflectivas (o caso dos espaços topológicos simétricos).

2. Reticulados locais de adjacência

O conceito de reticulado local de adjacência foi introduzido por Banaschewski e Pultr [12] como uma generalização dos reticulados locais uniformes: os reticulados locais de adjacência são reticulados locais uniformes sem a propriedade do refinamento (U2). São motivados por várias situações em reticulados locais uniformes que conduzem naturalmente à consideração das adjacências.

Definição 2.1. (Banaschewski e Pultr [12]) Seja L um reticulado local e seja $\mathcal{U} \subseteq Cov(L)$. O par $(L,\mathcal{U})$ é um *reticulado local de adjacência* se:

(N1) $\mathcal{U}$ é um filtro de $(Cov(L), \leq)$;

(N2) para cada $x \in L$ vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{U}}{\triangleleft} x\}$.

Estes são os objectos da categoria NFrm, cujos morfismos — os *homomorfismos uniformes* — são os homomorfismos de reticulados locais $f : (L,\mathcal{U}) \longrightarrow (L',\mathcal{U}')$ tais que $f[U] \in \mathcal{U}'$ sempre que $U \in \mathcal{U}$.

A noção espacial correspondente é a seguinte:

(2.1.1) Os espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ munidos com um filtro μ de coberturas abertas de X tal que, para cada $U \in \mathcal{T}$ e para cada $x \in U$, existem $V \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{U} \in \mu$ com $x \in V$ e $st(V,\mathcal{U}) \subseteq U$.

Com efeito, adaptando os functores aberto e espacial a este contexto obtem-se uma adjunção dual, o functor aberto fazendo corresponder a cada espaço $(X, \mathcal{T}, \mu)$ de 2.1.1 o reticulado local de adjacência $(\mathcal{T}, \mu)$ e o functor espectral aplicando cada reticulado local de adjacência $(L,\mathcal{U})$ no espaço $(ptL, \mathcal{T}_{ptL}, \mu_{ptL})$.

É importante referir que os espaços de 2.1.1 não são os espaços de adjacência de Herrlich; qualquer adjacência μ de um espaço $(X, \mathcal{T}, \mu)$ de 2.1.1 é uma adjacência no sentido de Herrlich mas, no entanto, o recíproco não é verdadeiro. A caracterização dos espaços de adjacência de Herrlich que correspondem aos espaços definidos em 2.1.1 foi dada recentemente por Hong e Kim:

Definição 2.2. (Hong e Kim [37]) Dados dois subconjuntos A e B de um espaço de adjacência (X, μ), $A <_\mu B$ significa que $\{X \setminus A, B\} \in \mu$. Um espaço de adjacência (X, μ) diz-se *locálico* se, quaisquer que sejam $x \in X$ e $A \subseteq X$ tais que $\{x\} <_\mu A$, existe um subconjunto B de X tal que $\{x\} <_\mu B <_\mu A$.

Como, para todo o espaço $(X, \mathcal{T}, \mu)$ definido em 2.1.1, $\mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}$, é fácil de ver que a categoria destes espaços — sendo os morfismos as aplicações $f : (X, \mathcal{T}, \mu) \longrightarrow (X', \mathcal{T}', \mu')$ para as quais $f^{-1}[\mathcal{U}] \in \mu$ se $\mathcal{U} \in \mu'$ — é isomorfa à categoria FrNear dos espaços de adjacência *locálicos* e das aplicações de adjacência. Além disso:

Teorema 2.3. (Hong e Kim [37]) *A categoria* FrNear *é uma subcategoria bi-reflectiva de* Near *e é dualmente equivalente à subcategoria plena* SpNFrm *de* NFrm *dos reticulados locais de adjacência espaciais.* ■

Em resumo, temos:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Near} & & \\
\mathsf{FrNear} \arrow[u, hook, "\text{imersão plena bi-reflectiva}"] \arrow[rr, shift left, "\Omega"] \arrow[d, equal] & & \mathsf{NFrm} \arrow[ll, shift left, "pt"', "\text{adjunção dual}"] \\
\mathsf{FrNear} \arrow[rr, shift left, "\Omega"] & & \mathsf{SpNFrm} \arrow[u, hook, "\text{imersão plena mono-reflectiva}"'] \arrow[ll, shift left, "pt"', "\text{equivalência dual}"]
\end{tikzcd}$$

3. Reticulados locais de adjacência no sentido de Weil

Embarcamos agora no estudo da noção correspondente de adjacência que surge como generalização da nossa noção de uniformidade de Weil.

Definições 3.1.

(1) Uma *adjacência de Weil* em L é uma família $\mathcal{E}$ de vizinhanças da diagonal de Weil tal que:

(NW0) $E^{-1} \in \mathcal{E}$ para todo o $E \in \mathcal{E}$;

(NW1) $\mathcal{E}$ é um filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$;

(NW2) para todo o $x \in L$, $x = \bigvee\{y \in L \mid y \overset{\mathcal{E}}{\triangleleft} x\}$.

(2) Um *reticulado local de adjacência de Weil* é um par $(L, \mathcal{E})$ constituído por um reticulado local L e uma adjacência de Weil em L. Os morfismos da categoria

WNFrm dos reticulados locais de adjacência de Weil — os *homomorfismos uniformes de Weil* — são os homomorfismos de reticulados locais $f : (L, \mathcal{E}) \longrightarrow (L', \mathcal{E}')$ tais que $(f \oplus f)(E) \in \mathcal{E}'$ sempre que $E \in \mathcal{E}$.

Observação 3.2. Como a condição de refinamento (UW2) não é válida numa adjacência de Weil $\mathcal{E}$, $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$ não é equivalente a dizer que $st(x, E) \leq y$ para algum $E \in \mathcal{E}$. Temos simplesmente:

$$\begin{aligned} x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y &\Leftrightarrow \exists E \in \mathcal{E} : st_1(x, E) \leq y \\ &\Leftrightarrow \exists E \in \mathcal{E} : st_2(x, E) \leq y \\ &\Rightarrow \exists E \in \mathcal{E} : st(x, E) \leq y. \end{aligned}$$

Esta última condição ainda implica $x \prec y$. Portanto L é necessariamente regular quando possui uma adjacência de Weil. O recíproco também é verdadeiro: consideremos $\mathcal{E} = WEnt(L)$; se $x \prec y$ então, recorrendo ao Lema 4.2 do Capítulo I, pode-se provar facilmente que

$$\Big((x^* \oplus x^*) \vee (y \oplus y)\Big) \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$$

e então, como $(x^* \oplus x^*) \vee (y \oplus y) \in \mathcal{E}$, $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$.

Em conclusão, um reticulado local L admite uma adjacência de Weil se e só se é regular, como acontece com as adjacências.

A correspondência Ψ, introduzida no Capítulo I de modo a estabelecer um isomorfismo entre as categorias dos reticulados locais uniformes e dos reticulados locais uniformes de Weil, e a sua inversa Ψ^{-1} também funcionam para as categorias correspondentes de estruturas de adjacência (os reticulados locais de adjacência de Banaschewski e Pultr e os reticulados locais de adjacência no sentido de Weil):

$$(L, \mathcal{U}) \in \mathsf{NFrm} \overset{\Psi}{\longmapsto} \Big\{ \bigvee_{x \in U} (x \oplus x) \mid U \in \mathcal{U} \Big\} \text{ forma uma base}$$

para uma adjacência de Weil em L,

$$(L, \mathcal{E}) \in \mathsf{WNFrm} \overset{\Psi^{-1}}{\longmapsto} \Big\{ \{x \in L \mid x \oplus x \subseteq E\} \mid E \in \mathcal{E} \Big\} \text{ forma uma base}$$

para uma adjacência em L.

Estas correspondências constituem uma conexão de Galois entre os conjuntos parcialmente ordenados (por inclusão) das adjacências em L e das adjacências de Weil em L ($1 \leq \Psi\Psi^{-1} \quad \text{e} \quad \Psi^{-1}\Psi \leq 1$). Esta conexão de Galois induz um isomorfismo "maximal" entre o conjunto parcialmente ordenado das adjacências de Weil em L satisfazendo a condição

$$\forall\, E \in \mathcal{E}\ \exists\, F \in \mathcal{E} : F \subseteq \bigvee_{(x,x)\in E} (x \oplus x)$$

e o conjunto parcialmente ordenado das adjacências em L que satisfazem a condição

$$\forall\, U \in \mathcal{U}\ \exists\, V \in \mathcal{U} : \Big(x \oplus x \subseteq \bigvee_{x \in V} (x \oplus x)\ \Rightarrow\ \exists\, u \in U : x \leq u\Big).$$

Portanto, a nossa bijecção entre os reticulados locais uniformes de Weil e os reticulados locais uniformes não pode ser "levantada" para as adjacências. Não sabemos portanto se as categorias WNFrm e NFrm são isomorfas.

4. Espaços de adjacência no sentido de Weil

É natural formular os seguintes problemas:

> Qual é o conceito espacial correspondente à noção escolhida de reticulado local de adjacência de Weil? Pode tal conceito ser expresso em termos de vizinhanças da diagonal de um conjunto?

Definições 4.1. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

(1) Para cada vizinhança da diagonal E de X e cada $x \in X$ seja

$$E[x] = \{y \in X \mid (x,y) \in E\}.$$

Denotemos por $int_{\mathcal{T}}(E)$ (ou, simplesmente, por $int(E)$ quando daí não resultar nenhuma ambiguidade) o subconjunto

$$\Big\{(x,y) \in X \times X \mid x \in int_{\mathcal{T}}(E^{-1}[y]), y \in int_{\mathcal{T}}(E[x])\Big\}$$

de E. Dizemos que E é uma *vizinhança da diagonal interior* se $int(E)$ ainda é uma vizinhança da diagonal de X.

(2) Uma vizinhança da diagonal E de X é *aberta* se $int(E) = E$.

A proposição seguinte tem demonstração óbvia.

Proposição 4.2. *Seja E uma vizinhança da diagonal de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.*

(a) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

  (i) *E é interior;*

  (ii) *E contém alguma vizinhança da diagonal aberta;*

  (iii) *para todo o $x \in X$, $x \in int_{\mathcal{T}}(E[x]) \cap int_{\mathcal{T}}(E^{-1}[x])$.*

(b) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

  (i) *E é aberta;*

  (ii) *para todo o $x \in X$, $E[x]$ e $E^{-1}[x]$ são abertos da topologia $\mathcal{T}$.* ■

Uma adjacência de Weil no reticulado local $\mathcal{T}$ dos abertos de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é um conjunto $\mathcal{E}$ de vizinhanças da diagonal abertas de $(X, \mathcal{T})$ tal que

(Fr0) $E^{-1} \in \mathcal{E}$ para qualquer $E \in \mathcal{E}$,

(Fr1) $\mathcal{E}$ é um filtro (relativamente a $\subseteq$),

(Fr2) para cada $U \in \mathcal{T}$ e para cada $x \in U$ existem $V \in \mathcal{T}$ e $E \in \mathcal{E}$ tais que $x \in V$ e $E \circ (V \times V) \subseteq U \times U$,

pois a condição (Fr2) é precisamente a formulação em $\mathcal{T}$ da condição de admissibilidade (NW2) para reticulados locais de adjacência de Weil. Chamamos aos espaços topológicos $(X, \mathcal{T})$ equipados com um filtro simétrico de vizinhanças da diagonal abertas de $(X, \mathcal{T})$ que satisfazem a condição (Fr2), *espaços de adjacência de Weil locálicos*. Definimos os morfismos da categoria FrWNear dos espaços de adjacência de Weil *locálicos* como as aplicações

$$f : \Big((X, \mathcal{T}), \mathcal{E}\Big) \longrightarrow \Big((X', \mathcal{T}'), \mathcal{E}'\Big)$$

para as quais $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}$ qualquer que seja $E \in \mathcal{E}'$.

Em sentido inverso, pela mesma razão, qualquer adjacência de Weil *locálica* em $(X, \mathcal{T})$ é uma adjacência de Weil no reticulado local $\mathcal{T}$, pelo que as noções espacial e reticular coincidem neste contexto. Portanto, a noção de espaço de adjacência de Weil *locálico* é a noção espacial "correcta" em analogia com a noção de adjacência de Weil para reticulados locais.

Os functores aberto e espectral da Secção I.4 determinam functores contravariantes entre $\mathsf{FrWNear}$ e WNFrm, mas de maneira a obter uma adjunção dual temos de alargar os morfismos a todas as aplicações contínuas e a todos os homomorfismos de reticulados locais, uma vez que a demonstração no Teorema 4.14 do Capítulo I de que $\overline{f}$ é uniforme se baseia na condição de refinamento (UW2).

Vejamos como os espaços de adjacência de Weil *locálicos* podem ser equacionados no contexto de uma generalização dos espaços uniformes de Weil.

Definições 4.3. Sejam X um conjunto e $\mathcal{E}$ um conjunto não vazio de vizinhanças da diagonal de X. Consideremos os seguintes axiomas:

(NW0) $E^{-1} \in \mathcal{E}$ para todo o $E \in \mathcal{E}$;

(NW1) $E \subseteq F,\ E \in \mathcal{E} \ \Rightarrow\ F \in \mathcal{E}$;

(NW2) $E \cap F \in \mathcal{E}$ quaisquer que sejam $E, F \in \mathcal{E}$;

(NW3) para cada $E \in \mathcal{E}$,

$$\Big\{(x,y) \in X \times X \mid x \in int_{\mathcal{E}}(E^{-1}[y]), y \in int_{\mathcal{E}}(E[x])\Big\} \in \mathcal{E},$$

onde, para cada $A \subseteq X$,

$$int_{\mathcal{E}}(A) = \{x \in X \mid \exists E \in \mathcal{E} : E[x] \subseteq A\}.$$

$\mathcal{E}$ chama-se uma *pré-adjacência de Weil* em X se satisfaz as condições (NW0) e (NW1); $\mathcal{E}$ diz-se uma *semiadjacência de Weil* em X caso satisfaça (NW0), (NW1) e (NW2) e $\mathcal{E}$ diz-se uma *adjacência de Weil* em X se satisfaz (NW0), (NW1), (NW2) e (NW3). O par $(X, \mathcal{E})$ é um *espaço de pré-adjacência de Weil* (respectivamente *espaço de semiadjacência de Weil*, *espaço de adjacência de Weil*) se $\mathcal{E}$ é uma pré-adjacência (respectivamente semiadjacência de Weil, adjacência de Weil) em X.

Uma *aplicação de adjacência de Weil* é uma aplicação $f : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (X', \mathcal{E}')$ entre espaços de pré-adjacência de Weil para a qual $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}$ para qualquer $E \in \mathcal{E}'$.

Denotamos por PWNear a categoria dos espaços de pré-adjacência de Weil e aplicações de adjacência de Weil e por SWNear e WNear as subcategorias plenas de PWNear dos espaços de semiadjacência de Weil e dos espaços de adjacência de Weil, respectivamente.

Observações 4.4. (a) Se $(X, \mathcal{E})$ é um espaço de pré-adjacência de Weil então $int_{\mathcal{E}}$ é um operador em $\mathcal{P}(X)$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(T1) $int_{\mathcal{E}}(X) = X$,

(T2) $int_{\mathcal{E}}(A) \subseteq A$ para todo o $A \subseteq X$,

(T3) $A \subseteq B \Rightarrow int_{\mathcal{E}}(A) \subseteq int_{\mathcal{E}}(B)$.

Se $(X, \mathcal{E})$ é um espaço de semiadjacência de Weil então, adicionalmente, $int_{\mathcal{E}}$ satisfaz os axiomas

(T4) $int_{\mathcal{E}}(A \cap B) = int_{\mathcal{E}}(A) \cap int_{\mathcal{E}}(B)$ e

(T0) $x \in int_{\mathcal{E}}(X \setminus \{y\}) \Leftrightarrow y \in int_{\mathcal{E}}(X \setminus \{x\})$.

Finalmente, se $(X, \mathcal{E})$ é um espaço de adjacência de Weil, então $int_{\mathcal{E}}$ também satisfaz o axioma

(T5) $int_{\mathcal{E}}(int_{\mathcal{E}}(A)) = int_{\mathcal{E}}(A)$.

Portanto, uma estrutura de adjacência de Weil $\mathcal{E}$ em X induz em X uma topologia simétrica $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$. O axiom (NW3) diz-nos que $int_{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}}(E) \in \mathcal{E}$ se $E \in \mathcal{E}$.

