Escola de Outono

Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa

CURSO DE TOPOLOGIA SEM PONTOS

Jorge Picado

Setembro 1998

Prefácio

O nosso objectivo com o curso "Topologia sem pontos" é apresentar uma introdução ao tema, tentando ilustrar alguns dos seus aspectos mais interessantes. A topologia sem pontos ("pointfree topology" ou "pointless topology" na literatura em língua inglesa) é um dos temas de estudo actuais da chamada topologia categorial[1]. Embora o advento da teoria dos reticulados na década de 30 tenha já conduzido à descoberta de relações significativas entre espaços topológicos e reticulados (são exemplos disso os trabalhos de Stone[2] e Wallman[3]), só 20 anos mais tarde, em 1957, no seminário de C. Ehresmann, foi estabelecida esta variante da topologia, formulada em termos da teoria dos reticulados. Aí se introduziram os reticulados locais ("treillis locaux" na designação original) e foram apresentados os primeiros resultados, por Bénabou[4] e Papert e Papert[5]. O ponto decisivo no desenvolvimento da topologia sem pontos como área de investigação deu-se contudo com a publicação do artigo [5] de J. Isbell. Enquanto que até aí o interesse nesta abordagem à topologia era meramente formal ("porquê provar com mais o que pode ser provado com menos", nas palavras de Occham[6]), a partir daí tornou-se um tema autónomo relevante, com diversos aspectos interessantes para a teoria dos topos ([6], [11]), a lógica [13], a teoria dos reticulados e a teoria da representação [7], que realçam a beleza deste tema. Em apêndice descrevemos alguns desses aspectos.

As cinco lições que integram o curso estão organizadas do seguinte modo:

§ 1. Depois de uma breve introdução histórica, apresentamos a linguagem categorial básica que utilizaremos ao longo do curso, bem como os resultados importantes de que necessitaremos. Algumas categorias importantes de reticulados servirão como ilustração. Por fim, descrevemos a categoria Frm dos reticulados locais.

§ 2. Começamos por apresentar diversos exemplos de reticulados locais e respectivos homomorfismos. Discutimos o aspecto algébrico de Frm e explicamos como diversas categorias ($\wedge$-semi-reticulados, reticulados distributivos e espaços topológicos) se relacionam com Frm por intermédio de construções (mais concretamente, adjunções) importantes.

---

[1] Veja H. Herrlich e G. Strecker, *Categorical Topology – Its origins, as exemplified by the unfolding of the theory of topological reflections and coreflections before 1971*, in: Handbook of the History of General Topology, Vol. 1, 1997, p. 255-341.

[2] Veja M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937) 375-481.

[3] Veja H. Wallman, *Lattices and topological spaces*, Ann. Math. 39 (1938) 112-126.

[4] J. Bénabou, *Treillis locaux et paratopologies*, Séminaire Ehresmann (Topologie et Géométrie Differéntielle) 1957-58, exposé 2, Fac. Sci. Paris.

[5] D. Papert e S. Papert, *Sur les treillis des ouverts et les paratopologies*, Séminaire Ehresmann (Topologie et Géométrie Différentielle) 1957-58, exposé 1, Fac. Sci. Paris.

[6] "Frustra fit per plura quod potest fieri per panciora".

§ 3. Discutimos com mais pormenor a adjunção entre Frm e a categoria Top dos espaços topológicos e mostramos como Frm contém uma cópia dual de uma subcategoria muito significativa de Top, a subcategoria dos espaços sóbrios. Daí partimos para o estudo em Frm de diversos conceitos topológicos importantes, nomeadamente a regularidade, a regularidade completa, a compacidade e a paracompacidade.

§ 4. Apresentamos as propriedades mais importantes da categoria Frm e construímos os coprodutos com algum pormenor.

§ 5. Introduzimos a noção de compactificação e apresentamos a compactificação de Stone-Čech em reticulados locais. Damos ainda uma breve ideia de como o Teorema de Tychonoff pode ser obtido em Frm e como os coprodutos nos permitem estender a estrutura de espaço uniforme aos reticulados locais, de um modo puramente algébrico.

Estas notas que servirão de suporte ao curso (tentando complementá-lo nalguns aspectos) estão divididas em 7 capítulos e 1 apêndice. Cada capítulo está dividido em secções, cada uma das quais devendo ser vista como a descrição de uma determinada ideia. Não numeramos os lemas, proposições, teoremas, etc.; como cada secção contém, no máximo, um de cada, referimo-nos a eles pela numeração da respectiva secção.

A nossa principal referência para informação sobre reticulados locais é o livro de Johnstone [7], sobre reticulados em geral, o livro de Davey e Priestley [3], e sobre Teoria das Categorias, o livro clássico de Mac Lane [10]. Para noções mais recentes de Teoria das Categorias – nomeadamente categorias concretas – referimos o livro de Adámek, Herrlich e Strecker [1], cuja terminologia utilizamos. Como elemento de consulta para Topologia, qualquer texto introdutório como, por exemplo, o de Engelking [4], serve.

Índice

1. Preliminares: Conceitos categoriais básicos 1

2. Os reticulados locais e os seus homomorfismos: a categoria Frm 7

3. Aspecto algébrico de Frm 11

4. Parentes (por adjunção) de Frm 15

5. Alguns conceitos topológicos em Frm 27

6. Propriedades de Frm 35

7. A compactificação de Stone-Čech. O Teorema de Tychonoff 49

Apêndice. O porquê desta abordagem à Topologia 57

Bibliografia 61

1. Preliminares: Conceitos categoriais básicos

Neste capítulo apresentamos uma introdução concisa a alguns conceitos e factos básicos da teoria das categorias. O nosso objectivo aqui é tão só delinear o território que consideraremos familiar, apresentando os conceitos e os enunciados dos resultados que utilizaremos mais à frente. Todos eles podem ser aprofundados no livro [10].

1.1. Categorias. Uma *categoria* $\mathcal{C}$ consiste em:

(1) Uma classe de *objectos* (notação: $A, B, C, \ldots$);

(2) Uma classe de *morfismos* (notação: $f, g, h, \ldots$). Cada morfismo f (notação: $f : A \to B$) tem um *domínio* A (notação: $dom(f)$) e um *codomínio* B (notação: $codom(f)$) que são objectos de $\mathcal{C}$;

(3) Uma *lei de composição* que faz corresponder a cada par (f, g) de morfismos tais que $dom(g) = codom(f)$ um morfismo $g \cdot f : dom(f) \to codom(g)$, satisfazendo:

   (a) $(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f)$ sempre que as composições estão definidas;

   (b) Para cada objecto A de $\mathcal{C}$ existe um *morfismo identidade* $1_A : A \to A$ tal que $f \cdot 1_A = f$ e $1_A \cdot g = g$ sempre que as composições estão definidas.

1.2. Functores. Um *functor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um morfismo de categorias. Especificamente, consiste no seguinte:

(1) Uma função $Obj\,\mathcal{C} \to Obj\,\mathcal{D}$ entre as classes de objectos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$; a imagem de $A \in Obj\,\mathcal{C}$ é denotada por $F(A)$ ou, simplesmente, FA.

(2) Uma função $Mor\,\mathcal{C} \to Mor\,\mathcal{D}$ entre as classes de morfismos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$; a imagem de $f \in Mor\,\mathcal{C}$ é denotada por $F(f)$ ou, simplesmente, Ff.

Estas funções estão sujeitas aos seguintes axiomas:

(1) Se $f : A \to B$ então $F(f) : F(A) \to F(B)$;

(2) $F(g \cdot f) = F(g) \cdot F(f)$ sempre que $g \cdot f$ está definida;

(3) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para qualquer objecto A de $\mathcal{C}$.

1.3. Transformações naturais. Uma *transformação natural* $\alpha : F \stackrel{\cdot}{\to} G$ entre dois functores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste numa função

$$\begin{array}{ccc} Obj\,\mathcal{C} & \to & Mor\,\mathcal{D} \\ A & \mapsto & \alpha_A \end{array}$$

tal que:

(1) Para cada objecto A de $\mathcal{C}$, $\alpha_A : F(A) \to G(A)$;

(2) Para cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

é comutativo.

1.4. Categorias concretas. Trabalharemos quase sempre em *categorias concretas* cujos objectos são conjuntos com algum tipo de estrutura e cujos morfismos são funções que preservam essa estrutura, sendo a lei de composição a composição usual de funções. Seguiremos a convenção usual de denotar uma categoria por uma abreviatura do nome (em inglês) dos seus objectos:

- Set: categoria dos conjuntos e funções;
- Top: categoria dos espaços topológicos e funções contínuas;
- SLat: categoria dos $\wedge$-semi-reticulados e respectivos homomorfismos;
- DLat: categoria dos reticulados distributivos e respectivos homomorfismos;
- Bool: categoria das álgebras de Boole e respectivos homomorfismos.