(b) Os espaços de semiadjacência de Weil são os "semi-uniform spaces" de Čech [16]. Neste caso $int_{\mathcal{E}}$ pode não ser um operador interior; somente define um operador de fecho no sentido de Čech [16].

(c) Na presença de (NW0), (NW1) e (NW2) a condição (NW3) é equivalente à seguinte:

$$\text{(NW3}'\text{)} \qquad \text{para cada } E \in \mathcal{E}, \Big\{(x, y) \in X \times X \mid y \in int_{\mathcal{E}}(E[x])\Big\} \in \mathcal{E}.$$

(d) Todo o espaço uniforme é um espaço de adjacência de Weil pois a condição de refinamento

$$\forall E \in \mathcal{E}\ \exists F \in \mathcal{E}\ :\ F \circ F \subseteq E$$

implica a condição (NW3).

A categoria SWNear é bicorreflectiva em PWNear. Dado um espaço de pré-adjacência de Weil $(X, \mathcal{E})$, se $\mathcal{E}_S$ denotar o conjunto das vizinhanças da diagonal de X que contêm a intersecção de um número finito de elementos de $\mathcal{E}$, então $1_X : (X, \mathcal{E}_S) \longrightarrow (X, \mathcal{E})$ é o morfismo bicorreflector de $(X, \mathcal{E})$ relativamente a SWNear.

A categoria WNear é bi-reflectiva em SWNear. Dado $(X, \mathcal{E}) \in \mathsf{SWNear}$ definamos em $\mathcal{P}(X)$, para cada ordinal α, o operador int^α por

- $int^0(A) = A$,
- $int^\alpha(A) = int^\beta(A) \setminus \{x \in int^\beta(A) \mid \forall E \in \mathcal{E}\ \ E[x] \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$ caso $\alpha = \beta + 1$,
- $int^\alpha(A) = \bigcap_{\beta<\alpha} int^\beta(A)$ caso α seja um ordinal limite.

Então

$$int(A) := \bigcap_{\alpha \in Ord} int^\alpha(A)$$

é o "maior" operador em $\mathcal{P}(X)$ que satisfaz os axiomas (T0), (T1), (T2), (T3), (T4) e (T5), pelo que define uma topologia simétrica $\mathcal{T}$ em X. Fazendo

$$\mathcal{E}_N = \{E \subseteq X \times X \mid int_{\mathcal{T}}(E) \in \mathcal{E}\},$$

$1_X : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (X, \mathcal{E}_N)$ é o morfismo bi-reflector de $(X, \mathcal{E})$ relativamente a WNear.

Daqui em diante, dados dois subconjuntos A e B de um conjunto X, denotamos o conjunto

$$(X \setminus A \times X \setminus A) \cup (B \times B)$$

por $E^X_{A,B}$ (ou simplesmente por $E_{A,B}$ quando com isso não corrermos o risco de ser ambíguos). O conjunto $E^X_{\{x\},B}$ será denotado por $E^X_{x,B}$ (ou $E_{x,B}$).

Dados dois subconjuntos A e B de um espaço de adjacência de Weil $(X, \mathcal{E})$, escrevemos $A <_{\mathcal{E}} B$ quando $E_{A,B} \in \mathcal{E}$.

Lema 4.5. *Seja* $(X,\mathcal{E}) \in \mathsf{WNear}$*. Quaisquer que sejam* $x \in X$ *e* $A, B \subseteq X$*, tem-se que:*

(a) $x <_{\mathcal{E}} A$ *se e só se* $x \in int_{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}}(A)$*;*

(b) *se* $B <_{\mathcal{E}} A$ *então* $B \subseteq int_{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}}(A)$*.*

Demonstração. (a) Se $x <_{\mathcal{E}} A$ basta considerar $E_{x,A} \in \mathcal{E}$. Como $E_{x,A}[x] \subseteq A$ então $x \in int_{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}}(A)$. Reciprocamente, se $E[x] \subseteq A$ e $E \in \mathcal{E}$ consideremos $F = E \cap E^{-1}$. É claro que $F \subseteq E_{x,A}$. Então $E_{x,A} \in \mathcal{E}$.

(b) É óbvio, porque $E_{B,A}[x] \subseteq A$ para todo o $x \in B$. ■

Teorema 4.6. *Suponhamos que* $\big((X,\mathcal{T}),\mathcal{E}\big)$ *é um espaço de adjacência de Weil locálico e seja* $\overline{\mathcal{E}}$ *o filtro de* $(WEnt(X),\subseteq)$ *gerado por* $\mathcal{E}$*. Então:*

(a) $\mathcal{T}_{\overline{\mathcal{E}}} = \mathcal{T}_{\mathcal{E}} = \mathcal{T}$*;*

(b) $(X,\overline{\mathcal{E}})$ *é um espaço de adjacência de Weil satisfazendo a condição*

$$x <_{\overline{\mathcal{E}}} A \Rightarrow \exists B \subseteq X : x <_{\overline{\mathcal{E}}} B <_{\overline{\mathcal{E}}} A.$$

Demonstração. (a) Sejam $A \in \mathcal{T}$ e $x \in A$. Por hipótese, existem $V \in \mathcal{T}$ e $E \in \mathcal{E}$ tais que $x \in V$ e $E \circ (V \times V) \subseteq A \times A$. Então $E^{-1}[x] \subseteq A$, logo $x \in int_{\mathcal{T}_{\mathcal{E}}}(A)$ e $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$. Reciprocamente, se $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$, existe, para cada $x \in A$, $E^x \in \mathcal{E}$ tal que $E^x[x] \subseteq A$. Portanto $A = \bigcup\{E^x[x] \mid x \in A\} \in \mathcal{T}$. Para terminar, provemos a identidade $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\overline{\mathcal{E}}}$. A inclusão $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\overline{\mathcal{E}}}$ é óbvia porque $\mathcal{E} \subseteq \overline{\mathcal{E}}$. A outra inclusão $\mathcal{T}_{\overline{\mathcal{E}}} \subseteq \mathcal{T}$ é também evidente: para cada $x \in A$, sendo $A \in \mathcal{T}_{\overline{\mathcal{E}}}$, existe $E^x \in \overline{\mathcal{E}}$ tal que $E^x[x] \subseteq A$. Mas cada E^x contém algum F^x em $\mathcal{E}$, pelo que $A = \bigcup\{F^x[x] \mid x \in A\} \in \mathcal{T}$.

(b) A prova de que $(X,\overline{\mathcal{E}})$ é um espaço de adjacência de Weil é trivial.

Suponhamos que $x <_{\overline{\mathcal{E}}} A$, ou seja, que $x \in int_{\mathcal{T}_{\overline{\mathcal{E}}}}(A)$. Então $x \in int_{\mathcal{T}}(A)$. Por hipótese, existem $B \in \mathcal{T}$ e $E \in \mathcal{E}$ tais que $x \in B$ e $E \circ (B \times B) \subseteq int_{\mathcal{T}}(A) \times int_{\mathcal{T}}(A)$. Como V é aberto, $x <_{\overline{\mathcal{E}}} B$. Para provar $B <_{\overline{\mathcal{E}}} A$ basta verificar que $E_{B,A} \in \overline{\mathcal{E}}$. Então, consideremos $F = E \cap E^{-1} \in \mathcal{E} \subseteq \overline{\mathcal{E}}$. Temos $F \circ (B \times B) \subseteq A \times A$. Como F é uma vizinhança da diagonal simétrica de X, $F \circ (B \times B) \subseteq A \times A$ é equivalente a $F \subseteq (X \setminus B \times X \setminus B) \cup (A \times A)$. Então $E_{B,A} \in \overline{\mathcal{E}}$. ■

Teorema 4.7. *Seja* $(X, \mathcal{E})$ *um espaço de adjacência de Weil satisfazendo o axioma*

$$\text{(NW4)} \quad x <_{\mathcal{E}} A \Rightarrow \exists B \subseteq X : x <_{\mathcal{E}} B <_{\mathcal{E}} A,$$

e seja $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = \{int_{\mathcal{T}_\mathcal{E}}(E) \mid E \in \mathcal{E}\}$ *o conjunto das vizinhanças da diagonal abertas de* $\mathcal{E}$*. Então* $\left((X, \mathcal{T}_\mathcal{E}), \overset{\circ}{\mathcal{E}}\right)$ *é um espaço de adjacência de Weil locálico.*

Demonstração. Uma vez que $(int(E))^{-1} = int(E^{-1})$, (Fr0) é satisfeita.

O axioma (Fr1) é uma consequência da identidade $int(E_1) \cap int(E_2) = int(E_1 \cap E_2)$.

Verifiquemos o axioma (Fr2): consideremos $U \in \mathcal{T}_\mathcal{E}$ e $x \in U$. Então, recorrendo ao Lema 4.5, $x <_{\mathcal{E}} U$ logo, por hipótese, existe um subconjunto B de X tal que $x <_{\mathcal{E}} B <_{\mathcal{E}} U$. Façamos $V = int_{\mathcal{T}_\mathcal{E}}(B)$. O facto $x <_{\mathcal{E}} B$ significa que $x \in V$. Por outro lado, $B <_{\mathcal{E}} U$ significa que $E_{B,U} \in \mathcal{E}$. Seja $E = int_{\mathcal{T}_\mathcal{E}}(E_{B,U}) \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}$. Então

$$\begin{aligned} E \circ (V \times V) &\subseteq (X \setminus B \times X \setminus B \cup U \times U) \circ (B \times B) \\ &\subseteq U \times U. \end{aligned}$$

■

Corolário 4.8. *A categoria* FrWNear *é isomorfa à subcategoria plena* $\mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW4})}$ *de* WNear *dos espaços de adjacência de Weil que satisfazem* (NW4).

Demonstração. Para cada morfismo $f : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (X', \mathcal{E}')$ de $\mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW4})}$,

$$(f \times f)^{-1}(int(E)) \subseteq int((f \times f)^{-1}(E)).$$

Portanto $f : \left((X, \mathcal{T}_\mathcal{E}), \overset{\circ}{\mathcal{E}}\right) \longrightarrow \left((X', \mathcal{T}_{\mathcal{E}'}), \overset{\circ}{\mathcal{E}'}\right)$ pertence a FrWNear. O recíproco é também verdadeiro.

A existência do isomorfismo é agora um corolário imediato dos Teoremas 4.6 e 4.7 e dos seguintes factos evidentes:

- $\overset{\circ}{\overline{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$ para toda a adjacência de Weil *locálica* $\mathcal{E}$;
- $\overline{\overset{\circ}{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$ para toda a adjacência de Weil $\mathcal{E}$ satisfazendo (NW4).

■

No seguimento identificaremos $\mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW4})}$ com FrWNear.

5. WNear como uma unificação das estruturas topológicas (simétricas) e uniformes

Continuando o estudo dos espaços de adjacência de Weil, será agora natural questionar-mo-nos sobre que relação existe entre os espaços de adjacência de Weil e os espaços de adjacência clássicos de Herrlich ([33], [34]).

A correspondência clássica entre coberturas uniformes e vizinhanças da diagonal uniformes ainda continua válida para estes espaços:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Espaços de adjacência}} & & \boxed{\text{Espaços de adjacência de Weil}} \\
(X,\mu) \arrow[rr, "\Psi"] & & \begin{array}{c}\left\{\bigcup_{U\in\mathcal{U}}(U\times U) \mid \mathcal{U}\in\mu\right\} \\ \text{forma uma base de uma} \\ \text{adjacência de Weil em } X\end{array} \\
\begin{array}{c}\left\{\{E[x] : x\in X\} \mid E\in\mathcal{E}\right\} \\ \text{forma uma base de uma} \\ \text{adjacência em } X\end{array} & & (X,\mathcal{E}) \arrow[ll, "\Psi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Também continuam válidas para morfismos. Estes functores estabelecem uma correspondência de Galois ($\Psi\Psi^{-1} \leq 1$ e $\Psi^{-1}\Psi \leq 1$) que é um isomorfismo precisamente quando restringida às uniformidades.

Apesar de daqui não podermos concluir a equivalência entre as duas noções, a nossa categoria dos espaços de adjacência de Weil possui todas as propriedades categoriais que Herrlich buscava aquando da sua procura da adequada axiomatização de adjacência ([33], [34]).

Por exemplo:

Proposição 5.1. *A categoria* WNear *é uma categoria topológica bem-fibrada sobre a categoria* Set *dos conjuntos.*

Demonstração. O facto de que WNear é bem-fibrada é óbvio: para cada conjunto X, a classe de todas as adjacências de Weil em X é um conjunto, e em qualquer conjunto de cardinal inferior ou igual a um existe exactamente uma adjacência de Weil.

Falta mostrar que o functor de esquecimento $\mathsf{WNear} \xrightarrow{|\cdot|} \mathsf{Set}$ é topológico, isto é, que toda a fonte $|\cdot|$-estruturada $\Big(X \xrightarrow{f_i} |X_i, \mathcal{E}_i|\Big)_{i\in I}$ tem um único levantamento $|\cdot|$-inicial

$$\Big((X,\mathcal{E}) \xrightarrow{f_i} (X_i,\mathcal{E}_i)\Big)_{i\in I}.$$

Consideremos

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} (f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}(E_j) \mid n \in \mathbb{N}, i_j \in I, E_j \in \mathcal{E}_{i_j} \Big\} \cup \{X \times X\}.$$

Trata-se de uma base de uma adjacência de Weil $\mathcal{E}$ em X. Verifiquemos somente o axioma (NW3) — testando a condição equivalente (NW3$'$) da Observação 4.4 (c)— uma vez que os outros são claramente satisfeitos. Portanto, verifiquemos que a intersecção

$$\bigcap_{j=1}^{n} (f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}\Big(\{(x,y) \in X_j \times X_j \mid y \in int_{\mathcal{E}_j}(E_j[x])\}\Big)$$

está contida no conjunto

$$\Big\{(x,y) \in X \times X \mid y \in int_{\mathcal{E}}\Big((\bigcap_{j=1}^{n} (f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}(E_j))[x]\Big)\Big\}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $i_j \in I$ e $E_j \in \mathcal{E}_{i_j}$. Se

$$(x,y) \in \bigcap_{j=1}^{n} (f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}\Big(\{(a,b) \in X_j \times X_j \mid b \in int_{\mathcal{E}_j}(E_j[a])\}\Big)$$

então, para qualquer $j \in \{1,\dots,n\}$, $f_{i_j}(y) \in int_{\mathcal{E}_j}(E_j[f_{i_j}(x)])$, isto é, para cada $j \in \{1,\dots,n\}$ existe $F_j \in \mathcal{E}_j$ tal que $F_j[f_{i_j}(y)] \subseteq E_j[f_{i_j}(x)]$. Por outro lado,

$$(x,y) \in \Big\{(a,b) \in X \times X \mid b \in int_{\mathcal{E}}\Big(\Big(\bigcap_{j=1}^{n} (f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}(E_j)\Big)[a]\Big)\Big\}$$

se e só se existe algum $E \in \mathcal{E}$ para o qual $E[y] \subseteq \Big(\bigcap_{j=1}^{n} (f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}(E_j)\Big)[x]$ ou, equivalentemente, se e só se existem $k_1,\dots,k_m \in I$ e $E_l \in \mathcal{E}_{k_l}$ ($l \in \{1,\dots,m\}$) tais que

$$\Big(\bigcap_{l=1}^{m} (f_{k_l} \times f_{k_l})^{-1}(E_l)\Big)[y] \subseteq \Big(\bigcap_{j=1}^{n} (f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}(E_j)\Big)[x].$$

Fazendo $m := n$, $k_1 := i_1, \ldots, k_m := i_n$ e $E_l := F_l$, para $l \in \{1, \ldots, n\}$, temos, para cada $z \in \Big(\bigcap_{j=1}^{n}(f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}(F_j)\Big)[y]$, $f_{i_j}(z) \in F_j[f_{i_j}(y)]$ qualquer que seja $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $F_j[f_{i_j}(y)] \subseteq E_j[f_{i_j}(x)]$, concluímos que, para todo o $j \in \{1, \ldots, n\}$, $(f_{i_j}(x), f_{i_j}(z)) \in E_j$, ou seja,

$$z \in \Big(\bigcap_{j=1}^{n}(f_{i_j} \times f_{i_j})^{-1}(E_j)\Big)[x].$$

Em conclusão, $\mathcal{B}$ é uma base de uma adjacência de Weil em X. É claro que esta é a menor adjacência $\mathcal{E}$ em X para a qual todo o morfismo $(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{f_i} (X_i, \mathcal{E}_i)$ é uma aplicação de adjacência de Weil. ■

Vamos ver agora que a categoria WNear unifica diversos tipos de estruturas topológicas como, por exemplo, os espaços topológicos simétricos, os espaços de proximidade e os espaços uniformes.

Espaços topológicos simétricos

Lema 5.2. *Num espaço topológico simétrico $(X, \mathcal{T})$ as seguintes asserções são equivalentes:*

(i) $x \in int_{\mathcal{T}}(A)$;

(ii) $E_{x,A}$ *é uma vizinhança da diagonal interior de* $(X, \mathcal{T})$.

Demonstração. (i)⇒(ii): É claro que, se $x \in int_{\mathcal{T}}(A)$, $E_{x,A}$ é uma vizinhança da diagonal de X simétrica. Como

$$E_{x,A}[y] = \begin{cases} A & \text{se } y = x \\ X & \text{se } y \in A \setminus \{x\} \\ X \setminus \{x\} & \text{se } y \in X \setminus A \end{cases}$$

temos

$$int_{\mathcal{T}}(E_{x,A}[y]) = \begin{cases} int_{\mathcal{T}}(A) & \text{se } y = x \\ X & \text{se } y \in A \setminus \{x\} \\ int_{\mathcal{T}}(X \setminus \{x\}) & \text{se } y \in X \setminus A \end{cases}$$

pelo que basta mostrar que $y \in int_{\mathcal{T}}(X \setminus \{x\})$ quando $y \in X \setminus A$. Isto é uma consequência imediata da simetria de $(X, \mathcal{T})$:

$$\begin{aligned} y \in X \setminus A \quad &\Rightarrow \quad A \subseteq X \setminus \{y\} \\ &\Rightarrow \quad x \in int_{\mathcal{T}}(X \setminus \{y\}) \\ &\Rightarrow \quad y \in int_{\mathcal{T}}(X \setminus \{x\}). \end{aligned}$$

<u>(ii)⇒(i)</u>: É óbvio. ■

A implicação (ii)⇒(i) pode ser generalizada do seguinte modo:

Lema 5.3. *Dados dois subconjuntos A e B de um espaço topológico simétrico $(X, \mathcal{T})$, se $E_{B,A}$ é uma vizinhança da diagonal interior de $(X, \mathcal{T})$ então $B \subseteq int_{\mathcal{T}}(A)$.*

Demonstração. Para todo o $b \in B$, $b \in int_{\mathcal{T}}(E_{B,A}[b])$. Como $B \subseteq A$, $E_{B,A}[b] = A$. Então $b \in int_{\mathcal{T}}(A)$. ■

Proposição 5.4. *O conjunto $\mathcal{E}$ das vizinhanças da diagonal interiores de um espaço topológico simétrico $(X, \mathcal{T})$ constitui uma adjacência de Weil em X que satisfaz o axioma*

(NW5) *se $int_{\mathcal{T}}(E)$ é uma vizinhança da diagonal de X então $E \in \mathcal{E}$,*

e a topologia induzida por $\mathcal{E}$ coincide com $\mathcal{T}$.

Demonstração. A conclusão de que $\mathcal{E}$ é uma adjacência de Weil em X satisfazendo (NW5) é imediata. Provemos que $\mathcal{T}$ coincide com a topologia induzida por $\mathcal{E}$, isto é, qualquer que seja o subconjunto A de X,

$$int_{\mathcal{T}}(A) = \{x \in X \mid \exists E \in \mathcal{E} : E[x] \subseteq A\}.$$

Dado $x \in int_{\mathcal{T}}(A)$, consideremos a vizinhança da diagonal $E_{x,A}$, que, pelo Lema 5.2, pertence a $\mathcal{E}$. Claramente, $E_{x,A}[x] = A$. Reciprocamente, se existe algum $E \in \mathcal{E}$ tal que $E[x] \subseteq A$, então $x \in int_{\mathcal{T}}(E[x]) \subseteq int_{\mathcal{T}}(A)$. ■

Proposição 5.5. *Sendo $\mathcal{E}$ uma adjacência de Weil num conjunto X satisfazendo* (NW5)*, existe exactamente uma topologia simétrica $\mathcal{T}$ em X tal que o conjunto das vizinhanças da diagonal interiores de $(X, \mathcal{T})$ coincide com $\mathcal{E}$.*

Demonstração. Basta considerar a topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ induzida por $\mathcal{E}$. Já vimos que $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ é uma topologia simétrica em X. Por (NW5), $\mathcal{E}$ contém todas as vizinhanças da diagonal interiores de $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$. A inclusão contrária decorre de (NW3): seja $E \in \mathcal{E}$; então $int(E)$ pertence a $\mathcal{E}$ e é, em particular, uma vizinhança da diagonal. Portanto E é uma vizinhança da diagonal interior.

A conclusão de que esta é a única topologia nas condições requeridas segue da proposição anterior. ■

Os resultados anteriores mostram que os espaços topológicos simétricos podem ser identificados como espaços de adjacência de Weil satisfazendo o axioma (NW5).

Proposição 5.6. *Seja $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}')$ uma aplicação entre espaços topológicos simétricos e seja $\mathcal{E}_{(X,\mathcal{T})}$ (respectivamente $\mathcal{E}_{(X',\mathcal{T}')}$) o conjunto das vizinhanças da diagonal interiores de $(X, \mathcal{T})$ (respectivamente $(X', \mathcal{T}')$). As seguintes afirmações equivalem-se:*

(i) *f é contínua;*

(ii) *$E \in \mathcal{E}_{(X',\mathcal{T}')}$ implica $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}_{(X,\mathcal{T})}$.*

Demonstração. (i)⇒(ii): Sejam $E \in \mathcal{E}_{(X',\mathcal{T}')}$ e $F = (f \times f)^{-1}(E)$. Tem-se

$$int_{\mathcal{T}}(F[x]) = int_{\mathcal{T}}(f^{-1}(E[f(x)])).$$

Além disso

$$f^{-1}(int_{\mathcal{T}'}(E[f(x)])) \subseteq int_{\mathcal{T}}(f^{-1}(E[f(x)]))$$

porque

$$f^{-1}(int_{\mathcal{T}'}(E[f(x)])) \subseteq f^{-1}(E[f(x)])$$

e, por hipótese, $f^{-1}(int_{\mathcal{T}'}(E[f(x)])) \in \mathcal{T}$. Ora E é interior. Em particular, para cada $x \in X$, $f(x) \in int_{\mathcal{T}'}(E[f(x)])$, ou seja, $x \in f^{-1}(int_{\mathcal{T}'}(E[f(x)]))$. Portanto $x \in int_{\mathcal{T}}(F[x])$. Analogamente, $x \in int_{\mathcal{T}}(F^{-1}[x])$. Logo $F \in \mathcal{E}_{(X,\mathcal{T})}$.

(ii)⇒(i): Suponhamos que $V \in \mathcal{T}'$ e seja $v \in V$. Então, pelo Lema 5.2, $E^{X'}_{v,V} \in \mathcal{E}_{(X',\mathcal{T}')}$. Por consequência $(f \times f)^{-1}(E^{X'}_{v,V}) \in \mathcal{E}_{(X,\mathcal{T})}$, isto é, $E^{X}_{f^{-1}(v),f^{-1}(V)} \in \mathcal{E}_{(X,\mathcal{T})}$. Atendendo ao Lema 5.3, $f^{-1}(v) \subseteq int_{\mathcal{T}}(f^{-1}(V))$ para qualquer $v \in V$, donde

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{v \in V} f^{-1}(v) \subseteq int_{\mathcal{T}}(f^{-1}(V)),$$

i.e., $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. ■

Decorre das Proposições 5.4, 5.5 e 5.6 que a categoria $\mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW5})}$ dos espaços de adjacência de Weil satisfazendo (NW5) é isomorfa à categoria dos espaços topológicos simétricos. Por conseguinte, temos um modo alternativo de equipar um conjunto com uma estrutura topológica simétrica: prescrevendo o conjunto das vizinhanças da diagonal interiores. Além disso:

Proposição 5.7. *A categoria* $\mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW5})}$ *é uma subcategoria bicorreflectiva de* WNear.

Demonstração. Dado um espaço de adjacência de Weil $(X, \mathcal{E})$, denotemos por $\mathcal{E}_T$ o conjunto das vizinhanças da diagonal interiores de $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$. Já sabemos que $(X, \mathcal{E}_T)$ é um espaço de adjacência de Weil que satisfaz (NW5). Adicionalmente, para cada morfismo $f : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (X', \mathcal{E}')$ em WNear, $f : (X, \mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \longrightarrow (X', \mathcal{T}_{\mathcal{E}'})$ é contínua donde, recorrendo à Proposição 5.6, $f : (X, \mathcal{E}_T) \longrightarrow (X', \mathcal{E}'_T)$ também é um morfismo de WNear. Obtemos então um functor

$$\begin{array}{ccc} T : \mathsf{WNear} & \longrightarrow & \mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW5})} \\ (X, \mathcal{E}) & \longmapsto & (X, \mathcal{E}_T) \\ \Big((X, \mathcal{E}) \xrightarrow{f} (X', \mathcal{E}')\Big) & \longmapsto & \Big((X, \mathcal{E}_T) \xrightarrow{f} (X', \mathcal{E}'_T)\Big), \end{array}$$

que é a correflexão. Como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_T$, $id : (X, \mathcal{E}_T) \longrightarrow (X, \mathcal{E})$ está em WNear e é o morfismo correflector de $(X, \mathcal{E})$. ■

Espaços uniformes

Observámos em 4.4 que a categoria Unif é uma subcategoria plena de WNear. Além disso:

Proposição 5.8. *A categoria* Unif *é bi-reflectiva em* WNear.

Demonstração. Para cada $(X,\mathcal{E})$ em WNear seja

$$\mathcal{E}_U = \{E \in \mathcal{E} \mid \exists (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } \mathcal{E} \text{ tal que } E_1 = E \text{ e } E_{n+1}^2 \subseteq E_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Evidentemente, $(X,\mathcal{E}_U)$ é um espaço uniforme e $1_X : (X,\mathcal{E}) \longrightarrow (X,\mathcal{E}_U)$ pertence a WNear. Este é o morfismo bi-reflector; de facto, dado $f : (X,\mathcal{E}) \longrightarrow (X',\mathcal{E}')$ em WNear com $(X',\mathcal{E}') \in$ Unif, $f : (X,\mathcal{E}_U) \longrightarrow (X',\mathcal{E}')$ é uniformemente contínua: para cada $E \in \mathcal{E}'$, como $(X',\mathcal{E}')$ é uniforme, existe uma família $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{E}'$ tal que $E_n = E$ e $E_{n+1}^2 \subseteq E_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a família $\Big((f\times f)^{-1}(E_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ que está em $\mathcal{E}$. Isto mostra que $(f\times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}_U$. ■

Espaços de proximidade

A primeira axiomatização de espaço de proximidade foi apresentada por Efremovič em [19], em termos da relação de proximidade (ou infinitesimal) "A está perto de B" (habitualmente denotada por $A\delta B$ [56]) para subconjuntos A e B de um conjunto arbitrário:

Definições 5.9. (Efremovič [19], [20]; cf. Naimpally e Warrack [56])

(1) Seja X um conjunto e seja δ uma relação binária em $\mathcal{P}(X)$. O par (X,δ) diz-se um *espaço de proximidade* se δ for uma *relação infinitesimal* em X, ou seja:

(I1) $A\delta B$ implica $B\delta A$;

(I2) $A\delta(B\cup C)$ se e só se $A\delta B$ or $A\delta C$;

(I3) $A\delta B$ implica $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;

(I4) $A\not\delta B$ implica a existência de um subconjunto C de X tal que $A\not\delta C$ e $(X\setminus C)\not\delta B$;

(I5) $A\delta B$ se $A \cap B \neq \emptyset$.

(2) Sejam (X_1, δ_1) e (X_2, δ_2) dois espaços de proximidade. Uma aplicação $f : X_1 \longrightarrow X_2$ é uma *aplicação infinitesimal* se $A\delta_1 B$ implica $f(A)\delta_2 f(B)$ quaisquer que sejam $A, B \subseteq X_1$.

(3) Os espaços de proximidade e as aplicações infinitesimais são os objectos e os morfismos da categoria Prox.

São bem conhecidos os resultados que garantem que Prox é isomorfa à categoria TBUnif dos espaços uniformes totalmente limitados e das aplicações uniformemente contínuas e que TBUnif é bi-reflectiva em Unif. Então, uma vez que as categorias consideradas são topológicas, decorre da Proposição 5.8 que:

Proposição 5.10. Prox *é, a menos de isomorfismo, uma subcategoria bi-reflectiva de* WNear. ■

Reencontraremos este resultado como consequência de uma caracterização dos espaços de proximidade em termos de adjacências de Weil que apresentaremos em seguida. Utilizaremos a seguinte axiomatização alternativa dos espaços de proximidade (v. p. ex. Naimpally e Warrack [56] ou Smirnov [70]):

Teorema 5.11. (Efremovič [20]) *A categoria* Prox *é isomorfa à categoria cujos objectos são os pares* $(X, \ll)$*, onde* X *é um conjunto e* $\ll$ *uma relação binária em* $\mathcal{P}(X)$ *tal que*

(P1) $X \ll X$ *e* $\emptyset \ll \emptyset$*,*

(P2) $A \ll B$ *implica* $A \subseteq B$*,*

(P3) $A \subseteq B \ll C \subseteq D$ *implica* $A \ll D$*,*

(P4) $A \ll C$ *e* $B \ll C$ *implicam* $A \cup B \ll C$*,*

(P5) $A \ll B$ *e* $A \ll C$ *implicam* $A \ll B \cap C$*,*

(P6) *se* $A \ll B$ *existe um subconjunto* C *de* X *tal que* $A \ll C \ll B$*,* (P7) $A \ll B$ *implica* $X \setminus B \ll X \setminus A$,

e cujos morfismos são as funções $f : (X_1, \ll_1) \longrightarrow (X_2, \ll_2)$ *para as quais* $f^{-1}(A) \ll_1 f^{-1}(B)$ *sempre que* $A \ll_2 B$. ■

As relações $\ll$ e os morfismos definidos em 5.11 são habitualmente designados por, respectivamente, *proximidades* e *aplicações de proximidade.*

Uma simples verificação mostra que $<_\mathcal{E}$ é uma proximidade em X no caso de $(X, \mathcal{E})$ pertencer a FrWNear.

Consideremos o problema recíproco de munir um espaço de proximidade com uma estrutura (functorial) de adjacência de Weil *locálica.*

Lema 5.12. *Seja* $(X, \ll)$ *um espaço de proximidade.*

(a) *Se* $A \ll C \ll B$ *então* $(E_{A,C} \cap E_{C,B}) \circ (E_{A,C} \cap E_{C,B}) \subseteq E_{A,B}$.

(b) *Se* $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_{A_i,B_i}$, $E' = \bigcap_{i=1}^{n} E_{C_i,D_i}$ *e, para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i \ll C_i \ll D_i \ll B_i$, *então, para cada* $x \in X$, $E'[x] \ll E[x]$.

(c) *Se* $\bigcap_{i=1}^{n} E_{A_i,B_i} \subseteq E_{A,B}$ *e, para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A_i \ll B_i$, *então* $A \ll B$.

Demonstração. (a) Sejam $(x,y),(y,z) \in E_{A,C} \cap E_{C,B}$ tais que $(x,z) \notin X \setminus A \times X \setminus A$. No caso de x pertencer a A, y pertence necessariamente a C, o que, por seu lado, implica $z \in B$. Então $(x,z) \in B \times B \subseteq E_{A,B}$.

O caso $z \in A$ pode ser provado de um modo semelhante.