Para cada par de objectos A, B numa categoria $\mathcal{C}$, denotaremos a classe dos morfismos de A em B (que em qualquer categoria concreta é sempre um conjunto) por $\mathcal{C}(A, B)$.

1.5. Conjuntos parcialmente ordenados como categorias. O outro tipo de categorias que encontraremos consiste em categorias definidas a partir de conjuntos parcialmente ordenados. Se $(A, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, podemos torná-lo numa categoria $\mathcal{A}$:

- $Obj\,\mathcal{A} = A$;
- $|\mathcal{A}(a, b)| = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

A transitividade de $\leq$ assegura a existência de uma única lei de composição e a reflexividade assegura a existência de identidades. Podemos pois olhar os conjuntos parcialmente ordenados como casos especiais de categorias.

Muitos dos conceitos de teoria das categorias tornam-se, quando aplicados aos conjuntos parcialmente ordenados, conceitos já familiares em teoria dos reticulados. Por exemplo, um functor entre conjuntos parcialmente ordenados é simplesmente uma aplicação que preserva a ordem.

1.6. Adjunções. O conceito central da teoria das categorias é o de *adjunção*. Dados functores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, diz-se que F é *adjunto à esquerda de* G, ou que

G é *adjunto à direita de* F, e escreve-se $F \dashv G$, se para cada $A \in Obj\,\mathcal{C}$ e para cada $B \in Obj\,\mathcal{D}$ existe uma bijecção

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{A,B}: & \mathcal{C}(A, GB) & \rightarrow & \mathcal{D}(FA, B) \\ & f & \mapsto & \overline{f} \end{array}$$

natural em A, isto é, para cada morfismo $g : A' \to A$ em $\mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A, GB) \arrow[r, "\Psi_{A,B}"] \arrow[d, "- \cdot g"'] & \mathcal{D}(FA, B) \arrow[d, "- \cdot Fg"] \\ \mathcal{C}(A', GB) \arrow[r, "\Psi_{A',B}"'] & \mathcal{D}(FA', B) \end{tikzcd}$$

é comutativo (ou seja, $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot Fg$), e *natural em* B, ou seja, para cada morfismo $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A, GB) \arrow[r, "\Psi_{A,B}"] \arrow[d, "Gg \cdot -"'] & \mathcal{D}(FA, B) \arrow[d, "g \cdot -"] \\ \mathcal{C}(A, GB') \arrow[r, "\Psi_{A,B'}"'] & \mathcal{D}(FA, B') \end{tikzcd}$$

é comutativo ($\overline{Gg \cdot f} = g \cdot \overline{f}$).

Dada uma adjunção $F \dashv G$, podemos considerar para cada A o morfismo $\eta_A : A \to GFA$ correspondente a 1_{FA} (isto é, o morfismo η_A tal que $\overline{\eta_A} = 1_{FA}$). A naturalidade da bijecção em A diz-nos que $\eta = (\eta_A)_{A \in Obj\mathcal{C}}$ é uma transformação natural $1_{\mathcal{C}} \stackrel{\cdot}{\rightarrow} GF$ (chamada *unidade* da adjunção); além disso, para cada $f : A \to G(B)$, temos

$$\overline{G\overline{f} \cdot \eta_A} = \overline{f} \cdot \overline{\eta_A} = \overline{f} \cdot 1_{FA} = \overline{f},$$

pelo que $G\overline{f} \cdot \eta_A = f$. Portanto a bijecção $\overline{f} \mapsto f$ é recuperável a partir do conhecimento do functor G e da transformação natural η. Além disso, nem sequer precisamos de saber que F é um functor:

Proposição. *Um functor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ possui um adjunto à esquerda se existir, para cada objecto A de $\mathcal{C}$, um objecto FA de $\mathcal{D}$ e um morfismo $\eta_A : A \to GFA$ que é "universal entre os morfismos de A para a imagem de G" no sentido de que, para cada $f : A \to GB$, existe um único $\overline{f} : FA \to B$ satisfazendo $G\overline{f} \cdot \eta_A = f$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & GFA \arrow[d, "G\overline{f}"] \\ & GB \end{tikzcd}$$

Demonstração. Consulte [10] (p. 81, Teorema 2(ii)). ∎

1.7. Identidades triangulares. Uma outra descrição das adjunções envolve η e a sua dual, a *co-unidade* $\varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\to} 1_{\mathcal{D}}$ (para cada $B \in Obj\mathcal{D}$, $\varepsilon_B := \overline{1_{GB}} : FGB \to B$). Como $f = G\overline{f} \cdot \eta_A$ e $\overline{f} = \varepsilon_B \cdot Ff$, é fácil concluir que η e ε satisfazem as chamadas *identidades triangulares*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta_G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon_F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Reciprocamente:

Proposição. *Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ functores e $\eta : 1_{\mathcal{C}} \stackrel{\cdot}{\to} GF$ e $\varepsilon : FG \stackrel{\cdot}{\to} 1_{\mathcal{D}}$ transformações naturais satisfazendo as identidades triangulares. Então temos uma adjunção $F \dashv G$ com unidade η e co-unidade ε.*

Demonstração. Veja [10] (p. 81, Teorema 2 (v)). ∎

1.8. Exemplos de adjunções.

(1) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ aplicações monótonas entre conjuntos parcialmente ordenados (olhadas como functores como em 1.5). Então

$$\begin{aligned} f \dashv g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall a \in A\, \forall b \in B\, \Big(a \leq gf(a) \text{ e } fg(b) \leq b\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall a \in A\, \forall b \in B\, \Big(f(a) \leq b \text{ se e só se } a \leq g(b)\Big). \end{aligned}$$

Portanto $f \dashv g$ exactamente quando f e g formam uma conexão de Galois[1]. Podemos ainda dizer mais: se $f \dashv g$ então $fgf = f$, $gfg = g$ e f e g restringem-se nos subconjuntos $\{a \in A \mid a = gf(a)\}$ e $\{b \in B \mid b = fg(b)\}$ a uma bijecção.

[1]Para mais informação sobre conexões de Galois consulte M. Erné, J. Koslowski, A. Melton e G. E. Strecker, *A primer on Galois connections*, in: Papers on general topology and applications (Madison, WI, 1991), Ann. New York Acad. Sci., Vol. 704, 1993, p. 103-125. Consulte ainda H. Herrlich e M. Hušek, *Galois connections categorically*, J. Pure Appl. Algebra 68 (1990) 165-180.

(2) Numa álgebra de Boole, o elemento $\neg a \vee b$ satisfaz $c \wedge a \leq b$ se e só se $c \leq \neg a \vee b$. Portanto $a \vee (-)$ é adjunto à esquerda de $\neg a \vee (-)$. Um reticulado diz-se uma *álgebra de Heyting* se, para cada par de elementos a, b existe um elemento $a \to b$ tal que $c \wedge a \leq b$ se e só se $c \leq a \to b$. Numa álgebra de Heyting a operação $a \to (-)$ é pois adjunta à direita de $a \wedge (-)$.

Exercício. Seja A um reticulado. Uma operação binária $\to$ em A torna A uma álgebra de Heyting se e só se as equações

(1) $a \to a = 1$

(2) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$

(3) $b \wedge (a \to b) = b$

(4) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

são válidas para quaisquer $a, b, c \in A$.

1.9. O Teorema do Functor Adjunto. O teorema seguinte é um caso particular de um teorema geral da teoria das categorias, o Teorema do Functor Adjunto, cuja prova para categorias gerais tem muitas complicações técnicas (envolvendo fundamentos da teoria dos conjuntos). Daí a razão de só o apresentarmos neste caso especial (aplicado aos conjuntos parcialmente ordenados) que é, aliás, o caso em que necessitaremos dele.

Teorema. *Seja $f : A \to B$ uma aplicação monótona entre conjuntos parcialmente ordenados. Então:*

(a) *Se f tem um adjunto à direita $g : B \to A$, f preserva todos os supremos que existem em A;*

(b) *Se A possui supremos arbitrários e f preserva-os então f possui um adjunto à direita.*

Demonstração.