(b) Um cálculo muito simples mostra que, para cada $x \in X$, $E_{C,D}[x] \ll E_{A,B}[x]$ se $A \ll C \ll D \ll B$. Uma demonstração por indução sobre $n \geq 1$ é agora evidente:

Se $E = \bigcap_{i=1}^{n+1} E_{A_i,B_i}$ e $E' = \bigcap_{i=1}^{n+1} E_{C_i,D_i}$ com $A_i \ll C_i \ll D_i \ll B_i$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, então, para cada $x \in X$,

$$E'[x] = E_{C_1,D_1}[x] \cap \bigcap_{i=2}^{n+1} E_{C_i,D_i}[x].$$

Da hipótese de indução e do caso $n = 1$ entretanto provado, deduzimos

$$E'[x] \ll E_{A_1,B_1}[x] \cap \bigcap_{i=2}^{n+1} E_{A_i,B_i}[x] = E[x].$$

(c) Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ seja C_i tal que $A_i \ll C_i \ll B_i$. Uma aplicação de (a) produz

$$\bigcap_{i=1}^{n} (E_{A_i,C_i} \cap E_{C_i,B_i})^2 \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} E_{A_i,B_i} \subseteq E_{A,B}.$$

Seja

$$E = \bigcap_{i=1}^{n} (E_{A_i,C_i} \cap E_{C_i,B_i})$$

e definamos

$$X_1 = \{x \in X \mid E[x] \cap A = \emptyset\}$$

e

$$X_2 = \{x \in X \mid E[x] \cap A \neq \emptyset\}.$$

Note-se que $X_2 \neq \emptyset$ se $A \neq \emptyset$ e que, além disso, $A \subseteq X \setminus \bigcup_{x \in X_1} E[x]$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ consideremos A'_i, C'_i, C''_i e B'_i tais que

$$A_i \ll A'_i \ll C'_i \ll C_i \ll C''_i \ll B'_i \ll B_i.$$

De (b) deduzimos que, para todo o $x \in X$, $E'[x] \ll E[x]$, onde E' denota a vizinhança da diagonal

$$\bigcap_{i=1}^{n} (E_{A'_i,C'_i} \cap E_{C''_i,B'_i}).$$

Então temos

$$A \subseteq X \setminus \bigcup_{x \in X_1} E[x] \subseteq X \setminus \bigcup_{x \in X_1} E'[x] \subseteq \bigcup_{x \in X_2} E'[x].$$

É agora fácil de concluir que, devido à forma especial de E', existe um subconjunto finito F_2 de X_2 tal que

$$\bigcup_{x \in X_2} E'[x] = \bigcup_{x \in F_2} E'[x];$$

com efeito, uma vez que E' é da forma $\bigcap_{j=1}^{2n} E_{A''_j,B''_j}$ temos

$$\bigcup_{x \in X_2} E'[x] = \bigcup_{x \in X_2} \bigcap_{j=1}^{2n} (E_{A''_j,B''_j}[x]),$$

e basta agora, para formar F_2, escolher um e um só elemento de cada um dos seguintes 3^{2n} conjuntos (disjuntos dois a dois) que seja não vazio

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap A_{2n-1}'' \cap A_{2n}''$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap A_{2n-1}'' \cap (B_{2n}'' \setminus A_{2n}'')$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap A_{2n-1}'' \cap (X \setminus B_{2n}'')$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap (B_{2n-1}'' \setminus A_{2n-1}'') \cap A_{2n}''$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap (B_{2n-1}'' \setminus A_{2n-1}'') \cap (B_{2n}'' \setminus A_{2n}'')$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap (B_{2n-1}'' \setminus A_{2n-1}'') \cap (X \setminus B_{2n}'')$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap (X \setminus B_{2n-1}'') \cap A_{2n}''$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap (X \setminus B_{2n-1}'') \cap (B_{2n}'' \setminus A_{2n}'')$$

$$X_2 \cap A_1'' \cap A_2'' \cap \ldots \cap (X \setminus B_{2n-1}'') \cap (X \setminus B_{2n}'')$$

$$\vdots$$

$$X_2 \cap (X \setminus B_1'') \cap (X \setminus B_2'') \cap \ldots \cap (X \setminus B_{2n-1}'') \cap (X \setminus B_{2n}''),$$

e cuja união coincide com X_2.

Então, por (b),

$$A \subseteq \bigcup_{x \in F_2} E'[x] \ll \bigcup_{x \in F_2} E[x].$$

Se $y \in E[x]$ para algum $x \in F_2$, existe $a \in A$ com $(x, a) \in E$. Como E é simétrica,

$$(a, y) \in E^2 \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (E_{A_i,C_i} \cap E_{C_i,B_i})^2 \subseteq E_{A,B}$$

e, consequentemente, $y \in B$. Logo $\bigcup_{x \in F_2} E[x] \subseteq B$ e $A \ll B$. ■

Proposição 5.13. *Suponhamos que* $(X, \ll)$ *é um espaço de proximidade. Então*

$$\{E_{A,B} \mid A, B \subseteq X \text{ e } A \ll B\}$$

é uma sub-base de uma uniformidade de Weil locálica $\mathcal{E}(\ll)$ *em* X*. Além disso, a proximidade* $<_{\mathcal{E}(\ll)}$ *induzida por* $\mathcal{E}(\ll)$ *coincide com* $\ll$*.*

Demonstração. É óbvio que $\mathcal{E}(\ll)$ é uma família não vazia de vizinhanças da diagonal de X. Pelo Lema 5.12 (a), $\mathcal{E}_{\ll}$ é mesmo uma uniformidade de Weil em X. A conclusão de que $(X, \mathcal{E}(\ll))$ é *locálica* decorre imediatamente da asserção (c) do mesmo lema:

$$\begin{aligned} x <_{\mathcal{E}(\ll)} A \quad &\Leftrightarrow \quad E_{x,A} \in \mathcal{E}(\ll) \\ &\Rightarrow \quad x \ll A \\ &\Rightarrow \quad \exists B \subseteq X : x \ll B \ll A \\ &\Rightarrow \quad x <_{\mathcal{E}(\ll)} B <_{\mathcal{E}(\ll)} A. \end{aligned}$$

A parte não trivial da equivalência entre as relações binárias $<_{\mathcal{E}(\ll)}$ e $\ll$ é também um corolário imediato do Lema 5.12 (c). ■

A conclusão de que cada $int(E_{A,B})$ pertence a $\mathcal{E}(\ll)$ se $A \ll B$ podia ser deduzida directamente da observação de que $E_{cl(A),int(B)} \subseteq int(E_{A,B})$, recordando o seguinte resultado de proximidades

$$A \ll B \Rightarrow cl(A) \ll int(B).$$

Isto é suficiente para concluir que, se $E \in \mathcal{E}(\ll)$, $int(E) \in \mathcal{E}(\ll)$.

Para cada $(X, \mathcal{E}) \in \mathsf{FrWNear}$ satisfazendo

$$\text{(NW6)} \quad \forall E \in \mathcal{E} \ \exists A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n \subseteq X : \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_{A_i,B_i} \subseteq E \text{ e } \bigcap_{i=1}^{n} E_{A_i,B_i} \in \mathcal{E} \right),$$

a adjacência de Weil $\mathcal{E}(<_{\mathcal{E}})$ induzida por $<_{\mathcal{E}}$ coincide com $\mathcal{E}$. Portanto, os espaços de proximidade podem ser identificados como os espaços de adjacência de Weil *locálicos* que satisfazem (NW6). O mesmo acontece com os morfismos:

Proposição 5.14. *Sejam* $(X_1, \ll_1)$ *e* $(X_2, \ll_2)$ *espaços de proximidade. Uma aplicação* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *é uma aplicação de proximidade de* $(X_1, \ll_1)$ *em* $(X_2, \ll_2)$ *se e só se é uma aplicação de adjacência de Weil de* $(X_1, \mathcal{E}(\ll_1))$ *em* $(X_2, \mathcal{E}(\ll_2))$*.*

Demonstração. Suponhamos que $E \in \mathcal{E}(\ll_2)$ e sejam $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n \subseteq X_2$ tais que $\bigcap_{i=1}^{n} E^{X_2}_{A_i,B_i} \subseteq E$ e $A_i \ll_2 B_i$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então, para cada i, $f^{-1}(A_i) \ll_1 f^{-1}(B_i)$ e, portanto,

$$\bigcap_{i=1}^{n} E^{X_1}_{f^{-1}(A_i),f^{-1}(B_i)} \in \mathcal{E}(\ll_1).$$

Basta agora, para provar que $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}(\ll_1)$, verificar que $(f \times f)^{-1}(E)$ contém a intersecção

$$\bigcap_{i=1}^{n} E^{X_1}_{f^{-1}(A_i),f^{-1}(B_i)},$$

o que é evidente pois cada $E^{X_1}_{f^{-1}(A_i),f^{-1}(B_i)}$ é igual a $(f \times f)^{-1}(E^{X_2}_{A_i,B_i})$.

Reciprocamente, suponhamos que $A \ll_2 B$. Então $E^{X_2}_{A,B} \in \mathcal{E}(\ll_2)$ e consequentemente

$$E^{X_1}_{f^{-1}(A),f^{-1}(B)} = (f \times f)^{-1}(E^{X_2}_{A,B}) \in \mathcal{E}(\ll_1).$$

Pelo Lema 5.12, $f^{-1}(A) \ll_1 f^{-1}(B)$. ■

Corolário 5.15. *As categorias* Prox *e* $\mathsf{FrWNear}_{(\mathsf{NW6})}$ *são isomorfas.* ■

Observemos que a categoria $\mathsf{FrWNear}_{(\mathsf{NW6})}$ é uma subcategoria bi-reflectiva de FrWNear:

Para cada $(X, \mathcal{E})$ em FrWNear já sabemos que $(X, \mathcal{E}(<_{\mathcal{E}}))$ pertence a $\mathsf{FrWNear}_{(\mathsf{NW6})}$. Como $\mathcal{E}(<_{\mathcal{E}}) \subseteq \mathcal{E}$,

$$1_X : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (X, \mathcal{E}(<_{\mathcal{E}}))$$

está em FrWNear, e este é o morfismo bi-reflector de $(X, \mathcal{E})$ em $\mathsf{FrWNear}_{(\mathsf{NW6})}$; com efeito, se $f : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (X', \mathcal{E}')$ pertence a FrWNear, com $(X', \mathcal{E}') \in \mathsf{FrWNear}_{(\mathsf{NW6})}$, $f : (X, \mathcal{E}(<_{\mathcal{E}})) \longrightarrow (X', \mathcal{E}')$ também pertence a FrWNear: para cada $E \in \mathcal{E}'$ podemos escrever $\bigcap_{i=1}^{n} E^{X'}_{A_i,B_i} \subseteq E$ onde cada $E^{X'}_{A_i,B_i} \in \mathcal{E}'$. Portanto

$$E^{X}_{f^{-1}(A_i),f^{-1}(B_i)} = (f \times f)^{-1}(E^{X'}_{A_i,B_i})$$

pertence a $\mathcal{E}$ e, como

$$\bigcap_{i=1}^{n} E^{X}_{f^{-1}(A_i),f^{-1}(B_i)} \subseteq (f \times f)^{-1}(E),$$

$(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}(<_{\mathcal{E}})$.

6. Reticulados locais de proximidade

A noção de proximidade num conjunto em termos da relação $\ll$ é imediatamente traduzível para a linguagem de reticulados locais:

Definições 6.1. (Frith [29])

(1) Seja L um reticulado local e seja $\ll$ uma relação binária em L. O par $(L, \ll)$ é um *reticulado local de proximidade* se:

- (P1) $1 \ll 1$ e $0 \ll 0$;
- (P2) $x \ll y$ implica $x \prec y$;
- (P3) $x \leq y \ll z \leq w$ implica $x \ll w$;
- (P4) $x_1 \ll y$ e $x_2 \ll y$ implicam $x_1 \vee x_2 \ll y$;
- (P5) $x \ll y_1$ e $x \ll y_2$ implicam $x \ll y_1 \wedge y_2$;
- (P6) se $x \ll y$ existe $z \in L$ tal que $x \ll z \ll y$;
- (P7) $x \ll y$ implica $y^* \ll x^*$;
- (P8) $x = \bigvee\{y \in L \mid y \ll x\}$ para todo o $x \in L$.

(2) Sejam $(L_1, \ll_1)$ e $(L_2, \ll_2)$ reticulados locais de proximidade. Um *homomorfismo de proximidade* $f : (L_1, \ll_1) \longrightarrow (L_2, \ll_2)$ é um homomorfismo de reticulados locais $f : L_1 \longrightarrow L_2$ satisfazendo a condição

$$\forall\, x, y \in L_1 \left(x \ll_1 y \Rightarrow f(x) \ll_2 f(y) \right).$$

(3) Denotamos por PFrm a categoria dos reticulados locais de proximidade e dos homomorfismos de proximidade.

Será instrutivo ver como um isomorfismo análogo ao isomorfismo entre Prox e $\mathsf{FrWNear}_{(\mathsf{NW6})}$ pode ser estabelecido para reticulados locais. Com ele obtemos uma nova caracterização dos reticulados locais de proximidade.

Proposição 6.2. *Se* $(L, \mathcal{E})$ *é um reticulado local uniforme de Weil então* $(L, \overset{\mathcal{E}}{\triangleleft})$ *é um reticulado local de proximidade.*

Demonstração. A condição (P7) é uma consequência da implicação

$$E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y \Rightarrow E^{-1} \circ (y^* \oplus y^*) \subseteq x^* \oplus x^*.$$

As outras condições foram provadas na Proposição 4.8 do Capítulo I. ■

Observação 6.3. Quando $x \vee y = 1$, o C-ideal $(x \oplus x) \vee (y \oplus y)$ é uma vizinhança da diagonal de Weil em L. O recíproco é também verdadeiro visto ser um corolário da seguinte propriedade dos C-ideais gerados por conjuntos descendentes de $L \times L$, e que pode ser provada de um modo análogo ao Lema I.4.2 considerando o conjunto

$$\mathbf{E} = \{E \in \mathcal{D}(L \times L) \mid A \subseteq E \subseteq k(A) \text{ e } x \vee y \leq c \text{ qualquer que seja } (x, y) \in E \setminus \mathbb{O}\} :$$

> *seja* $c \in L$*; se* $A \in \mathcal{D}(L \times L)$ *é tal que* $x \vee y \leq c$ *para qualquer* $(x, y) \in A \setminus \mathbb{O}$*, então* $x \vee y \leq c$ *para qualquer* $(x, y) \in k(A) \setminus \mathbb{O}$*.*

Portanto, em qualquer reticulado local de proximidade $(L, \ll)$, como $\ll$ é mais forte que $\prec$,

$$E_{x,y} := (x^* \oplus x^*) \vee (y \oplus y)$$

é uma vizinhança da diagonal de Weil sempre que $x \ll y$. Estas vizinhanças da diagonal são muito importantes como veremos. Por exemplo, caracterizam a relação $\overset{\mathcal{E}}{\triangleleft}$ para qualquer adjacência de Weil $\mathcal{E}$ em L:

Proposição 6.4. *Seja* $\mathcal{E}$ *uma adjacência de Weil em* L*. Então* $x \overset{\mathcal{E}}{\triangleleft} y$ *se e só se* $E_{x,y} \in \mathcal{E}$*.*

Demonstração. Suponhamos que existe $E \in \mathcal{E}$ satisfazendo $E \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$. Daqui resulta que $a \leq x^* \vee y$ sempre que $(a, a) \in E$, e consequentemente $x^* \vee y = 1$. Então $E \cap E^{-1} \subseteq E_{x,y}$. Com efeito, se $(a, b) \in E \cap E^{-1}$ e $b \leq x^*$ tem-se:

- se $a \leq x^*$ então $(a, b) \in x^* \oplus x^* \subseteq E_{x,y}$;
- senão, caso $a \wedge x \neq 0$, então $(b, a) \in E \circ (x \oplus x)$ logo $b \leq y$. Nesse caso $b \leq x^* \wedge y$. Ora $(1, x^* \wedge y) = (x^* \vee y, x^* \wedge y) \in E_{x,y}$ pelo que $(a, b) \in E_{x,y}$.

Por outro lado, se $b \wedge x \neq 0$ então $a \leq y$. No caso de $a \leq x^*$ temos $(a, b) \leq (x^* \wedge y, 1) \in E_{x,y}$. Se $a \not\leq x^*$ então $b \leq y$ e, novamente, $(a, b) \in E_{x,y}$.

A implicação contrária segue da inclusão $E_{x,y} \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$. ■

De aqui em diante, dados um conjunto descendente E de $L \times L$ e $a \in L$, denotamos o elemento

$$\bigvee \{b \in L \mid (a, b) \in E\}$$

por $E[a]$. Em particular, tem-se:

Proposição 6.5. *Sejam $x, y \in L$ com $x \prec y$. Então*

$$E_{x,y}[a] = \begin{cases} 1 & \textit{se } a \in [0, x^* \wedge y] \\ x^* & \textit{se } a \in [0, x^*] \cap (L \setminus [0, y]) \\ y & \textit{se } a \in (L \setminus [0, x^*]) \cap [0, y] \\ x^* \wedge y & \textit{se } a \in L \setminus ([0, x^*] \cup [0, y]). \end{cases}$$

Demonstração. Antes de mais notemos que, como $E_{x,y} \circ (x \oplus x) \subseteq y \oplus y$,

$$\text{se } (a, b) \in E_{x,y} \text{ e } b \wedge x \neq 0 \text{ então } a \leq y. \tag{6.5.1}$$

Agora, suponhamos que $(a, b) \in E_{x,y}$ e $a \leq x^* \wedge y$. O par $(x^* \wedge y, 1)$ está em $E_{x,y}$ donde $(a, 1) \in E_{x,y}$ e, portanto, $E_{x,y}[a] = 1$.

O caso $a \in [0, x^*] \cap (L \setminus [0, y])$ é também claro: por 6.5.1, necessariamente $b \leq x^*$; como $(a, x^*) \in E_{x,y}$, então $E_{x,y}[a] = x^*$.

Se $a \in (L \setminus [0, x^*]) \cap [0, y]$ temos $(a, y) \in E_{x,y}$. Além disso, sempre que $(a, b) \in E_{x,y}$, $(b, a) \in E_{x,y}$ e, como $a \wedge x \neq 0$, $b \leq y$. Então $E_{x,y}[a] = y$ se $a \not\leq x^*$ e $a \leq y$.

Finalmente, no caso de $a \wedge x \neq 0$ e $a \not\leq y$ temos, por 6.5.1, $b \leq y$ e $b \wedge x = 0$ qualquer que seja $(a, b) \in E_{x,y}$. Portanto $b \leq x^* \wedge y$ sempre que $(a, b) \in E_{x,y}$. Como $(a, x^* \wedge y) \leq (1, x^* \wedge y) \in E_{x,y}$ podemos concluir que, neste caso, $E_{x,y}[a] = x^* \wedge y$. ■

Segue-se o enunciado de uma propriedade simples que nos será útil posteriormente.

Lema 6.6. *Sejam* $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{D}(L \times L)$. *Então*

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\Big)[x] = \bigwedge_{i=1}^{n}(E_i[x]). \qquad \blacksquare$$

A prova do Lema 5.12 é imitada na prova do lema seguinte com excepção de, quando naquela usamos pontos, nesta apresentamos processos para os evitar.

Lema 6.7. *Seja* $(L, \ll)$ *um reticulado local de proximidade.*

(a) *Se* $x \ll z \ll y$ *então* $(E_{x,z} \cap E_{z,y}) \circ (E_{x,z} \cap E_{z,y}) \subseteq E_{x,y}$.

(b) *Se* $E = \bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i,y_i}$, $E' = \bigcap_{i=1}^{n} E_{z_i,w_i}$ *e, para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \ll z_i \ll w_i \ll y_i$, *então, para todo o* $a \in L$, $E'[a] \ll E[a]$.

(c) *Se* $\bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i,y_i} \subseteq E_{x,y}$ *e, para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \ll y_i$, *então* $x \ll y$.

Demonstração. (a) Como $(L \oplus L, \cap, \bigvee)$ é um reticulado local, tem-se

$$\begin{aligned} E_{x,z} \cap E_{z,y} &= (x^* \wedge z^* \oplus x^* \wedge z^*) \vee (x^* \wedge y \oplus x^* \wedge y) \vee (z \wedge y \oplus z \wedge y) \\ &= ((x \vee z)^* \oplus (x \vee z)^*) \vee (x^* \wedge y \oplus x^* \wedge y) \vee (z \wedge y \oplus z \wedge y). \end{aligned}$$

Por outro lado, um cálculo simples mostra que, quaisquer que sejam (a, b) e (b, c) pertencentes a

$$((x \vee z)^* \oplus (x \vee z)^*) \cup (x^* \wedge y \oplus x^* \wedge y) \cup (z \wedge y \oplus z \wedge y),$$

tais que $a, b, c \neq 0$, o par (a, c) pertence a $E_{x,y}$. Isto é suficiente para concluir que

$$(E_{x,z} \cap E_{z,y}) \circ (E_{x,z} \cap E_{z,y}) \subseteq E_{x,y}.$$

(b) Provemos a veracidade desta asserção por indução sobre $n \geq 1$. Quando $x \ll z \ll w \ll y$ temos

$$E_{x,y}[a] = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in [0, x^* \wedge y] \\ x^* & \text{se } a \in [0, x^*] \cap (L \setminus [0, y]) \\ y & \text{se } a \in (L \setminus [0, x^*]) \cap [0, y] \\ x^* \wedge y & \text{se } a \in L \setminus ([0, x^*] \cup [0, y]). \end{cases}$$

e

$$E_{z,w}[a] = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in [0, z^* \wedge w] \\ z^* & \text{se } a \in [0, z^*] \cap (L \setminus [0, w]) \\ w & \text{se } a \in (L \setminus [0, z^*]) \cap [0, w] \\ z^* \wedge w & \text{se } a \in L \setminus ([0, z^*] \cup [0, w]). \end{cases}$$

As propriedades de $\ll$ asseguram-nos que, para cada $a \in L$, $E_{z,w}[a] \ll E_{x,y}[a]$, e o caso $n = 1$ está provado.

Suponhamos que a fórmula é válida para um inteiro positivo n e provemo-la para $n+1$. Se $E = \bigcap_{i=1}^{n+1} E_{x_i,y_i}$ e $E' = \bigcap_{i=1}^{n+1} E_{z_i,w_i}$, sendo $x_i \ll z_i \ll w_i \ll y_i$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, obtemos, por intermédio do Lema 6.6,

$$E'[a] = \Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_{z_i,w_i}\Big)[a]\Big) \wedge E_{z_{n+1},w_{n+1}}[a],$$

para todo o $a \in L$. Portanto

$$E'[a] \ll \Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i,y_i}\Big)[a]\Big) \wedge E_{x_{n+1},y_{n+1}}[a] = E[a].$$

(c) Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ seja z_i tal que $x_i \ll z_i \ll y_i$. De (a) deduzimos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} (E_{x_i,z_i} \cap E_{z_i,y_i})^2 \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i,y_i} \subseteq E_{x,y}.$$

Seja $E = \bigcap_{i=1}^{n}(E_{x_i,z_i} \cap E_{z_i,y_i})$ e definamos

$$L_1 = \{a \in L \setminus \{0\} \mid E[a] \wedge x = 0\}$$

e

$$L_2 = \{a \in L \setminus \{0\} \mid E[a] \wedge x \neq 0\}.$$

Como E é uma vizinhança da diagonal de Weil, L_2 é vazio somente quando $x = 0$. Evidentemente $x \leq \bigwedge_{a \in L_1}(E[a]^*)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ consideremos $x_i', z_i', z_i'', y_i' \in L$ tais que

$$x_i \ll x_i' \ll z_i' \ll z_i \ll z_i'' \ll y_i' \ll y_i.$$

Recorrendo a (b) podemos concluir que, para todo o $a \in L$, $E'[a] \ll E[a]$, sendo E' a vizinhança da diagonal de Weil $\bigcap_{i=1}^{n}(E_{x_i',z_i'} \cap E_{z_i'',y_i'})$. Então

$$x \leq \bigwedge_{a \in L_1} (E[a]^*) \leq \bigwedge_{a \in L_1} (E'[a]^*) = \Big(\bigvee_{a \in L_1} E'[a]\Big)^*.$$

Como E' é uma vizinhança da diagonal de Weil, temos ainda

$$\bigvee_{a\in L_1} E'[a] \vee \bigvee_{a\in L_2} E'[a] = 1,$$

o que implica

$$\Big(\bigvee_{a\in L_1} E'[a]\Big)^* \leq \bigvee_{a\in L_2} E'[a].$$

Portanto

$$x \leq \bigvee_{a\in L_2}\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(E_{x_i',z_i'}\cap E_{z_i'',y_i'})\Big)[a]\Big).$$

Exprimamos este último elemento na forma $\bigvee_{a\in L_2}\Big((\bigcap_{i=1}^{2n}E_{u_j,v_j})[a]\Big)$ onde, para cada $j\in\{1,\ldots,2n\}$, $u_j \ll v_j$. Então,

$$x \leq \bigvee_{a\in L_2}\bigwedge_{j=1}^{2n}(E_{u_j,v_j}[a]).$$

Em seguida, escolhamos exactamente um elemento de cada um dos seguintes 4^{2n} conjuntos — disjuntos dois a dois e cuja união coincide com L_2 — que seja não vazio

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*\wedge v_{2n-1}]\cap[0,u_{2n}^*\wedge v_{2n}]$$

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*\wedge v_{2n-1}]\cap[0,u_{2n}^*]\cap(L\setminus[0,v_{2n}])$$

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*\wedge v_{2n-1}]\cap(L\setminus[0,u_{2n}^*])\cap[0,v_{2n}]$$

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*\wedge v_{2n-1}]\cap(L\setminus([0,u_{2n}^*]\cup[0,v_{2n}]))$$

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*]\cap(L\setminus[0,v_{2n-1}])\cap[0,u_{2n}^*\wedge v_{2n}]$$

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*]\cap(L\setminus[0,v_{2n-1}])\cap[0,u_{2n}^*]\cap(L\setminus[0,v_{2n}])$$

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*]\cap(L\setminus[0,v_{2n-1}])\cap(L\setminus[0,u_{2n}^*])\cap[0,v_{2n}]$$

$$L_2\cap[0,u_1^*\wedge v_1]\cap[0,u_2^*\wedge v_2]\cap\ldots\cap[0,u_{2n-1}^*]\cap(L\setminus[0,v_{2n-1}])\cap(L\setminus([0,u_{2n}^*]\cup[0,v_{2n}]))$$

$$L_2 \cap [0, u_1^* \wedge v_1] \cap [0, u_2^* \wedge v_2] \cap \ldots \cap (L \setminus [0, u_{2n-1}^*]) \cap [0, v_{2n-1}] \cap [0, u_{2n}^* \wedge v_{2n}]$$

$$\vdots$$

$$L_2 \cap (L \setminus ([0, u_1^*] \cup [0, v_1])) \cap (L \setminus ([0, u_2^*] \cup [0, v_2])) \cap \ldots \cap (L \setminus ([0, u_{2n}^*] \cup [0, v_{2n}])),$$

e designemos por F_2 o conjunto por eles formado. Claramente

$$\bigvee_{a \in L_2} \bigwedge_{j=1}^{2n} (E_{u_j, v_j}[a]) = \bigvee_{a \in F_2} \bigwedge_{j=1}^{2n} (E_{u_j, v_j}[a]).$$

Agora já é possível aplicar (b) e concluir que

$$x \leq \bigvee_{a \in F_2} E'[a] \ll \bigvee_{a \in F_2} E[a].$$

Para finalizar a demonstração basta-nos confirmar que $\bigvee_{a \in F_2} E[a] \leq y$:

Se $(a, b) \in E$ com $a \in F_2$, existe $c \in L$ tal que $(a, c) \in E$ e $c \wedge x \neq 0$. Ora a é não nulo e E é simétrica, logo $(c, b) \in E^2 \subseteq E_{x,y}$. Então $b \leq y$, pois $c \wedge x \neq 0$, o que mostra que $\bigvee_{a \in F_2} E[a] \leq y$. ■

O lema precedente implica imediatamente a proposição seguinte.

Proposição 6.8. *Seja* $(L, \ll)$ *um reticulado local de proximidade. Então*

$$\{E_{x,y} \mid x, y \in L, x \ll y\}$$

é uma sub-base de uma uniformidade de Weil $\mathcal{E}(\ll)$ *em* L*. Além disso, a proximidade* $\overset{\mathcal{E}(\ll)}{\lhd}$ *induzida por* $\mathcal{E}(\ll)$ *coincide com* $\ll$*.* ■

A proposição seguinte é também evidente.

Proposição 6.9. *Se* $(L, \mathcal{E})$ *é um reticulado local uniforme de Weil que satisfaz*

$$\text{(UW5)}\ \forall E \in \mathcal{E}\ \ \exists x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in L : \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i, y_i} \subseteq E \ \text{ e } \ \bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i, y_i} \in \mathcal{E} \right),$$

então a uniformidade de Weil $\mathcal{E}(\overset{\mathcal{E}}{\lhd})$ *induzida por* $\overset{\mathcal{E}}{\lhd}$ *coincide com* $\mathcal{E}$*.* ■

Denotemos por $\mathsf{WUFrm}_{(\mathsf{UW5})}$ a subcategoria plena de WUFrm dos reticulados locais uniformes de Weil satisfazendo (UW5). Trata-se de uma subcategoria bicorreflectiva de WUFrm; se $(L,\mathcal{E})$ é um reticulado local uniforme de Weil e $\mathcal{E}_P$ é o conjunto das vizinhanças da diagonal E de L para as quais existem $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in L$ tais que $\bigcap_{i=1}^n E_{x_i,y_i} \subseteq E$ e $\bigcap_{i=1}^n E_{x_i,y_i} \in \mathcal{E}$, então $1_L : (L,\mathcal{E}_P) \longrightarrow (L,\mathcal{E})$ é o morfismo bicorreflector de $(L,\mathcal{E})$ relativamente a $\mathsf{WUFrm}_{(\mathsf{UW5})}$.

As proposições anteriores permitem-nos apresentar uma nova caracterização dos reticulados locais de proximidade:

Teorema 6.10. *As categorias* PFrm *e* $\mathsf{WUFrm}_{(\mathsf{UW5})}$ *são isomorfas.*

Para completar a demonstração deste teorema começaremos por recordar um resultado auxiliar bem conhecido.

Lema 6.11. *Se $f : L_1 \longrightarrow L_2$ é um homomorfismo de reticulados locais e se $x, y \in L_1$ com $x \prec y$, então $f(y)^* \leq f(x^*)$.*

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} x \prec y \quad &\Leftrightarrow \quad x^* \vee y = 1 \\ &\Rightarrow \quad f(x^*) \vee f(y) = 1 \\ &\Rightarrow \quad f(x^*) \vee f(y)^{**} = 1. \end{aligned}$$

Então $f(y)^* \prec f(x^*)$ e, por conseguinte, $f(y)^* \leq f(x^*)$. ■

Demonstração do teorema. De acordo com as Proposições 6.2, 6.8 e 6.9 basta mostrar que um homomorfismo de reticulados locais $f : L_1 \longrightarrow L_2$ entre dois reticulados locais de proximidade, $(L_1, \ll_1)$ e $(L_2, \ll_2)$, é um homomorfismo de proximidade se e só se é um homomorfismo uniforme de Weil de $(L_1, \mathcal{E}(\ll_1))$ para $(L_2, \mathcal{E}(\ll_2))$. Portanto, seja f um homomorfismo de proximidade. Para cada $E \in \mathcal{E}(\ll_1)$ podemos escrever $\bigcap_{i=1}^n E_{x_i,y_i} \subseteq E$, onde $x_i \ll_1 y_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então

$$(f \oplus f)(E) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} (f \oplus f)(E_{x_i,y_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} \Big((f(x_i^*) \oplus f(x_i^*)) \vee (f(y_i) \oplus f(y_i)) \Big).$$

Consideremos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $z_i, w_i \in L$ tais que $x_i \ll_1 z_i \ll_1 w_i \ll_1 y_i$. Atendendo ao lema, temos

$$(f(x_i^*) \oplus f(x_i^*)) \vee (f(y_i) \oplus f(y_i)) \supseteq (f(z_i)^* \oplus f(z_i)^*) \vee (f(w_i) \oplus f(w_i)) = E_{f(z_i), f(w_i)}.$$

Portanto $(f \oplus f)(E) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} E_{f(z_i), f(w_i)}$. Como, por hipótese, $f(z_i) \ll_2 f(w_i)$, então $(f \oplus f)(E) \in \mathcal{E}(\ll_2)$.

Reciprocamente, se $x \ll_1 y$ então $(f \oplus f)(E_{x,y}) \in \mathcal{E}(\ll_2)$. Como $(f \oplus f)(E_{x,y}) \subseteq E_{f(x), f(y)}$, a vizinhança da diagonal $E_{f(x), f(y)}$ também pertence a $\mathcal{E}(\ll_2)$ e podemos escrever $\bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i, y_i} \subseteq E_{f(x), f(y)}$ para $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in L_2$ com $x_i \ll_2 y_i$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$. É suficiente agora aplicar o Lema 6.7 (c) para concluir que $f(x) \ll_2 f(y)$. ■

Em [29], Frith provou que os conceitos de proximidade e uniformidade totalmente limitada são ainda equivalentes para reticulados locais. Como um reticulado local uniforme é totalmente limitado se possui uma base de coberturas finitas, somos conduzidos à seguinte definição:

Definição 6.12. Uma vizinhança da diagonal de Weil E é *finita* desde que existam $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ em L tais que $x_i \prec y_i$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, e $\bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i, y_i} = E$.