(a) Seja $S \subseteq A$ tal que $\bigvee S$ existe. Como f é monótona, $f(\bigvee S)$ é claramente um majorante para $\{f(s) \mid s \in S\}$. Mas se b é um majorante deste conjunto, temos $f(s) \leq b$ para todo o $s \in S$, logo $s \leq g(b)$ para qualquer $s \in S$, pelo que $\bigvee S \leq g(b)$ e $f(\bigvee S) \leq b$.

(b) Consideremos $g(b) = \bigvee\{a \in A \mid f(a) \leq b\}$. Como f preserva supremos, $fg(b) = \bigvee\{f(a) \mid f(a) \leq b\} \leq b$ e $gf(a) = \bigvee\{a' \mid f(a') \leq f(a)\} \geq a$. ∎

Este teorema diz-nos em particular que toda a álgebra de Heyting

- satisfaz a propriedade (4) do Exercício 1.8;
- é distributiva;

- satisfaz a lei de DeMorgan $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$, onde $a^* := a \to 0$ é o chamado *pseudocomplemento*[2] de a.

1.10. Subcategorias reflectivas. Uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ diz-se *plena* caso $\mathcal{D}(A,B) = \mathcal{C}(A,B)$ para qualquer par de objectos A, B em $\mathcal{D}$. Daqui em diante, como trabalharemos (quase) sempre com subcategorias plenas, por subcategoria entenderemos subcategoria plena, salvo menção em contrário.

Sejam $\mathcal{D}$ uma subcategoria de $\mathcal{C}$ e A um objecto de $\mathcal{C}$. Um *morfismo reflector* de A em $\mathcal{D}$ é um morfismo $r_A : A \to RA$ de A num objecto de $\mathcal{D}$ tal que, para cada morfismo $f : A \to B$ de A nalgum objecto B de $\mathcal{D}$, existe um único morfismo $\overline{f} : RA \to B$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r_A"] \arrow[dr, "f"'] & RA \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

comuta. O objecto RA diz-se o *reflexo* de A em $\mathcal{D}$.

A subcategoria $\mathcal{D}$ diz-se *reflectiva* quando todo o objecto de $\mathcal{C}$ possui morfismo reflector em $\mathcal{D}$. Daqui decorre imediatamente a existência de um functor $R : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$; se considerarmos a inclusão $E : \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ então $R \dashv E$, onde o morfismo r_A é a unidade da adjunção e a co-unidade ε_B é um isomorfismo para qualquer $B \in Obj\mathcal{D}$.

Mais geralmente, uma *reflexão* é uma adjunção $(F, G) : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$ para a qual ε_B é um isomorfismo para qualquer B (isto é equivalente a dizer que G é *pleno* e *fiel*, ou seja, induz uma bijecção entre $\mathcal{D}(A,B)$ e $\mathcal{C}(GA, GB)$ para cada par de objectos A, B ([10], p. 88, Teorema 1)).

Se η e ε forem ambos isomorfismos, diz-se que a adjunção é uma *equivalência* e que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias *equivalentes*; diz-se que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *dualmente equivalentes*, ou que existe uma *dualidade* entre elas, se $\mathcal{C}$ for equivalente à *categoria oposta* $\mathcal{D}^{op}$ de $\mathcal{D}$. A noção de equivalência entre categorias é mais fraca que a de *isomorfismo* mas é suficiente para assegurar que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ têm as mesmas propriedades categoriais.

[2]Mais geralmente, os elementos $a \to b$ numa álgebra de Heyting são habitualmente apelidados de *pseudocomplementos relativos*. Por isso também se costuma designar uma álgebra de Heyting por *reticulado relativamente pseudocomplementado*.

2. Os reticulados locais e os seus homomorfismos: a categoria Frm

Neste capítulo embarcamos então no estudo dos espaços topológicos em termos dos seus reticulados de abertos.

2.1. Reticulados locais. Se $(X, \mathcal{O}X)$ é um espaço topológico, o reticulado $(\mathcal{O}X, \subseteq)$ dos seus abertos é completo, pois qualquer reunião arbitrária de abertos é um aberto; claro que a *lei distributiva infinita*

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

é válida em $\mathcal{O}X$ uma vez que $\wedge$ (por ser ínfimo finito) e $\bigvee$ coincidem com as operações usuais $\cap$ e $\bigcup$ da teoria dos conjuntos, respectivamente.

Se $f : (X, \mathcal{O}X) \to (Y, \mathcal{O}Y)$ é contínua então f^{-1} define uma aplicação de $\mathcal{O}Y$ em $\mathcal{O}X$ que preserva claramente as operações $\wedge$ e $\bigvee$. Isto motiva a seguinte definição:

Um *reticulado local* é um reticulado completo L que satisfaz a lei distributiva infinita

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

Um *homomorfismo* de reticulados locais $h : L \to M$ é uma aplicação de L em M tal que $h(\wedge F) = \wedge h[F]$ para qualquer subconjunto finito F de L (em particular, para $F = \emptyset$, $h(1) = 1$) e $h(\bigvee S) = \bigvee h[S]$ para qualquer $S \subseteq L$ (em particular, para $S = \emptyset$, h(0)=0).

Denotaremos a categoria dos reticulados locais e dos respectivos homomorfismos por Frm[1].

2.2. Reticulados locais versus álgebras de Heyting. Pelo Teorema do Functor Adjunto (1.9) um reticulado completo satisfaz a lei distributiva infinita se e só se for uma álgebra de Heyting. Portanto os reticulados locais são exactamente as álgebras de Heyting completas; porém, como vimos, os morfismos naturais a considerar entre reticulados da forma $\mathcal{O}X$ não são homomorfismos de álgebras de Heyting (não preservam a implicação $\to$). A categoria Frm difere pois da categoria das álgebras de Heyting nos morfismos. Existe também uma diferença no modo como se olha a estrutura: vemos a estrutura de um reticulado local como dada em primeiro lugar pelos supremos arbitrários e ínfimos finitos (os ínfimos infinitos estão presentes, claro, mas não representam um papel fundamental, assim como os pseudocomplementos relativos). Como veremos, este ponto de vista é justificado pela interpretação de um reticulado local

[1] Da designação "frame" hoje adoptada, na literatura inglesa, para reticulado local.

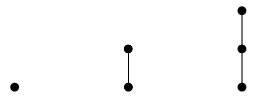
como um sistema de conjuntos abertos de um "espaço generalizado", ou ainda como a estrutura algébrica por detrás da lógica das observações finitas [13].

2.3. Exemplos de reticulados locais.

(1) Reticulados distributivos finitos.

(2) Álgebras de Boole completas.

(3) Cadeias (i.e. conjuntos totalmente ordenados) completas.
Casos particulares relevantes:



1 **2** **3**

(4) Reticulado $\mathcal{O}X$ dos abertos de qualquer espaço topológico X.

(5) Dado um reticulado local L, qualquer subconjunto $M \subseteq L$ tal que

$$S \subseteq M \Rightarrow \bigvee S \in M \quad \text{(em particular, } 0 \in M\text{)}$$

e

$$F \text{ finito, } F \subseteq M \Rightarrow \wedge F \in M \quad \text{(em particular, } 1 \in M\text{)}$$

é um reticulado local, chamado *sub-reticulado local* de L. As topologias num conjunto X são os sub-reticulados locais da topologia discreta $\mathcal{P}(X)$.

(6) Dados quaisquer elementos a, b num reticulado local L, com $a \leq b$, então

$$[a, b] := \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$$

é um reticulado local onde $\wedge$ é a restrição de $\wedge$ em L, o mesmo para $\bigvee$. Salvo o caso $a = 0$ e $b = 1$, não é um sub-reticulado local de L.

Casos particulares relevantes: $[0, b]$ e $[a, 1]$, usualmente denotados por $\downarrow b$ e $\uparrow a$, respectivamente. Obviamente $[a, b] = \uparrow a \cap \downarrow b$.

(7) Para qualquer $\wedge$-*semi-reticulado* A (i.e. conjunto parcialmente ordenado no qual todo o subconjunto finito – incluindo $\emptyset$ – possui ínfimo), a família dos subconjuntos descendentes[2] de A, que denotaremos por $\mathcal{D}A$, é um reticulado local com $\wedge = \cap$ e $\bigvee = \bigcup$, visto intersecções e uniões de conjuntos descendentes serem ainda descendentes.

[2] $S \subseteq A$ é *descendente* caso $\downarrow s \subseteq S$ sempre que $s \in S$.

(8) Seja A um reticulado distributivo. A família $\mathcal{I}A$ dos ideais de A é fechada para intersecções arbitrárias pelo que é um reticulado completo. O supremo de dois ideias J e K é o ideal $J \vee K = \{a \vee b \mid a \in J, b \in K\}$.