Esta é a noção "correcta" de vizinhança da diagonal finita se quisermos obter o Teorema 6.10 com a seguinte formulação:

> "*A categoria* PFrm *é isomorfa à subcategoria plena de* WUFrm *dos reticulados locais uniformes de Weil que possuem uma base de vizinhanças da diagonal finitas*".

Da Observação 6.3 decorre que as condições $x_i \prec y_i$ na Definição 6.12 são redundantes pois cada E_{x_i, y_i} por conter E é também uma vizinhança da diagonal de Weil.

Referenciaremos por $FWEnt(L)$ o filtro de $(WEnt(L), \subseteq)$ gerado pelas vizinhanças da diagonal de Weil finitas.

Quando L é normal, esta noção de finitude tem uma formulação mais natural:

Proposição 6.13. *Suponhamos que L é normal. Então $FWEnt(L)$ coincide com o filtro de $WEnt(L)$ gerado por*

$$\Big\{\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \oplus x_i) \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in L, \bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1\Big\}.$$

Demonstração. Consideremos $E \in FWEnt(L)$. Então existem $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in L$ tais que $x_i \prec y_i$, para todo o $i \in \{1, \ldots, n\}$, e $\bigcap_{i=1}^{n} E_{x_i,y_i} \subseteq E$. Como cada E_{x_i,y_i} pertence ao conjunto

$$\Big\{\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \oplus x_i) \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in L, \bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1\Big\},$$

E pertence ao filtro por ele gerado.

Reciprocamente, consideremos $\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \oplus x_i)$ com $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1$. A normalidade de L assegura-nos a existência de $y_1, \ldots, y_n \in L$ tais que $\bigvee_{i=1}^{n} y_i = 1$ e $y_i \prec x_i$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $(L \oplus L, \cap, \bigvee)$ é um reticulado local, uma simples indução sobre $n \geq 1$ permite-nos deduzir que

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_{y_i,x_i} = \bigvee_{z_1 \in \{y_1^*, x_1\}} \cdots \bigvee_{z_n \in \{y_n^*, x_n\}} (z_1 \wedge \ldots \wedge z_n \oplus z_1 \wedge \ldots \wedge z_n).$$

Ora $(y_1^* \wedge \ldots \wedge y_n^*) \oplus (y_1^* \wedge \ldots \wedge y_n^*) = \mathbb{O}$. Então $\bigcap_{i=1}^{n} E_{y_i,x_i} \subseteq \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \oplus x_i)$ e portanto $\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \oplus x_i) \in FWEnt(L)$. ■

Como acontece com as adjacências [12], os seguintes resultados básicos relativos à noção de finitude escolhida são também verdadeiros como se esperaria:

Proposição 6.14. *Dado um reticulado local regular compacto L, os filtros $FWEnt(L)$ e $WEnt(L)$ coincidem e formam a única adjacência de Weil existente em L. Além disso, esta adjacência é uma uniformidade.*

Demonstração. Já referimos na Observação 3.2 que $WEnt(L)$ é uma adjacência de Weil em L quando L é regular.

A compacidade de L implica que toda a vizinhança da diagonal de Weil E contenha $\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \oplus x_i)$ para alguma cobertura finita $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de L. Como todo o reticulado local regular compacto é normal, deduzimos da Proposição 6.13 que

$WEnt(L) = FWEnt(L)$. Para provar a unicidade, é suficiente mostrar que cada adjacência de Weil $\mathcal{E}$ em L contém todas as vizinhanças da diagonal do tipo $\bigvee_{i=1}^n (x_i \oplus x_i)$ para $\bigvee_{i=1}^n x_i = 1$. Portanto, seja $\mathcal{E}$ uma adjacência de Weil em L e consideremos uma cobertura finita $\{x_1, \dots, x_n\}$ de L. Pela compacidade, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existem $y_1^i, \dots, y_{j_i}^i \in L$ tais que

$$y_k^i \overset{\mathcal{E}}{\lhd} x_i \text{ para } k \in \{1, \dots, j_i\}$$

e

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{j_i} y_k^i = 1.$$

Seja $E_k^i \in \mathcal{E}$ tal que $E_k^i \circ (y_k^i \oplus y_k^i) \subseteq x_i \oplus x_i$ e consideremos uma vizinhança da diagonal simétrica E em $\mathcal{E}$ tal que $E \subseteq \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{k=1}^{j_i} E_k^i$. Um cálculo simples mostra que $E \subseteq \bigvee_{i=1}^n (x_i \oplus x_i)$: seja $(a, b) \in E$ com $a, b \neq 0$. Como $b \neq 0$, existem $i \in \{1, \dots, n\}$ e $k \in \{1, \dots, j_i\}$ tais que $b \wedge y_k^i \neq 0$. Então, $(a, b \wedge y_k^i) \in E$ e $(b \wedge y_k^i, y_k^i) \in y_k^i \oplus y_k^i$ implicam $a \leq x_i$. Por simetria, $b \leq x_i$ também. Em conclusão, $\bigvee_{i=1}^n (x_i \oplus x_i) \in \mathcal{E}$, como desejávamos.

Por fim, provemos que a família $FWEnt(L)$ é uma uniformidade. Na demonstração da Proposição 6.13 vimos que, quando $\bigvee_{i=1}^n x_i = 1$, existem $y_1, \dots, y_n$ tais que $\bigvee_{i=1}^n y_i = 1$, $y_i \prec x_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\bigcap_{i=1}^n E_{y_i, x_i} \subseteq \bigvee_{i=1}^n (x_i \oplus x_i)$. Este resultado pode ser aperfeiçoado de modo a implicar que $FWEnt(L)$ seja uma uniformidade; de facto,

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_{y_i, x_i}\Big)^2 \subseteq \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \oplus x_i)$$

como em seguida justificamos.

Recorrendo ao Lema I.4.2, podemos escrever $\left(\bigcap_{i=1}^n E_{y_i, x_i}\right)^2$ na forma

$$\begin{aligned} &\bigcap_{z_1 \in \{y_1^*, x_1\}} \cdots \bigcap_{z_n \in \{y_n^*, x_n\}} (z_1 \wedge \ldots \wedge z_n \oplus z_1 \wedge \ldots \wedge z_n) \circ \\ &\circ \bigcap_{z_1 \in \{y_1^*, x_1\}} \cdots \bigcap_{z_n \in \{y_n^*, x_n\}} (z_1 \wedge \ldots \wedge z_n \oplus z_1 \wedge \ldots \wedge z_n). \end{aligned}$$

Consideremos $(a, b) \in (z_1 \wedge \ldots \wedge z_n) \oplus (z_1 \wedge \ldots \wedge z_n)$ e $(b, c) \in (z_1' \wedge \ldots \wedge z_n') \oplus (z_1' \wedge \ldots \wedge z_n')$, para $z_1, z_1' \in \{y_1^*, x_1\} \dots, z_n, z_n' \in \{y_n^*, x_n\}$ e com $a, b, c \neq 0$. Como $y_1^* \wedge \ldots \wedge y_n^* = 0$, existe necessariamente $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z_j = z_j' = x_j$, o que implica $(a, c) \in x_j \oplus x_j$. ■

Proposição 6.15. *$FWEnt(L)$ é uma uniformidade de Weil caso L seja regular e normal.*

Demonstração. Está contida na prova do resultado precedente. ■

Observação 6.16. Reservámos o adjectivo *finito* para as vizinhanças da diagonal de Weil definidas em 6.12, guiados pelo teorema que estabelece um isomorfismo entre as categorias PFrm e $\mathsf{WUFrm}_{(\mathsf{UW5})}$.

Note-se no entanto que substituindo no enunciado da Proposição 6.15 o filtro $FWEnt(L)$ pelo filtro de $WEnt(L)$ gerado por

$$\{\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \oplus x_i) \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in L, \bigvee_{i=1}^{n} x_i = 1\},$$

obteríamos uma equivalência.

Recordemos a axiomatização dos espaços de proximidade em termos das relações infinitesimais δ (Definição 5.9). Terminamos este capítulo com uma breve discussão sobre relações infinitesimais para reticulados locais.

Proposição 6.17. *Se $(L, \ll)$ é um reticulado local de proximidade, a relação binária em L definida por*

$$x\delta y \equiv x \not\ll y^*$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(I1) *$x\delta y$ implica $y\delta x$;*

(I2) *$x\delta(y \vee z)$ se e só se $x\delta y$ or $x\delta z$;*

(I3) *$x\delta y$ implica $x \neq 0$ e $y \neq 0$;*

(I4) *se $x\not\delta y$ então existe $z \in L$ tal que $x\not\delta z$ e $y\not\delta z^*$;*

(I5) *$x^* \vee y^* \neq 1$ implica $x\delta y$;*

(I6) *para cada $x \in L$ vale $x = \bigvee\{y \in L \mid y \leq x$ e $y\not\delta x^*\}$.*

Demonstração. (I1) Temos

$$\begin{aligned} x\not\delta y &\Leftrightarrow x \ll y^* \\ &\Rightarrow y^{**} \ll x^* && \text{pela propriedade (P7)} \\ &\Rightarrow y \ll x^* && \text{pela propriedade (P3)} \\ &\Leftrightarrow y\not\delta x. \end{aligned}$$

(I2) Se $x\delta(y \vee z)$ então $x \not\ll (y \vee z)^* = y^* \wedge z^*$. Daqui resulta, por (P5), que $x \not\ll y^*$ ou $x \not\ll z^*$. Reciprocamente, se $x\delta y$, então $x \not\ll (y \vee z)^*$ por (P3). Logo $x\delta(y \wedge z)$. Caso $x\delta z$, temos também $x\delta(y \vee z)$, de um modo análogo.

(I3) $x \not\ll y^*$ implica, por (P1) e (P3), $x \neq 0$ e $y^* \neq 1$, isto é, $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

(I4) Se $x \ll y^*$ existe, atendendo à propriedade (P5), $w \in L$ tal que $x \ll w \ll y^*$. Ponhamos $z := w^*$; então $x \ll w \leq w^{**} = z^*$, logo $x\not\delta z$. Além disso $y \leq y^{**} \ll w^* = z \leq z^{**}$ e, consequentemente, $y\not\delta z^*$.

(I5) Como

$$x^* \vee y^* \neq 1 \Leftrightarrow x \not\prec y^*$$

podemos deduzir, usando (P2), que $x\delta y$.

(I6) Por (P8) temos $x = \bigvee\{y \in L \mid y \ll x\} \leq \bigvee\{y \in L \mid y \leq x, y\not\delta x^*\} \leq x$. ■

Observemos que, como $x \wedge y \neq 0$ implica $x^* \vee y^* \neq 1$, (I5) diz-nos, em particular, que $x\delta y$ se $x \wedge y \neq 0$. Na hipótese de L ser booleano o recíproco é também verdadeiro e a condição (I5) é então equivalente à condição

$$x \wedge y \neq 0 \text{ implica } x\delta y.$$

Chamamos a uma relação binária δ que satisfaça as propriedades (I1)-(I6) uma *relação infinitesimal* e, neste caso, o par (L, δ) diz-se um *reticulado local infinitesimal*.

A correspondência de 6.17 é, contudo, invertível somente para reticulados locais booleanos:

Proposição 6.18. *Se (L, δ) é um reticulado local infinitesimal, a relação binária $\ll$ dada por*

$$x \ll y \equiv x\not\delta y^*$$

é uma proximidade em L se e só se L é booleano.

Demonstração. Se $\ll$ é uma proximidade então, para cada $x \in L$, $x^{**} = \bigvee\{y \in L \mid y \ll x^{**}\}$. Mas

$$y \ll x^{**} \Leftrightarrow y \not\delta x^{***} \Leftrightarrow y \ll x.$$

Consequentemente, $x^{**} = \bigvee\{y \in L \mid y \ll x\} = x$ e L é booleano.

Como num reticulado local booleano a lei de DeMorgan $(x_1 \wedge x_2)^* = x_1^* \vee x_2^*$ também é válida, a prova de que $\ll$ é uma proximidade quando L é booleano é consequência imediata das propriedades de δ. ■

Estes dois resultados mostram que existe uma correspondência bijectiva nos reticulados locais booleanos entre as proximidades e as relações infinitesimais.

Proposição 6.19. *Seja $f : (L_1, \ll_1) \longrightarrow (L_2, \ll_2)$ um homomorfismo de reticulados locais entre dois reticulados locais booleanos de proximidade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *f é um homomorfismo de proximidade;*

(ii) *para $x, y \in L_1$ vale $f(x) \not\delta_{\ll_2} f(y)$ sempre que $x \not\delta_{\ll_1} y$.*

Demonstração. É uma consequência imediata do facto de, para qualquer homomorfismo de reticulados locais $f : L_1 \longrightarrow L_2$, sendo L_1 booleano, $f(x^*) = f(x)^*$ para todo o $x \in L_1$. ■

Definamos um *homomorfismo infinitesimal* $f : (L_1, \delta_1) \longrightarrow (L_2, \delta_2)$ entre reticulados locais infinitesimais como um homomorfismo de reticulados locais $f : L_1 \longrightarrow L_2$ para o qual $f(x) \not\delta_2 f(y)$ sempre que $x \not\delta_1 y$.

Corolário 6.20. *A subcategoria plena de* PFrm *dos reticulados locais booleanos de proximidade é isomorfa à categoria dos reticulados locais booleanos infinitesimais e homomorfismos infinitesimais.* ■

Em conclusão, é possível estender aos reticulados locais booleanos a caracterização das proximidades via relações infinitesimais.

Lema 6.21. *Seja $\mathcal{E}$ uma adjacência de Weil em L. Se $(x \oplus y) \cap E = \mathbb{O}$ para algum $E \in \mathcal{E}$ então $x \leq y^*$ e $y \leq x^*$.*

Demonstração. Como $(x \oplus y) \cap E = \mathbb{O}$ é equivalente a $(y \oplus x) \cap E^{-1} = \mathbb{O}$, basta provar uma das desigualdades. Provemos a primeira, ou seja, que $x \wedge y = 0$. Temos $x \wedge y = \bigvee\{x \wedge y \wedge a \mid (a, a) \in E\}$. Ora, para cada $(a, a) \in E$, $(x \wedge y \wedge a, x \wedge y \wedge a) \in (x \oplus y) \cap E = \mathbb{O}$, logo $x \wedge y = 0$. ■

Proposição 6.22. *Seja $\mathcal{E}$ uma adjacência de Weil em L. As seguintes asserções são equivalentes:*

(i) $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y^*$;

(ii) $(x \oplus y) \cap E = \mathbb{O}$ *para algum* $E \in \mathcal{E}$;

(iii) *existe* $E \in \mathcal{E}$ *tal que, qualquer que seja* $x' \in \downarrow\{x\} \setminus \{0\}$, $E[x'] \wedge y = 0$;

(iv) *existe* $E \in \mathcal{E}$ *tal que, qualquer que seja* $y' \in \downarrow\{y\} \setminus \{0\}$, $x \wedge E[y'] = 0$.

Demonstração. A equivalência entre (i) e (ii) é uma consequência da equivalência

$$(x \oplus y) \cap E^{-1} = \mathbb{O} \Leftrightarrow E \circ (x \oplus x) \subseteq y^* \oplus y^*$$

que provamos de seguida. Seja então $(x \oplus y) \cap E^{-1} = \mathbb{O}$ e consideremos $(a, b) \in E$ e $(b, c) \in x \oplus x$ com $a, b, c \neq 0$. Então $(b, a \wedge y) \in E^{-1} \cap (x \oplus y) = \mathbb{O}$ e $a \wedge y = 0$, isto é, $a \leq y^*$. Por outro lado, atendendo ao Lema 6.21, $c \leq x \leq y^*$. Então $(a, c) \in y^* \oplus y^*$. A implicação contrária é também evidente.

A equivalência (ii)$\Leftrightarrow$ (iii) é óbvia.

Por simetria, (ii) é também equivalente a (iv). ■

Como é bem conhecido, é possível definir num espaço uniforme $(X, \mathcal{E})$ uma proximidade do seguinte modo: $A\delta B$ se e só se uma das três seguintes condições equivalentes se verifica:

(i) para cada $E \in \mathcal{E}$, $(A \times B) \cap E \neq \emptyset$;

(ii) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $a \in A$ tal que $E[a] \cap B \neq \emptyset$;

(iii) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $b \in B$ tal que $A \cap E[b] \neq \emptyset$.

A Proposição 6.22 conjuntamente com as Proposições 6.2 e 6.17 afirmam que cada uniformidade de Weil em L induz uma relação infinitesimal δ em L do seguinte modo: $x\delta y$ se e só se uma das três seguintes condições equivalentes é satisfeita:

(i) para cada $E \in \mathcal{E}$, $(x \oplus y) \cap E \neq \mathbb{O}$;

(ii) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $x' \in \downarrow\{x\} \setminus \{0\}$ tal que $E[x'] \wedge y \neq 0$;

(iii) para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $x' \in \downarrow\{x\} \setminus \{0\}$ tal que $x \wedge E[y'] \neq 0$.

Podemos evitar o uso dos conjuntos descendentes $\downarrow\{x\}$ e $\downarrow\{y\}$ em (ii) e (iii) substituindo estas condições por, respectivamente,

(ii') para cada $E \in \mathcal{E}$ vale $st(x, E) \wedge y \neq 0$

e

(iii') para cada $E \in \mathcal{E}$ vale $x \wedge st(y, E) \neq 0$

como mostramos no resultado com que terminamos esta dissertação.

Proposição 6.23. *Seja $\mathcal{E}$ uma uniformidade de Weil em L. Então as seguintes asserções são equivalentes:*

(i) *para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $x' \in \downarrow\{x\} \setminus \{0\}$ tal que $E[x'] \wedge y \neq 0$;*

(ii) *para cada $E \in \mathcal{E}$ vale $st(x, E) \wedge y \neq 0$.*

Demonstração. (i)⇒(ii): Seja $E \in \mathcal{E}$ e consideremos uma vizinhança da diagonal simétrica $F \in \mathcal{E}$ tal que $F^2 \subseteq E$. Por hipótese, existe $x' \in \downarrow\{x\} \setminus \{0\}$ tal que $F[x'] \wedge y \neq 0$. Portanto, existe $z \in L$ tal que $(x', z) \in F$ e $z \wedge y \neq 0$. Como z e x' são diferentes de zero, resulta que $(x' \vee z, x' \vee z) \in F^2 \subseteq E$. Adicionalmente, $(x' \vee z) \wedge x \neq 0$ e $(x' \vee z) \wedge y \neq 0$, pelo que $st(x, E) \wedge y \neq 0$.

(ii)⇒(i): Para cada $E \in \mathcal{E}$, $st(x, E) \wedge y \neq 0$ significa que existe um par $(z, z) \in E$ tal que $z \wedge x \neq 0$ e $z \wedge y \neq 0$. Basta agora fazer $x' := z \wedge x$. ■

Notas sobre o Capítulo IV:

(1) Observámos na Secção 2 que os functores "aberto" e "espectral", convenientemente adaptados às categorias FrNear e NFrm, estabelecem uma adjunção dual entre elas. Relativamente às correspondentes estruturas de Weil, o "espectro" de um reticulado local de adjacência de Weil é um espaço de adjacência de Weil *locálico* e o reticulado local de um espaço de adjacência de Weil *locálico* é um reticulado local de adjacência de Weil, e estas correspondências são functoriais. Contudo, como observámos na Secção 4, estes functores não definem uma adjunção dual, o que constitui uma surpresa. Esta circunstância abona em favor da tese de que em muitas situações as coberturas são melhores que as vizinhanças da diagonal.

(2) Uma das vantagens que as teorias formuladas em função de vizinhanças da diagonal possuem é o de, estando a simetria à vista, as correspondentes versões não simétricas são evidentes e de fácil utilização. Por exemplo, vimos que eliminando a condição de simetria (UW3) da Definição I.4.5 e substituindo na condição (UW4) $\mathcal{E}$ por $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{E^{-1} \mid E \in \mathcal{E}\}$ se obtem uma categoria de reticulados locais estruturados no sentido de Weil isomorfa à categoria dos reticulados locais quase-uniformes de Frith. Do mesmo modo, dos reticulados locais de adjacência de Weil podemos produzir uma teoria de "*reticulados locais de quase-adjacência de Weil*", como desejado por Frith no final de [29]. A correspondente teoria de "*espaços de quase-adjacência de Weil*" pode ser desenvolvida eliminando o axioma (NW0) na Definição 4.3, e é similar à dos "espaços de quase-adjacência" que Frith apresenta no último capítulo de [29].

Analogamente, surgem os "*reticulados locais de quase-proximidade*" e "*os espaços de quase-proximidade*". O isomorfismo do Capítulo II entre QWUFrm e QUFrm produz um isomorfismo entre esta categoria de "reticulados locais de quase-proximidade" e a de Frith ([29], p. 68).

(3) Concluímos na Secção 5 que WNear contém as categorias dos

- espaços topológicos simétricos e aplicações contínuas,
- espaços uniformes e aplicações uniformemente contínuas

e

- espaços de proximidade e aplicações de proximidade.

Contudo a categoria Top dos espaços topológicos não é uma subcategoria de WNear. Outras estruturas topológicas úteis, nomeadamente não simétricas como os espaços quase-uniformes ou os espaços de quase-proximidade, também não estão imersas em WNear. No entanto, no quadro dos "espaços de quase-adjacência de Weil" acima mencionados é possível considerar todos estes espaços de natureza topológica, pois a categoria dos espaços de quase--adjacência de Weil contém as categorias de estruturas não simétricas acima referidas bem como a categoria Top, isto é, unifica a topologia e as estruturas uniformes não simétricas.

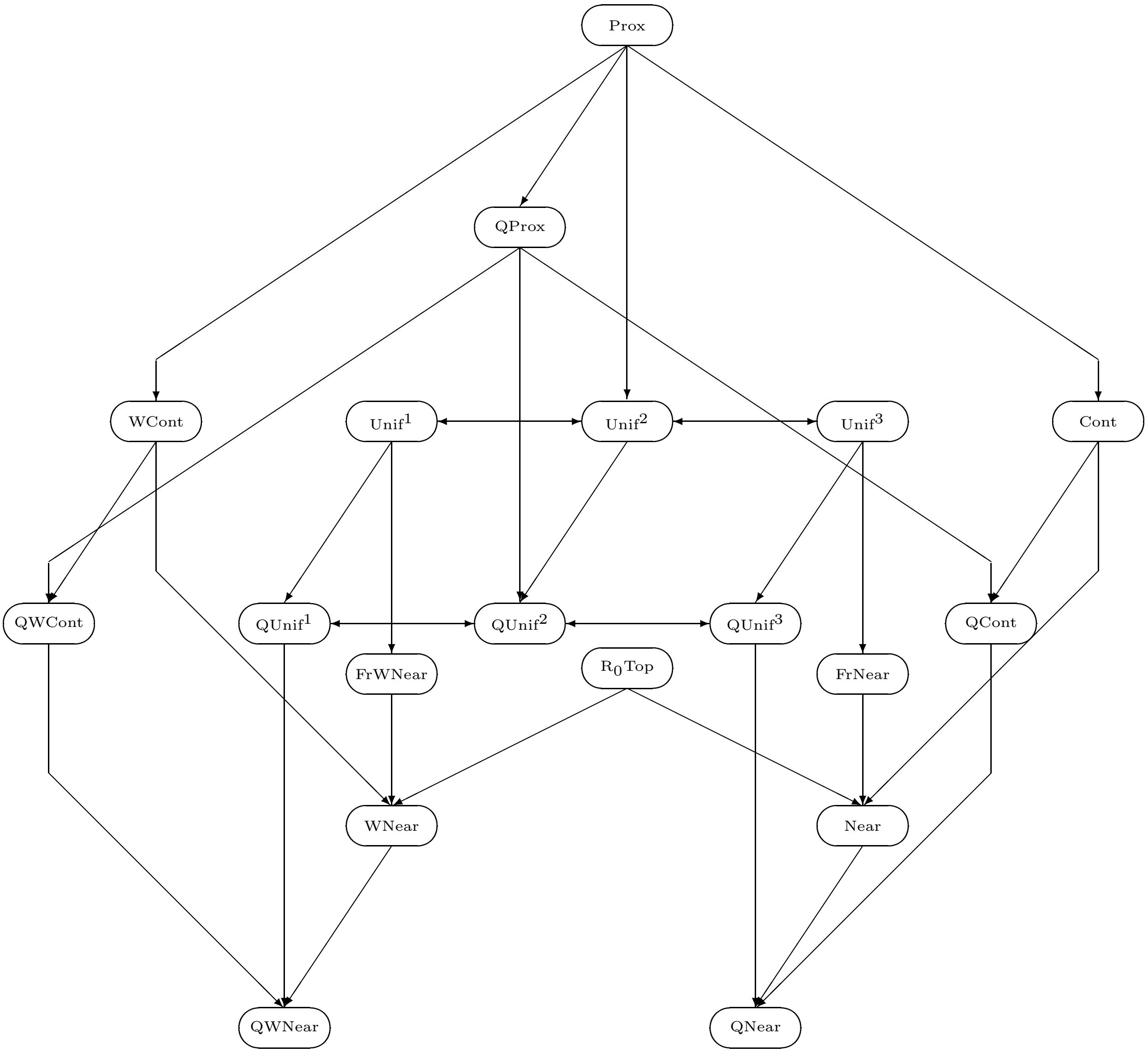
(4) O isomorfismo entre PFrm e $\mathsf{WUFrm}_{(\mathsf{UW5})}$ sugeriu-nos a noção de vizinhança da diagonal de Weil finita. Também justifica que designemos os reticulados locais de adjacência de Weil que satisfazem (UW5) por *reticulados locais de contiguidade de Weil*. Esta é a noção análoga à de reticulado local de contiguidade de Dube [18]. Impõe-se a pergunta: serão estas duas categorias equivalentes? Outro problema interessante será o de saber se a correspondente categoria dos *espaços de contiguidade de Weil* (como subcategoria plena de WNear) é equivalente à subcategoria plena de Near dos espaços de adjacência de contiguidade de Herrlich [34] e, consequentemente, equivalente à categoria clássica dos espaços de contiguidade e aplicações de contiguidade no sentido de Ivanova e Ivanov [41].

APÊNDICE

DIAGRAMAS DE RELAÇÕES ENVOLVENDO CATEGORIAS DE ESPAÇOS E DE RETICULADOS LOCAIS

Este apêndice consiste em dois diagramas. O primeiro resume a hierarquia das estruturas de adjacência no sentido de Tukey e das estruturas de adjacência no sentido de Weil para espaços. O segundo diagrama é o diagrama para reticulados locais análogo ao primeiro.

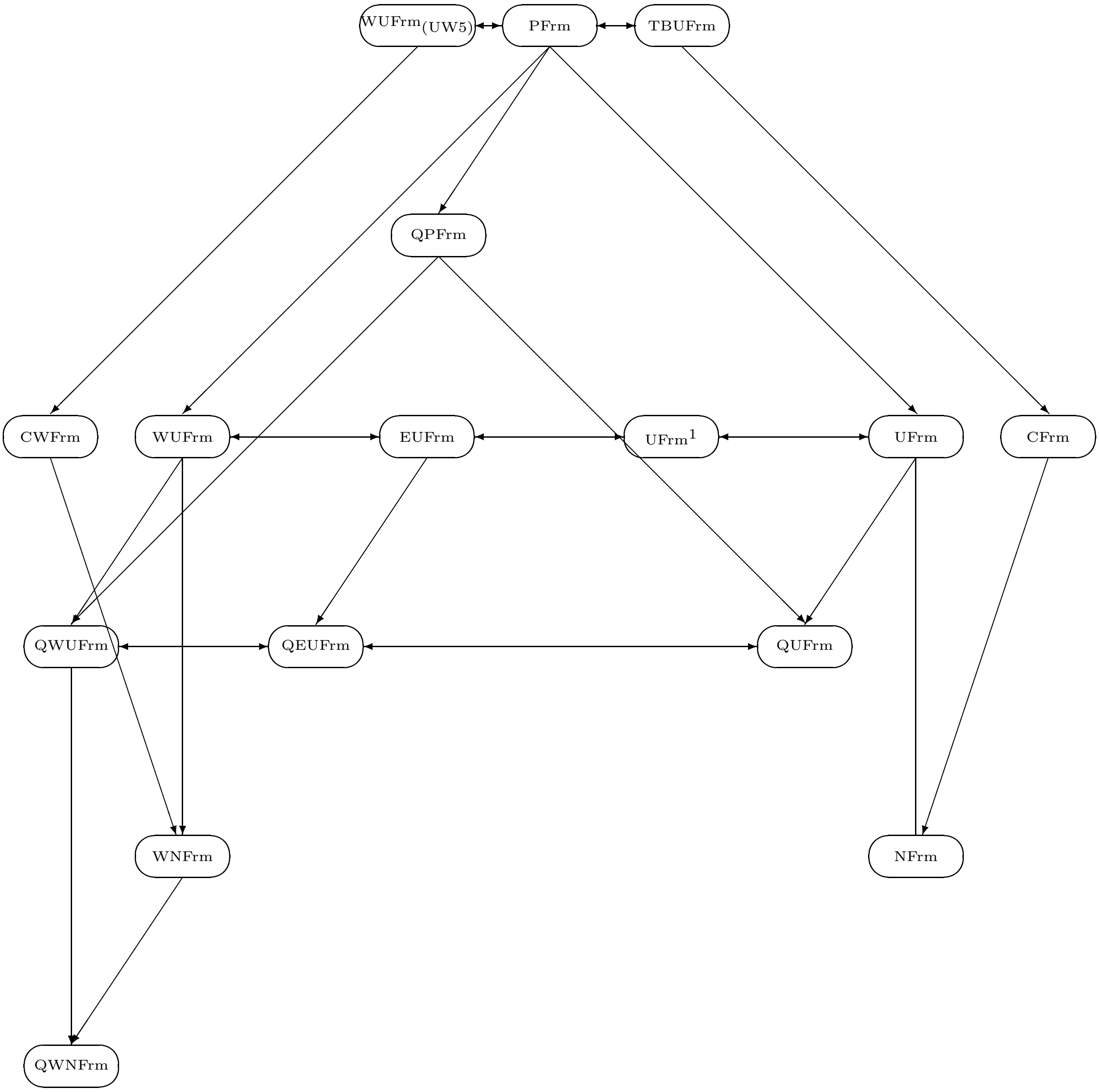
Nestes diagramas, $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{B}$ significam respectivamente que a categoria $\mathcal{A}$ admite uma imersão plena na categoria $\mathcal{B}$ e que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas.



[1] no sentido de Weil

[2] no sentido de Bourbaki

[3] no sentido de Tukey



[1] reticulados locais de medida

BIBLIOGRAFIA

[1] Adámek, J., H. Herrlich e G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley, Nova Iorque et. al., 1990.

[2] Adámek, J. e J. Reiterman, *The category of uniform spaces as a completion of the category of metric spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **33** (1992) 689-693.

[3] Banaschewski, B., *Lectures on Frames*, Universidade da Cidade do Cabo, 1988.

[4] Banaschewski, B., *Another look at the localic Tychonoff Theorem*, Comment. Math. Univ. Carolin. **29** (1988) 647-656.

[5] Banaschewski, B., *Bourbaki's Fixpoint Lemma reconsidered*, Comment. Math. Univ. Carolin. **33** (1992) 303-309.

[6] Banaschewski, B., *Completion in Pointfree Topology*, preprint, 1994.

[7] Banaschewski, B., G.C.L. Brümmer e K.A. Hardie, *Biframes and bispaces*, Quaestiones Math. **6** (1983) 13-25.

[8] Banaschewski, B. e C.J. Mulvey, *Stone-Čech compactification of locales, I*, Houston J. Math. **6** (1980) 301-312.

[9] Banaschewski, B. e A. Pultr, *Cauchy points of metric locales*, Can. J. Math. **151** (1989) 830-854.

[10] Banaschewski, B. e A. Pultr, *Samuel compactification and completion of uniform frames*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **108** (1990) 63-78.