$\mathcal{I}A$ é distributivo; com efeito, sempre que $a \vee b \in J$ com $a \in H$ e $b \in K$, então $a \in J$ e $b \in J$ logo $a \in J \cap H$ e $b \in J \cap K$. Portanto $a \vee b \in (J \cap H) \vee (J \cap K)$, pelo que $J \cap (H \vee K) \subseteq (J \cap H) \vee (J \cap K)$.

Em $\mathcal{I}A$ o supremo de uma família dirigida coincide claramente com a união. Isto basta para concluirmos que $\mathcal{I}A$ é um reticulado local. De facto, é um exercício muito simples mostrar que

Se L é um reticulado completo distributivo tal que

$$x \wedge \bigsqcup_{i \in I} x_i = \bigsqcup_{i \in I} (x \wedge x_i)$$

(onde $\bigsqcup_{i \in I} x_i$ indica o supremo da família dirigida $\{x_i\}_{i \in I}$) então L é um reticulado local.

(Basta para isso observar que $\bigvee_{i \in I} x_i = \bigsqcup \{\bigvee_{i \in F} x_i \mid F \subseteq I, F \text{ finito}\}$.)

2.4. Exemplos de homomorfismos de reticulados locais.

(1) Todos os homomorfismos de reticulados distributivos finitos.

(2) Todos os homomorfismos completos de álgebras de Boole completas.

(3) Como já observámos, toda a aplicação contínua $f : (X, \mathcal{O}X) \to (Y, \mathcal{O}Y)$ induz um homomorfismo de reticulados locais

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{O}f : & \mathcal{O}Y & \to & \mathcal{O}X \\ & U & \mapsto & f^{-1}(U) \end{array}$$

(4) Para cada $a \in L$, as aplicações

$$\begin{array}{ccc} L & \to & {\downarrow} a \\ x & \mapsto & x \wedge a \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{ccc} L & \to & {\uparrow} a \\ x & \mapsto & x \vee a \end{array}$$

são homomorfismos de reticulados locais.

(5) Para cada reticulado local L, existem homomorfismos de reticulados locais, $\mathbf{2} \to L$ e $L \to \mathbf{1}$, únicos.

(6) Para qualquer reticulado local L, as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \bigvee : & \mathcal{I}L & \to & L \\ & J & \mapsto & \bigvee J \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \bigvee : & \mathcal{D}L & \to & L \\ & S & \mapsto & \bigvee S \end{array}$$

são homomorfismos de reticulados locais.

(7) Para $f : A \to B$ em $\wedge$-SLat, a aplicação $\mathcal{D}f : \mathcal{D}A \to \mathcal{D}B$, sendo $\mathcal{D}f(X)$ o conjunto descendente gerado por $f[X]$, isto é,

$$\mathcal{D}f(X) = \downarrow f[X] = \bigcup_{x \in X} \downarrow f(x),$$

é um homomorfismo de reticulados locais.

(8) Para $f : A \to B$ em DLat, $\mathcal{I}f : \mathcal{I}A \to \mathcal{I}B$ definida por $\mathcal{I}f(J) = \bigcup_{a \in J} \downarrow f(a)$ é um homomorfismo de reticulados locais[3].

[3]Para provar que $\mathcal{I}f$ preserva supremos arbitrários basta mais uma vez verificar que preserva supremos finitos e supremos de conjuntos dirigidos.

3. Aspecto algébrico de Frm

Da definição da categoria Frm é evidente a sua natureza algébrica. Neste capítulo vamos analisar isto em mais pormenor.

3.1. F-álgebras. Definamos uma *F-álgebra* à maneira da Álgebra Universal, como sendo um conjunto A munido das operações

- $\perp, \top$ (duas operações 0-árias)
- $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (uma operação binária)
- $W_\kappa : A^\kappa \to A$ (uma operação de aridade κ para cada cardinal κ)

e satisfazendo as seguintes equações:

- $(A, \cdot, \top)$ é um monóide comutativo idempotente ($\top$ é a identidade), com zero $\perp$ (satisfaz a lei absorvente $x \cdot \perp = \perp \cdot x = \perp$ para qualquer x);
- $W_0 x_i = \perp$, $x_j(W_\kappa x_i) = x_j$, $x(W_\kappa x_i) = W_\kappa(x \cdot x_i)$.

Abstemo-nos de definir *homomorfismo de F-álgebras* (a definição é a usual, claro!).

Proposição. *A categoria* Frm *é (concretamente) isomorfa à categoria F-*Alg *das F-álgebras.*

Demonstração (Esboço). Qualquer reticulado local determina uma F-álgebra no seu conjunto subjacente; basta fazer $\perp = 0$, $\top = 1$, $x \cdot y = x \wedge y$ e $W_\kappa x_i = \bigvee x_i$.

Reciprocamente, sendo A uma F-álgebra, definindo a seguinte ordem parcial em A,

$$x \leq y \equiv x \cdot y = x,$$

é evidente que obtemos um reticulado local.

É também claro que os homomorfismos de F-álgebras são homomorfismos dos reticulados locais a eles associados e vice-versa.

Como estes processos são inversos um do outro, daí o isomorfismo. ∎

Podemos então concluir que a categoria Frm é *apresentável por equações.*

3.2. O functor livre F : Set $\to$ SLat. Além disso existem reticulados locais livres, isto é, existe um *functor livre* Set $\to$ Frm, adjunto à esquerda do functor de esquecimento Frm $\to$ Set. Faremos a construção deste functor livre em duas etapas (cada uma delas será de muita utilidade mais tarde). Consideremos a categoria SLat dos $\wedge$-semi-reticulados (objectos: monóides comutativos idempotentes $(A, \wedge, 1)$; morfismos: aplicações que preservam $\wedge$ e 1) e o functor F : Set $\to$ SLat definido por $FX = (\{Y \subseteq X \mid Y \text{ é finito}\}, \supseteq)$ (claro que aqui, como sempre, estamos a considerar $\emptyset$ um conjunto finito) e $Ff(Y) = f[Y]$. Note que em FX a operação é a união.

Proposição. *F é um functor livre, com unidade $\eta_X : X \to FX$ dada por $\eta_X(x) = \{x\}$.*

Demonstração. Sejam X um conjunto, A um $\wedge$-semi-reticulado e $f : X \to A$ uma função. Então existe um único homomorfismo de $\wedge$-semi-reticulados, $\phi : FX \to A$, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & FX \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

é comutativo:

Se $\phi(\eta_X(x)) = f(x)$ temos, para $\{x_1, \ldots, x_n\} \in FX$,

$$\phi(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \phi(\{x_1\} \wedge \ldots \wedge \{x_n\}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \phi(\eta_X(x_i)) = \bigwedge_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{1}$$

Portanto, caso exista, ϕ é único. Por outro lado, a fórmula (1) define, de facto, um homomorfismo de $\wedge$-semi-reticulados ϕ, para cada f. ∎

3.3. O functor livre $\mathcal{D}$: SLat $\to$ Frm. Dado um $\wedge$-semi-reticulado A, consideremos o reticulado local $\mathcal{D}A$ do Exemplo 2.3(7); dado ainda um morfismo $f : A \to B$ em SLat consideremos a aplicação $\mathcal{D}f : \mathcal{D}A \to \mathcal{D}B$ do Exemplo 2.4(7). Estas correspondências definem um functor $\mathcal{D}$: SLat $\to$ Frm (Exercício: verifique).

Proposição. *$\mathcal{D}$ é um functor livre, com unidade*

$$\begin{array}{rccc} \eta_A : & A & \to & \mathcal{D}A \\ & a & \mapsto & \downarrow a. \end{array}$$

Demonstração. É um exercício simples verificar que η_A é, de facto, um morfismo de SLat. Vejamos que, dados um reticulado local L e um morfismo $f : A \to L$ em SLat, existe um único morfismo ϕ em Frm que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{D}A \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & L \end{tikzcd}$$

comutativo.

Com efeito, se tal ϕ existe então

$$\phi(X) = \phi\Big(\bigcup\{\downarrow x \mid x \in X\}\Big) = \bigvee_{x \in X} \phi(\eta_A(x)) = \bigvee_{x \in X} f(x), \tag{2}$$

pelo que será univocamente determinado. Por outro lado, uma função $\phi : \mathcal{D}A \to L$ dada pela identidade (2) preserva claramente supremos, 0 e 1.