[11] Banaschewski, B. e A. Pultr, *A Stone duality for metric spaces* in: Category Theory '91 (Actas da Conferência Internacional de Montréal 1991), CMS Conference Proceedings, vol. 13, AMS, Providence, R. I., 1992, pp. 33-42.

[12] Banaschewski, B. e A. Pultr, *Cauchy points of uniform and nearness frames*, preprint, 1993.

[13] Bentley, H.L., H. Herrlich e R. Lowen, *Improving constructions in Topology* in: Category Theory at Work (Actas do Workshop de Bremen 1990, editadas por H. Herrlich e H.-E. Porst), Heldermann Verlag, Berlim, 1991, pp. 3-20.

[14] Bourbaki, N., *Topologie Générale*, Livre III, Chapitre 9, Hermann, Paris, 1948.

[15] Bourbaki, N., *Topologie Générale*, Livre III, Chapitres 1, 2, Hermann, Paris, 1940 (nova edição, 1971).

[16] Čech, E., *Topological Spaces*, revisto por Z. Frolík and M. Katětov, Academia, Praga, 1966.

[17] Dowker, C.H. e D. Strauss, *Sums in the category of frames*, Houston J. Math. **3** (1977) 7-15.

[18] Dube, T.A., *The Tamano-Dowker type theorems for nearness frames*, J. Pure Appl. Algebra **99** (1995) 1-7.

[19] Efremovič, V.A., *Infinitesimal spaces*, Dokl. Akad. Nauk **76** (1951) 341-343.

[20] Efremovič, V.A., *The geometry of proximity I*, Mat. Sb. N.S. **31** (1952) 189-200.

[21] Ehresmann, A.C., *Partial completions of concrete functors*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle **22** (1981) 315-328.

[22] Engelking, R., *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Varsóvia, 1977.

[23] Fletcher, P. e W. Hunsaker, *Entourage uniformities for frames*, Monatsh. Math. **112** (1991) 271-279.

[24] Fletcher, P. e W. Hunsaker, *Totally bounded uniformities for frames*, Topology Proc. **17** (1992) 59-69.

[25] Fletcher, P., W. Hunsaker e W. Lindgren, *Characterizations of frame quasi-uniformities*, Quaestiones Math. **16** (1993) 371-383.

[26] Fletcher, P., W. Hunsaker e W. Lindgren, *Totally bounded frame quasi-uniformities*, Comment. Math. Univ. Carolin. **34** (1993) 529-537.

[27] Fletcher, P., W. Hunsaker e W. Lindgren, *Frame quasi-uniformities*, Monatsh. Math. **117** (1994) 223-236.

[28] Fletcher, P. e W. Lindgren, *Quasi-uniform Spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 77, Marcel Dekker, Nova Iorque e Basileia, 1982.

[29] Frith, J.L., *Structured Frames*, Tese de Doutoramento, Universidade da Cidade do Cabo, 1987.

[30] Gantner, T.E. e R.C. Steinlage, *Characterizations of quasi-uniformities*, J. London Math. Soc. (2) **5** (1972) 48-52.

[31] Gierz, G., K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove e D.S. Scott, *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag, Berlim et. al., 1980.

[32] Gillman, L. e M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Graduate Texts in Math. vol. 43, Springer-Verlag, Berlim et. al., 1976.

[33] Herrlich, H., *A concept of nearness*, General Topology and Appl. **4** (1974) 191-212.

[34] Herrlich, H., *Topological structures* in: Topological structures I, Math. Centre Tracts 52 (1974) pp. 59-122.

[35] Herrlich, H., *Initial completions*, Math. Z. **150** (1976) 101-110.

[36] Herrlich, H. e M. Hušek, *Galois connections categorically*, J. Pure Appl. Algebra **68** (1990) 165-180.

[37] Hong, S.S. e Y.K. Kim, *Nearness spaces and nearness frames*, preprint, 1994.

[38] Isbell, J., *Uniform Spaces*, American Mathematical Society, Providence, 1964.

[39] Isbell, J., *Atomless parts of spaces*, Math. Scand. **31** (1972) 5-32.

[40] Isbell, J., I. Kříž, A. Pultr e J. Rosícki, *Remarks on localic groups* in: Categorical Algebra and its Applications (Actas da Conferência Internacional de Louvain-La-Neuve 1987, editadas por F. Borceux), LNM 1348, pp. 154-172.

[41] Ivanova, V.M. e A.A. Ivanov, *Contiguity spaces and bicompact extensions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **23** (1959) 613-634.

[42] Johnstone, P.T., *Tychonoff's Theorem without the Axiom of Choice*, Fund. Math. **113** (1981) 21-35.

[43] Johnstone, P.T., *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 3, Cambridge University Press, 1982.

[44] Johnstone, P.T., *The point of pointless topology*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **8** (1983) 41-53.

[45] Johnstone, P.T., *The Art of pointless thinking: a student's guide to the category of locales* in: Category Theory at Work (Actas do Workshop de Bremen 1990, editadas por H. Herrlich e H.-E. Porst), Heldermann Verlag, Berlim, 1991, pp. 85-107.

[46] Katětov, M., *On continuity structures and spaces of mappings*, Comment. Math. Univ. Carolin. **6** (1965) 257-278.

[47] Kelly, J.C., *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **13** (1963) 71-89.

[48] Kříž, I., *A direct description of uniform completion in locales and a characterization of LT-groups*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques **27** (1986) 19-34.

[49] Kříž, I. e A. Pultr, *Systems of covers of frames and resulting subframes*, in: Actas da 14ª Escola de Inverno de Srní, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **14** (1987) 353-364.

[50] Künzi, H.-P., *Nonsymmetric Topology*, in: Topology with Applications (Actas da Conferência Internacional de Szekszárd 1993), Bolyai Society Mathematical Studies 4, 1993, pp. 303-338.

[51] Lane, E.P., *Bitopological spaces and quasi-uniformities*, Proc. London Math. Soc. (3) **17** (1967) 241-256.

[52] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math. vol. 5, Springer-Verlag, Berlim et. al., 1971.

[53] MacLane, S. e I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag, Berlim et. al., 1992.

[54] Madden, J., *k-frames*, J. Pure Appl. Algebra **70** (1991) 107-127.

[55] Nachbin, L., *Sur les espaces uniformes ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris **226** (1948) 774-775.

[56] Naimpally, S.A. e B.D. Warrack, *Proximity Spaces*, Cambridge University Press, 1970.

[57] Page, W., *Topological Uniform Structures*, John Wiley and Sons, Nova Iorque et. al., 1978.

[58] Papert, D. e S. Papert, *Sur les treillis des ouverts et les paratopologies*, Séminaire Ehresmann (topologie et géométrie différentielle), 1re année (1957-8), exposé 1.

[59] Picado, J., *Weil uniformities for frames*, Comment. Math. Univ. Carolin. (a aparecer).

[60] Picado, J., *Frame quasi-uniformities by entourages*, Quaestiones Math. (a aparecer).

[61] Picado, J., *Weil nearnesses for frames and spaces*, Pré-publicação n^0 95-21, Universidade de Coimbra, 1995 (submetido para publicação).

[62] Preuß, G., *Theory of Topological Structures: An Approach to Categorical Topology*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht et. al., 1988.

[63] Pultr, A., *Pointless uniformities I. Complete regularity*, Comment. Math. Univ. Carolin. **25** (1984) 91-104.

[64] Pultr, A., *Pointless uniformities II. (Dia)metrization*, Comment. Math. Univ. Carolin. **25** (1984) 105-120.

[65] Pultr, A., *Remarks on metrizable locales* in: Actas da 12$^{\underline{a}}$ Escola de Inverno de Srní, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **6** (1984) 247-258.

[66] Pultr, A., *Some recent topological results in locale theory* in: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI (Actas do Sexto Simpósio de Topologia de Praga 1986, editadas por Z. Frolík), Heldermann Verlag, Berlim, 1988, pp. 451-468.

[67] Pultr, A., *Diameters in locales: how bad they can be*, Comment. Math. Univ. Carolin. **29** (1988) 731-742.

[68] Pultr, A., *Categories of diametric frames*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **105** (1989) 285-297.

[69] Schauerte, A., *Biframes*, Tese de Doutoramento, Universidade McMaster, 1992.

[70] Smirnov, Y.M., *On proximity spaces*, Mat. Sb. **31** (1952) 543-574 (em Russo); tradução em inglês em Amer. Math. Soc. Transl. (2) **38** (1964) 5-35.

[71] Stone, M.H., *The theory of representation for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936) 37-111.

[72] Stone, M.H., *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937) 375-481.

[73] Stone, M.H., *The representation of Boolean algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938) 807-816.

[74] Vickers, S., *Topology via Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 5, Cambridge University Press, 1989.

[75] Tukey, J.W., *Convergence and Uniformity in Topology*, Ann. of Math. Studies 2, Princeton University Press, 1940.

[76] Weil, A., *Sur les Espaces à Structure Uniforme et sur la Topologie Générale*, Publications de l'Institute Mathématique de l'Université de Strasbourg, Hermann, Paris, 1938.

[77] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

ÍNDICE DE CATEGORIAS

Categoria	*Objectos*	*Morfismos*	*Página*
SWNear	espaços de semiadjacência de Weil	aplicações de adjacência de Weil	109
TBUnif	espaços uniformes totalmente limitados	aplicações uniformemente contínuas	120
Top	espaços topológicos	aplicações contínuas	2
UFrm	reticulados locais uniformes	homomorfismos uniformes	16
Unif	espaços uniformes	aplicações uniformemente contínuas	16
WCont	espaços de contiguidade de Weil	aplicações uniformemente contínuas	143
WNear	espaços de adjacência de Weil	aplicações de adjacência de Weil	109
$\mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW4})}$	espaços de adjacência de Weil sat. (NW4)	aplicações de adjacência de Weil	112
$\mathsf{WNear}_{(\mathsf{NW5})}$	espaços de adjacência de Weil sat. (NW5)	aplicações de adjacência de Weil	118
WNFrm	reticulados locais de adjacência de Weil	homomorfismos uniformes de Weil	105
WUFrm	reticulados locais uniformes de Weil	homomorfismos uniformes de Weil	23
$\mathsf{WUFrm}_{(\mathsf{UW5})}$	reticulados locais uniformes de Weil sat. (UW5)	homomorfismos uniformes de Weil	133
Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A},\mathcal{X})$	cofontes Δ-completas	homomorfismos	61
$\mathcal{M}$-Δ-$\mathcal{CS}(\mathcal{A},\mathcal{X})$	cofontes $\mathcal{M}$-Δ-completas	homomorfismos	64

ÍNDICE DE OUTROS SÍMBOLOS

Símbolo	*Significado*	*Página*
E_U	vizinhança da diagonal induzida por U	34
$\mathcal{E}_U$	família das vizinhanças da diagonal induzidas por $\mathcal{U}$	34
$\mathcal{E}(\ll)$	uniformidade de Weil *locálica* induzida por uma proximidade (resp. uniformidade de Weil num reticulado local induzida por uma proximidade)	124 (resp. 132)
$FWEnt(L)$	filtro de $WEnt(L)$ gerado pelas vizinhanças da diagonal finitas	134
$f_1 \oplus f_2$	morfismo coproduto	9
$g \dashv f$	g é adjunto à esquerda de f	9
$I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq} J$	I está fortemente abaixo de J relativamente a $\mathcal{E}$	24
$I \overset{\mathcal{E}}{\sqsubseteq}_i J$	I está fortemente abaixo de J relativamente a $\mathcal{E}$	87
$int_{\mathcal{T}}(E)$	interior de uma vizinhança da diagonal relativamente a uma topologia	106
$int_i(E)$	interiores de um C-ideal E	88
k_0	pré-núcleo em $\mathcal{D}(L \times L)$	20
$k(A)$	C-ideal gerado por A	20
$\kappa(x)$	o menor elemento R-saturado igual ou maior do que x	6
L_d	sub-reticulado local de L induzido por d	65
L/R	quociente de L	6
$L_1 \oplus L_2$	coproduto	7, 56
L^1, L^2	sub-reticulados locais de L induzidos por $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_1 y$ e $x \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_2 y$	83
$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$	família das vizinhanças induzidas por $\mathcal{E}$	37
$\mathcal{M}ono$	monomorfismos	62
$\mathcal{O}(L)$	família das aplicações de L em L que preservam a ordem	17
ptL	espectro de L	2
$\mathcal{P}(X)$	família das partes de X	1
$\mathcal{R}eg\mathcal{E}pi$	epimorfismos regulares	62
$\mathcal{R}(L,\mathcal{U})$	reticulado local dos ideais regulares de $(L,\mathcal{U})$	43
$st(A,\mathcal{U})$	estrela de um conjunto numa cobertura	13
$st_i(V,\mathcal{V})$	estrelas de um conjunto numa cobertura conjugada	81

Símbolo	*Significado*	*Página*
$st(x, A)$	estrela de um elemento num C-ideal	19
$st(x, E)$	estrela de um elemento num C-ideal	83
$st_i(x, E)$	estrela de um elemento num C-ideal	83
$st(x, U)$	estrela de um elemento numa cobertura	15
$st_i(x, U)$	estrelas de um elemento numa cobertura conjugada	82
$\mathcal{T}$	topologia num conjunto	2
$\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$	topologia uniforme	13
$\mathcal{T}_{ptL}$	topologia espectral	2
$\mathcal{T}_\mu$	topologia uniforme	15
U^*	refinamento estrela de uma cobertura (resp. cobertura conjugada) em reticulados locais	16 (resp. 82)
$\mathcal{U}^*$	refinamento estrela de uma cobertura (resp. cobertura conjugada) em conjuntos	14 (resp. 81)
U_e	cobertura induzida por e	39
U^d_ϵ	cobertura uniforme induzida por um diâmetro	53
$\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$	família das coberturas induzidas por $\mathcal{M}$	39
$\mathcal{U}_{\#}$	filtro de coberturas gerado pelas coberturas finitas	43
$WEnt(L)$	família das vizinhanças da diagonal de Weil de X	22
$WEnt(X)$	família das vizinhanças da diagonal de X	12
x^*	pseudocomplemento	4
$x \oplus y$	elemento do coproduto	8
$[x, y]$	intersecção $\uparrow\{x\} \cap \downarrow\{y\}$	7
$x \prec y$	x está bem abaixo de y	3
$x \overset{d}{\lhd} y$	x está fortemente abaixo de y relativamente a d	53
$x \overset{\mathcal{E}}{\lhd} y$	x está fortemente abaixo de y relativamente a $\mathcal{E}$	22
$x \overset{\mathcal{E}}{\lhd}_i y$	x está fortemente abaixo de y relativamente a $\mathcal{E}$	83
$x \overset{\mathcal{G}}{\lhd} y$	x está fortemente abaixo de y relativamente a $\mathcal{G}$	57
$x \overset{\mathcal{M}}{\lhd} y$	x está fortemente abaixo de y relativamente a $\mathcal{M}$	18
$x \overset{\mathcal{U}}{\lhd} y$	x está fortemente abaixo de y relativamente a $\mathcal{U}$	16
$x \overset{\mathcal{U}}{\lhd}_i y$	x está fortemente abaixo de y relativamente a $\mathcal{U}$	82
α_U	adjunto à direita de $st(\_\_, U)$	53
α^d_ϵ	abreviatura de $\alpha_{U^d_\epsilon}$	53

Símbolo	*Significado*	*Página*
Γ		71
δ	relação infinitesimal	119, 137
ε	elemento neutro de um grupo *locálico*	28
η	unidade de adjunção	3, 5, 17, 33
Θ	functor de EUFrm em UFrm	39
ι	inverso de um grupo *locálico*	28
μ	multiplicação de um grupo *locálico*	28
ξ	co-unidade de adjunção	3, 5, 17, 34
$\rho_1 \vee \rho_2$	supremo de duas pseudométricas	52
σ	único morfismo de domínio **2**	8
Σ	functor espectral	2, 5, 17, 32
Σ_x	aberto da topologia espectral	2
Υ		74
Φ	functor de WUFrm em EUFrm	37
Ψ	functor de UFrm em WUFrm	34
Ω	functor aberto	2, 16, 16, 31
∇	codiagonal	28
0	zero de um reticulado local	2
1	unidade de um reticulado local	1
$\mathbb{O}$	zero do coproduto	8
$\mathbf{2}$	reticulado local com 2 elementos	2
$\ll$	proximidade	120, 126
$<_{\mathcal{E}}$	proximidade induzida por uma adjacência de Weil *locálica*	121

ÍNDICE DE DEFINIÇÕES