Finalmente, por distributividade,

$$\begin{aligned} \phi(X) \wedge \phi(Y) &= \bigvee_{x \in X} f(x) \wedge \bigvee_{y \in Y} f(y) \\ &= \bigvee\{f(x \wedge y) \mid x \in X, y \in Y\} \\ &= \bigvee\{f(z) \mid z \in X \cap Y\} \\ &= \phi(X \cap Y). \end{aligned}$$ ■

Portanto, para cada $A \in \mathsf{SLat}$, $\mathcal{D}A$ é o *reticulado livre sobre A.*

3.4. Corolário. *$\mathcal{D}F(X)$ é o reticulado local livre sobre o conjunto X.* ■

Do facto de Frm ser apresentável por equações e deste corolário segue que Frm é aquilo que os categoristas apelidam de *categoria algébrica.* Isto revelar-se-á muito importante no estudo dos reticulados locais: na prática significa que temos à disposição todos os instrumentos que qualquer algebrista possui ao trabalhar nas categorias familiares dos grupos, módulos, etc., como, por exemplo, congruências (para descrever os quocientes) e um processo de definir reticulados locais especificando geradores e relações.

3.5. Categorias algébricas. Para os leitores mais interessados em categorias referimos a seguinte proposição, que resume algumas das características importantes das categorias apresentáveis por equações e das categorias algébricas:

Proposição. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria apresentável por equações (i.e., os seus objectos podem ser descritos por uma classe própria de operações e equações). Então:*

(a) *$\mathcal{C}$ possui todos os limites (pequenos) e estes são construídos exactamente como em* Set *(ou seja, o functor de esquecimento $\mathcal{C} \to$* Set *preserva-os);*

(b) *Se o functor de esquecimento $\mathcal{C} \to$* Set *tem um adjunto à esquerda então $\mathcal{C}$ é algébrica e possui todos os colimites (pequenos);*

(c) *Os monomorfismos em $\mathcal{C}$ são exactamente os homomorfismos injectivos;*

(d) *Os epimorfismos em C não são necessariamente sobrejectivos, mas os epimorfismos regulares são exactamente as aplicações sobrejectivas;*

(e) *Todo o morfismo em C pode ser factorizado (de modo único, a menos de isomorfismo) num epimorfismo regular seguido de um monomorfismo.*

Demonstração. Veja [12] (Capítulo I). ∎

4. Parentes (por adjunção) de Frm

4.1. Semi-reticulados. Consideremos a categoria SLat dos $\wedge$-semi-reticulados e o functor $S : \mathsf{Frm} \to \mathsf{SLat}$ que esquece os supremos $\bigvee$. A Proposição 3.3 diz-nos que:

Teorema. *$\mathcal{D}$ é adjunto à esquerda de S, com unidade $\downarrow: A \to S\mathcal{D}A$ definida por $a \mapsto \downarrow a$ e co-unidade $\bigvee : \mathcal{D}SL \to L$ definida por $X \mapsto \bigvee X$.*

Demonstração. Só falta verificar que $\bigvee : \mathcal{D}SL \to L$ é de facto a co-unidade da adjunção, o que pode ser feito verificando as identidades triangulares ou, então, a partir da demonstração da Proposição 3.3:

Dada a função identidade $1 : SL \to L$, existe um único $\phi : \mathcal{D}SL \to L$ tal que

$$\begin{tikzcd} SL \arrow[r, "\eta_{SL}"] \arrow[dr, "1"'] & \mathcal{D}SL \arrow[d, dashed, "\phi"] \\ & L \end{tikzcd}$$

onde $\phi(X) = \bigvee_{x \in X} x$. Como, pela primeira identidade triangular, $S\varepsilon_L \cdot \eta_{SL} = 1_{SL}$, isto é, $\varepsilon_L \cdot \eta_{SL} = 1$, decorre, pela unicidade de ϕ, que $\varepsilon_L(X) = \bigvee X$. ∎

Exercício. Verifique que a bijecção natural entre $\mathsf{Frm}(\mathcal{D}A, L)$ e $\mathsf{SLat}(A, SL)$ é dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Frm}(\mathcal{D}A, L) & \longleftrightarrow & \mathsf{SLat}(A, SL) \\ h & \longrightarrow & \widetilde{h} \\ \overline{g} & \longleftarrow & g \end{array}$$

onde $\widetilde{h}\,(a) = h(\downarrow a)$ e $\overline{g}(X) = \bigvee_{x \in X} g(x)$.

4.2. Reticulados distributivos. Frm é uma subcategoria (não plena) de DLat. Consideremos o functor $\mathcal{I} : \mathsf{DLat} \to \mathsf{Frm}$ definido pelas correspondências $A \mapsto \mathcal{I}A$ do Exemplo 2.3(8) e $f \mapsto \mathcal{I}f$ do Exemplo 2.4(8).

Teorema. *$\mathcal{I}$ é um adjunto à esquerda da inclusão não plena $E : \mathsf{Frm} \hookrightarrow \mathsf{DLat}$, com unidade $\downarrow: A \to \mathcal{I}A$ e co-unidade $\bigvee : \mathcal{I}L \to L$.*

Demonstração. Comecemos por verificar que $\downarrow$ é uma transformação natural $1_{\mathsf{DLat}} \stackrel{\cdot}{\to} E\mathcal{I}$:

Com efeito, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\downarrow"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{I}A \arrow[d, "\mathcal{I}f"] \\ B \arrow[r, "\downarrow"'] & \mathcal{I}B \end{tikzcd}$$

comuta pois $\downarrow f(a) = f(\downarrow a)$.

Por outro lado, $\bigvee$ é uma transformação natural $\mathcal{I}E \stackrel{\cdot}{\to} 1_{\mathsf{Frm}}$:

Agora o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}L \arrow[r, "\bigvee"] \arrow[d, "\mathcal{I}h"'] & L \arrow[d, "h"] \\ \mathcal{I}M \arrow[r, "\bigvee"'] & M \end{tikzcd}$$

comuta porque $\bigvee(h[J]) = \bigvee(\bigcup_{x \in J} h(x)) = \bigvee_{x\in J} h(x) = h(\bigvee_{x \in J} x) = h(\bigvee J)$.

Quanto às identidades triangulares:

Consideremos

$$\mathcal{I}A \xrightarrow{\mathcal{I}\downarrow} \mathcal{I}E\mathcal{I}A \xrightarrow{\bigvee} \mathcal{I}A.$$

Nesta composição

$$J \mapsto \{H \in \mathcal{I}A \mid H \subseteq \downarrow a \text{ para algum } a \in J\} \mapsto \bigcup_{a \in J} \downarrow a = J.$$

A outra identidade é trivial. ∎

Observação. Para qualquer reticulado distributivo A, $\mathcal{I}A$ é o *reticulado local livre sobre* A.

Temos assim uma maneira canónica de mergulhar os $\wedge$-semi-reticulados e os reticulados distributivos nos reticulados locais. Os functores acima definidos induzem functores $\mathcal{D}, \mathcal{I} : \mathsf{Frm} \to \mathsf{Frm}$ que desempenham um papel muito importante em diversas construções da topologia sem pontos.

4.3. Espaços topológicos. Recordemos que dada uma aplicação contínua $f : X \to Y$, a aplicação $\mathcal{O}f : \mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$ definida por $\mathcal{O}f(U) = f^{-1}(U)$ é um homomorfismo de reticulados locais. Isto define um functor $\mathcal{O} : \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}$, contravariante:

Para verificar que $\mathcal{O}$ preserva a composição consideremos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ em Top. Aplicando $\mathcal{O}$ obtemos, para cada $U \in \mathcal{O}Z$,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(gf)(U) &= \{x \in X \mid gf(x) \in U\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(U)\} \\ &= \{x \in X \mid x \in f^{-1}(g^{-1}(U))\} \\ &= f^{-1}(g^{-1}(U)) \\ &= (\mathcal{O}f\mathcal{O}g)(U).\end{aligned}$$

Claramente, $\mathcal{O}(1_X) = 1_{\mathcal{O}X}$.

Dado um reticulado local, podemos determinar um espaço topológico que "melhor o aproxime"? Verifiquemos que sim, definindo o chamado *functor espectral* Σ : Frm $\to$ Top.

Como um ponto x de um espaço X é o mesmo que uma aplicação contínua $x : \mathbf{1} \to X$, onde $\mathbf{1}$ denota o espaço topológico de cardinal 1, (mais concretamente, existe uma correspondência bijectiva entre as aplicações contínuas $\mathbf{1} \to X$ e os pontos de X), e $\mathcal{O}x : \mathcal{O}X \to \mathcal{O}\mathbf{1} = \mathbf{2}$, parece razoável definir um *ponto* de um reticulado local L como um homomorfismo de reticulados locais $L \to \mathbf{2}$.

Pela correspondência $x \mapsto \mathcal{O}x$, aos pontos x de $U \in \mathcal{O}X$ correspondem morfismos $\mathcal{O}x : \mathcal{O}X \to \mathbf{2}$ verificando $\mathcal{O}x(U) = 1$. Então, para cada $a \in L$, definamos

$$\Sigma_a = \{p : L \to \mathbf{2} \mid p(a) = 1\}.$$

Lema. *$\{\Sigma_a \mid a \in L\}$ é uma topologia em $\Sigma L = \{p : L \to \mathbf{2} \mid p \in \text{Frm}\}$.*

Demonstração. Claramente $\Sigma_0 = \emptyset$, $\Sigma_1 = \Sigma L$ e $\Sigma_a \cap \Sigma_b = \Sigma_{a \wedge b}$. Além disso, para cada $S \subseteq L$,

$$\begin{aligned} p \in \bigcup_{a \in S} \Sigma_a &\Leftrightarrow p(a) = 1 \text{ para algum } a \in S \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{a \in S} p(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow p(\bigvee S) = 1 \\ &\Leftrightarrow p \in \Sigma_{\bigvee S}. \end{aligned}$$

■

Ao espaço topológico $(\Sigma L, \{\Sigma_a \mid a \in L\})$ chamamos *espectro* de L. A correspondência $L \mapsto \Sigma L$ é functorial:

Para cada homomorfismo $h : L \to M$ de reticulados locais, seja $\Sigma h : \Sigma M \to \Sigma L$ definido por $(\Sigma h)(p) = p \cdot h$. Trata-se de facto de uma aplicação contínua uma vez que

$$(\Sigma h)^{-1}(\Sigma_a) = \{p \in \Sigma M \mid p \cdot h \in \Sigma_a\} = \{p \in \Sigma M \mid p(h(a)) = 1\} = \Sigma_{h(a)}.$$

As correspondências $L \mapsto \Sigma L$ e $h \mapsto \Sigma h$ definem um functor contravariante Σ : Frm $\to$ Top:

- Para $L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{g} N$, $\Sigma(gh)(p) = p(gh) = (pg)h = \Sigma h(\Sigma g(p)) = ((\Sigma h)(\Sigma g))(p)$.
- $\Sigma 1_L(p) = p \cdot 1_L = p$.

Vejamos em seguida que os functores $\mathcal{O}$ e Σ estabelecem uma adjunção dual entre as categorias Top e Frm (como $\mathcal{O}$ e Σ são contravariantes, queremos com isto significar que, interpretando os functores covariantemente como $\mathcal{O} : \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}^{op}$ e $\Sigma : \mathsf{Frm}^{op} \to \mathsf{Top}$, estes definem uma adjunção; como continuaremos, por preguiça, a trabalhar em Frm em vez de Frm^{op}, teremos que ter cuidado com o sentido dos morfismos).

Proposição. *Σ é adjunto à direita de $\mathcal{O}$, sendo*

$$\begin{array}{rccc} \eta_X : & X & \to & \Sigma\mathcal{O}X \\ & x & \mapsto & \mathcal{O}x, \end{array}$$

onde $\mathcal{O}x(U) = card(U \cap \{x\})$, a unidade, e

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_L : & L & \to & \mathcal{O}\Sigma L \\ & a & \mapsto & \Sigma_a \end{array}$$

a co-unidade.

Demonstração. Teremos que exibir uma bijecção (natural em X e em L)

$$\mathsf{Top}(X, \Sigma L) \rightleftarrows \mathsf{Frm}(L, \mathcal{O}X)$$

na qual ε_L apareça como imagem de $1_{\Sigma L}$ e η_X apareça como imagem de $1_{\mathcal{O}X}$. Bastará para isso considerar

$$f \in \mathsf{Top}(X, \Sigma L) \overset{\Psi_{X,L}}{\longmapsto} \overline{f} : \begin{array}{ccc} L & \to & \mathcal{O}X \\ a & \mapsto & f^{-1}(\Sigma_a) \end{array}$$

e

$$h \in \mathsf{Frm}(L, \mathcal{O}X) \overset{\Phi_{X,L}}{\longmapsto} \underline{h} : \begin{array}{ccc} X & \to & \Sigma L \\ x & \mapsto & \mathcal{O}x \cdot h. \end{array}$$

Deixamos como exercício a verificação de que $\overline{f} \in \mathsf{Frm}(L, \mathcal{O}X)$, $\underline{h} \in \mathsf{Top}(X, \Sigma L)$, $(\Phi_{X,L} \cdot \Psi_{X,L})(f) = f$ e $(\Psi_{X,L} \cdot \Phi_{X,L})(h) = h$, além da naturalidade em X e em L das correspondências Ψ e Φ.

Finalmente

$$\begin{array}{rccc} \overline{1_{\Sigma L}} : & L & \to & \mathcal{O}\Sigma L \\ & a & \mapsto & 1_{\Sigma L}^{-1}(\Sigma_a) = \Sigma_a \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \underline{1_{\mathcal{O}X}} : & X & \to & \Sigma\mathcal{O}X \\ & x & \mapsto & \mathcal{O}x \cdot 1_{\mathcal{O}X} = \mathcal{O}x. \end{array}$$ ■

Daqui decorre, em particular, que para cada $f : L \to \mathcal{O}X$ em Frm existe uma única aplicação contínua $\overline{f} : X \to \Sigma L$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{O}\Sigma L \arrow[d, dashed, "\mathcal{O}\overline{f}"] \\ & \mathcal{O}X \end{tikzcd}$$

é comutativo. Esta aplicação $\overline{f}$ é a composição

$$\begin{array}{rcccll} \Sigma f \cdot \eta_X : & X & \longrightarrow & \Sigma L & & \\ & x & \longmapsto & \mathcal{O}x \cdot f : L & \rightarrow & \mathbf{2} \\ & & & a & \mapsto & card(f(a) \cap \{x\}). \end{array}$$

4.4. Descrições alternativas do espectro ΣL. Um filtro $P \subseteq L$ diz-se *completamente primo* se

$$\left(\bigvee X \in P \Rightarrow X \cap P \neq \emptyset\right) \text{ para qualquer } X \subseteq L$$

(generaliza claramente a noção de filtro primo). Denotaremos o conjunto dos filtros completamente primos de L por $FCP(L)$.

Um elemento $a \in L$ é *primo* caso o ideal principal $\downarrow a$ seja primo. Equivalentemente, a é primo se

$$a \neq 1 \text{ e } (a \geq x \wedge y \Rightarrow a \geq x \text{ or } a \geq y)$$

ou, o que é o mesmo,

$$a \neq 1 \text{ e } (a = x \wedge y \Rightarrow a = x \text{ or } a = y).$$

Identificaremos o conjunto dos elementos primos de L por $pr(L)$.

Proposição. *Existe uma correspondência bijectiva entre os pontos, os filtros completamente primos e os elementos primos de L, dada por:*

$$p \longmapsto P_p := p^{-1}(\{1\})$$

$$P \longmapsto a_P := \bigvee\{x \in L \mid x \notin P\}$$

$$\begin{array}{cccccl} a & \longmapsto & p_a : L & \rightarrow & \mathbf{2} & \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & se\ x \leq a \\ 1 & se\ x \not\leq a. \end{cases} \end{array}$$

Demonstração. Cada entidade indicada é do tipo certo:

(1) P_p é um filtro de L pois $\{1\}$ é um filtro de $\mathbf{2}$. Se $\bigvee X \in P_p$ então $p(\bigvee X) = 1$, isto é, $\bigvee_{x \in X} p(x) = 1$. Portanto existe $x \in X$ tal que $p(x) = 1$.

(2) Se $a_P = x \wedge y$ então $x \geq a_P$ e $y \geq a_P$ o que implica

$$(x = a_P \text{ ou } x \in P) \text{ e } (y = a_P \text{ ou } y \in P).$$

Então $a_P = x$ ou $a_P = y$ uma vez que $x \in P$ e $y \in P$ implicaria $x \wedge y \in P$, ou seja, $a_P \in P$, e como P é completamente primo, teríamos a existência de $x \neq P$ tal que $x \in P$.

O facto de P ser completamente primo implica também que $a_P \neq 1$.

(3) Como a é primo,

$$\begin{aligned} p_a(x \wedge y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \wedge y \leq a \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq a \text{ ou } y \leq a \\ &\Leftrightarrow \quad p_a(x) = 0 \text{ ou } p_a(y) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $p_a(x \wedge y) = p_a(x) \wedge p_a(y)$. Analogamente, podem provar-se as outras condições para que p_a seja um homomorfismo de reticulados locais.

Finalmente, observemos que as três correspondências são bijectivas:

$$p \longmapsto p^{-1}(\{1\}) \longmapsto a := \bigvee_{p(x)=0} x \longmapsto \begin{array}{rcl} p_a : L & \to & \mathbf{2} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ se } p(x) = 0 \\ 1 \text{ se } p(x) = 1 \end{cases} \end{array}$$

$$P \longmapsto a_P \longmapsto p_{a_P} \longmapsto p_{a_P}^{-1}(\{1\}) = \{x \in L \mid x \not\leq a_P\} = P$$

$$a \longmapsto p_a \longmapsto p_a^{-1}(\{1\}) \longmapsto \bigvee \{x \in L \mid x \in p_a^{-1}(\{0\})\} = a. \qquad \blacksquare$$

Esta proposição mostra que o espectro de um reticulado local pode também ser descrito como um espaço de filtros completamente primos ou de elementos primos. Correspondentemente, o aberto Σ_a traduz-se em $\{P \in FCP(L) \mid a \in P\}$ (pois $p(a) = 1$ corresponde a $a \in p^{-1}(\{1\})$) e $\{x \in pr(L) \mid a \not\leq x\}$, respectivamente. Como o complementar de um filtro completamente primo é um ideal primo principal o espectro pode também ser descrito em termos de ideais primos principais.

A nossa escolha para ΣL como espaço de morfismos $p : L \to \mathbf{2}$ torna as provas das propriedades de ΣL particularmente transparentes. Por exemplo, a functorialidade já coloca alguns problemas para o espaço dos elementos primos. No entanto alguns autores simpatizam mais com esta descrição pois torna os elementos do espectro elementos de L — e depois?!

4.5. A "maior" dualidade contida na adjunção dual $\mathsf{Top} \overset{\mathcal{O},\Sigma}{\rightleftarrows} \mathsf{Frm}$. Do isomorfismo natural

$$\mathsf{Top}(X, \Sigma L) \cong \mathsf{Frm}(L, \mathcal{O}X)$$

sai em particular que

$$\mathsf{Top}(X, \Sigma\mathcal{O}Y) \cong \mathsf{Frm}(\mathcal{O}Y, \mathcal{O}X)$$

e

$$\mathsf{Top}(\Sigma M, \Sigma L) \cong \mathsf{Frm}(L, \mathcal{O}\Sigma M).$$

Quando é que $\Sigma\mathcal{O}Y \cong Y$ para podermos concluir que as aplicações contínuas $X \to Y$ são totalmente descritas em termos algébricos por $\mathsf{Frm}(\mathcal{O}Y, \mathcal{O}X)$? E, analogamente, quando é que $\mathcal{O}\Sigma M \cong M$? Em termos categoriais, o que estamos a perguntar é que dualidade está contida nesta adjunção dual?

Uma dualidade, que como vimos é uma equivalência entre uma categoria $\mathcal{C}$ e a oposta de uma categoria $\mathcal{D}$, é dada por um par de functores contravariantes $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e um par de isomorfismos naturais $\eta : 1_{\mathcal{C}} \stackrel{\cdot}{\to} GF$ e $\varepsilon : 1_{\mathcal{D}} \stackrel{\cdot}{\to} FG$, que podem ser escolhidos de modo a que, para cada $A \in Obj\mathcal{C}$ e para cada $B \in Obj\mathcal{D}$,

$$G\varepsilon_B \cdot \eta_{GB} = 1_{GB} \text{ e } F\eta_A \cdot \varepsilon_{FA} = 1_{FA}. \tag{1}$$

De (1) decorre que η_{GB} é um isomorfismo sempre que ε_B o for e que ε_{FA} o é sempre que η_A o for. Então os functores F e G podem ser restringidos às subcategorias plenas

$$Fix\,\eta := \{A \in Obj\mathcal{C} \mid \eta_A \text{ é um isomorfismo}\}$$

e

$$Fix\,\varepsilon := \{B \in Obj\mathcal{D} \mid \varepsilon_B \text{ é um isomorfismo}\},$$

onde induzem uma dualidade $Fix\,\eta \overset{F,G}{\simeq} Fix\,\varepsilon$. Evidentemente estas subcategorias são as maiores subcategorias de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente, às quais F e G podem ser restringidos de modo a obtermos uma dualidade.

Portanto a teoria das categorias diz-nos que

$$\{X \in \mathsf{Top} \mid \eta_X \text{ é um isomorfismo}\} \quad \underset{\Sigma}{\overset{\mathcal{O}}{\rightleftarrows}} \quad \{L \in \mathsf{Frm} \mid \varepsilon_L \text{ é um isomorfismo}\}.$$

é a "maior" dualidade contida na adjunção dual

$$\mathsf{Top} \overset{\mathcal{O},\Sigma}{\rightleftarrows} \mathsf{Frm}.$$

Determinemos estas subcategorias.

4.6. Reticulados locais espaciais. Comecemos por caracterizar os reticulados locais L para os quais ε_L é um isomorfismo. Como ε_L é sempre sobrejectiva,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_L \text{ é um isomorfismo} \quad &\Leftrightarrow \quad \varepsilon_L \text{ é injectiva} \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\Sigma_a = \Sigma_B \Rightarrow a = b\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\Sigma_a \subseteq \Sigma_b \Rightarrow a \leq b\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(a \not\leq b \Rightarrow \exists p \in \Sigma L : p(a) = 1 \text{ e } p(b) = 0\Big).
\end{aligned}$$

Deste modo ε_L é um isomorfismo se e só se existem em L pontos suficientes para separar os elementos de L. Estes reticulados locais são chamados *reticulados locais com pontos suficientes*[1], ou ainda, *reticulados locais espaciais*.

É claro que qualquer topologia $\mathcal{O}X$ satisfaz esta condição:

$$U \not\subseteq V \Rightarrow \mathcal{O}x(U) = 1 \text{ e } \mathcal{O}x(V) = 0 \text{ para } x \in U \setminus V.$$

Portanto, L é espacial se e só se $L \cong \mathcal{O}X$ para algum X. Denotaremos a subcategoria de Frm dos reticulados locais espaciais por SpFrm.

Observação. Se recordarmos a descrição dos pontos de L em termos dos elementos primos de L podemos obter uma caracterização dos reticulados locais espaciais:

L é espacial se e só se cada $a \in L$ é um ínfimo de elementos primos.

Esta foi a primeira caracterização das topologias, em termos de reticulados, descoberta[2].

Um elemento a de um reticulado L diz-se um *átomo* (resp. *co-átomo*) se $a \neq 0$ e $x = a$ sempre que $0 \neq x \leq a$ (resp. $a \neq 1$ e $x = a$ sempre que $a \leq x \neq 1$). Numa álgebra de Boole a é um átomo se e só se $\neg a$ é um co-átomo. Um reticulado L diz-se *atómico* se cada $a \in L$ é supremo de uma família de átomos.

Lema. *Numa álgebra de Boole, cada elemento primo é um co-átomo.*

Demonstração. Se a é primo e $a < x$, como $a = x \wedge (a \vee \neg x)$, temos $a = a \vee \neg x$. Então $\neg x \leq a$ pelo que $x = x \vee a \geq x \vee \neg x = 1$. ∎

Proposição. *Uma álgebra de Boole completa é espacial se e só se é atómica.*

Demonstração. Seja a um elemento de uma álgebra de Boole, B, completa e espacial. Pela observação acima, podemos escrever $\neg a = \bigwedge_{i \in I} x_i$, onde cada x_i é primo, pelo que $a = \bigvee_{i \in I} \neg x_i$ onde, pelo Lema, cada $\neg x_i$ é um átomo. Portanto B é atómica.

Reciprocamente, basta usar o Teorema de Lindenbaum-Tarski: toda a álgebra de Boole B, completa e atómica, é isomorfa a $\mathcal{P}(\{\text{átomos de } B\})$; portanto é isomorfa à topologia discreta de $X = \{\text{átomos de } B\}$. ∎

Esta proposição mostra que existe uma grande classe de reticulados locais que não são espaciais e que, portanto, a topologia sem pontos é decididamente mais abrangente do que a sua precursora clássica.

---

[1] Pontos suficientes para separar os elementos de L, isto é, para poder recuperar os elementos de L a partir do conhecimento do reticulado dos abertos do seu espectro ΣL.

[2] Cf. J. R. Büchi, *Representation of complete lattices by sets*, Portugal. Math. 11 (1952) 151-167.

4.7. Espaços sóbrios. Determinemos agora os espaços topológicos X para os quais η_X é um isomorfismo.

Lema. *Os pontos de $\mathcal{O}X$ correspondem bijectivamente aos fechados $\cup$-irredutíveis de X, não vazios.*

Demonstração. Usando a descrição dos pontos de $\mathcal{O}X$ como elementos primos de $\mathcal{O}X$, bastará observar que

$$U \in \mathcal{O}X \text{ é primo } \Leftrightarrow X \setminus U \neq \emptyset \text{ é fechado, } \cup\text{-irredutível}:$$

"$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} X \setminus U = F_1 \cup F_2 &\Leftrightarrow U = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2) \\ &\Rightarrow U = X \setminus F_1 \text{ ou } U = X \setminus F_2 \\ &\Leftrightarrow X \setminus U = F_1 \text{ ou } X \setminus U = F_2. \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned} U = V \cap W &\Leftrightarrow X \setminus U = (X \setminus V) \cup (X \setminus W) \\ &\Rightarrow X \setminus U = X \setminus V \text{ ou } X \setminus U = X \setminus W \\ &\Leftrightarrow U = V \text{ ou } U = W. \end{aligned}$$

■

Um espaço topológico diz-se *sóbrio*[3] se todo o seu subconjunto fechado, não vazio, $\cup$-irredutível[4] é o fecho de um único conjunto singular.

Proposição. *A unidade $\eta_X : X \to \Sigma\mathcal{O}X$ é um homeomorfismo se e só se X é sóbrio.*

Demonstração. Basta observar que, pela bijecção do Lema, $\eta_X(x) = \mathcal{O}x$ corresponde a

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup\{U \mid U \in \mathcal{O}X, x \notin U\} &= \bigcap\{X \setminus U \mid U \in \mathcal{O}X, x \notin U\} \\ &= \bigcap\{F \mid X \setminus F \in \mathcal{O}X, x \in F\} \\ &= \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

(onde $\overline{\{x\}}$ denota o fecho de $\{x\}$). Daí decorre que η_X é uma bijecção se e só se X é sóbrio. ■

---

[3]Esta definição deve-se a Grothendieck.

[4]Um fechado $F \neq \emptyset$ diz-se $\cup$-*irredutível* se $F = F_1 \cup F_2$ com F_1 e F_2 fechados implica $F = F_1$ ou $F = F_2$.

4.8. Localização dos espaços sóbrios em Top.

Proposição.

(a) *Um espaço X é T_0 se e só se η_X é injectiva; em particular, todo o espaço sóbrio é T_0.*

(b) *Todo o espaço T_2 (i.e. Hausdorff) é sóbrio.*

Demonstração.

(a) Se $x, y \in X$, $\eta_X(x) = \eta_X(y)$ se e só se $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Portanto η_X é injectiva se e só se $x = y$ sempre que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, o que é claramente equivalente à condição T_0.

(b) É suficiente mostrarmos que qualquer fechado $\cup$-irredutível F é um conjunto singular. Suponhamos então $x \neq y$ em F e consideremos abertos U e V, disjuntos, com $x \in U$ e $y \in V$. Então $F = (F \cap (X \setminus U)) \cup (F \cap (X \setminus V))$. Como $x \notin F \cap (X \setminus U)$, F é diferente de $F \cap (X \setminus U)$. Analogamente, $F \neq F \cap (X \setminus V)$, o que contradiz a $\cup$-irredutibilidade de F. Consequentemente $F = \{x\}$. ∎

A inclusão da classe dos espaços sóbrios na dos espaços T_0 é própria; por exemplo $\mathbb{N}$ munido da topologia co-finita ou $\mathbb{R}^n$ munido da topologia de Zariski são T_0 mas não são sóbrios. Como estes espaços são mesmo T_1 podemos também concluir que $T_1 \not\Rightarrow Sob$. A inclusão da classe dos espaços T_2 na dos sóbrios também é própria: basta pensar num produto infinito de espaços de Sierpinski, que, por nem sequer ser T_1, mostra também que $Sob \not\Rightarrow T_1$.

4.9. Conclusão: os reticulados locais como espaços sóbrios "generalizados". Uma vez que a subcategoria Sob da categoria Top é equivalente a SpFrm^{op}, então Frm^{op} é uma extensão de Sob e, portanto, de uma grande parte da topologia clássica (em particular, de toda a topologia de Hausdorff). A categoria Frm^{op} é chamada a categoria Loc dos *locales*[5], onde os objectos são os reticulados locais e os morfismos são opostos aos homomorfismos de reticulados locais.

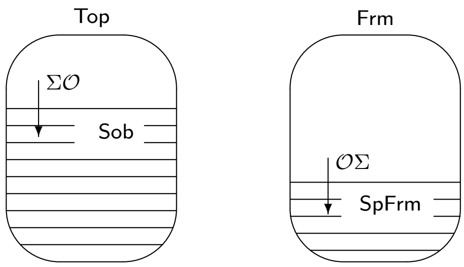
É habitual pois pensar-se nos locales como espaços topológicos generalizados; quando se quer aproveitar a motivação topológica (geométrica) dos reticulados locais trabalha-se em Loc, quando se quer explorar as suas características algébricas trabalha-se em Frm.

Já observámos que, para qualquer $X \in \mathsf{Top}$, $\mathcal{O}X$ é espacial. Analogamente, ΣL é sóbrio para qualquer L (como ε_L é sempre sobrejectiva então $\Sigma(\varepsilon_L)$ é injectiva; mas $\Sigma(\varepsilon_L) \cdot \eta_{\Sigma L} = id$, logo $\Sigma(\varepsilon_L)$ é um homeomorfismo e, equivalentemente, $\eta_{\Sigma L}$ é um homeomorfismo).

A teoria das categorias ainda nos diz que Sob é uma subcategoria reflectiva de Top, sendo $\Sigma\mathcal{O}$ o adjunto à esquerda da inclusão $\mathsf{Sob} \hookrightarrow \mathsf{Top}$ – chamado "*sobrificação*" –,

[5] Designação introduzida por J. Isbell [5] para distinguir os reticulados locais quando vistos como objectos de Frm^{op}.

e SpFrm é uma subcategoria co-reflectiva de Frm, sendo $\mathcal{O}\Sigma$ o adjunto à direita da inclusão SpFrm $\hookrightarrow$ Frm; η_X é o morfismo reflector de X em Sob e ε_L é o morfismo co-reflector de L em SpFrm:



Temos assim justificada a afirmação de que Frm é um ambiente não redundante perfeitamente plausível para fazer topologia. Todo o teorema aí válido será válido, em particular, em todos os espaços topológicos sóbrios. É também perceptível que Sob é mais representativa de Top do que SpFrm de Frm.

Em [6] P. Johnstone justifica a palavra "sóbrio" na definição de espaço sóbrio afirmando:

> "*If we regard two distinct points having the same closure as an instance of double vision (and an irreducible closed set with no generic point as a species of pink elephant!), then the reason for the term 'sober space' will be aparent*".

De facto, se estivermos sóbrios não vemos as coisas a dobrar (portanto não queremos que nenhum par de pontos pertença ao mesmo aberto) e não vemos certamente nenhum elefante cor-de-rosa (fechados irredutíveis sem nenhum ponto genérico), o que vemos é realmente o que lá está.

A propósito, valerá a pena transcrever uma pequena "história" contada por S. Vickers, aquando de uma discussão recente sobre o significado da palavra "sóbrio", ocorrida na rede de teoria das categorias (`http://www.mta.ca/~cat-dist/`):

> *"Alfred Sober - some recollections:*
>
> *Recent mention of sober spaces brought to mind memories of Alfred Philpott Sober, whose sad death from liver failure five years ago ended a long career in topology. Though largely unpublished, it was his work that underlay the notion of what are now known as sober space.*
>
> *In Sober's view, points of topological spaces are essentially blurred and hazy: however hard you try to focus on them they always seem to jiggle about a bit – to him 'focusing on a point' meant to find it within some open neighbourhood, and these almost always left some room for*

manoeuvre. He understood the points to be exactly their open neighbourhood filters, and the spaces that would now be called non-sober were trying to impose an over-clear view of reality, making artificial distinctions between what was actually the same thing or trying to deny the existence of something he could see with his own eyes.

On the related subject of continuity, he saw its essence as that of a function that was not unduly upset by this jiggling: as long as the argument didn't jiggle too much, the result wouldn't either, and he liked to demonstrate the idea by carrying a tray of drinks across a crowded room.

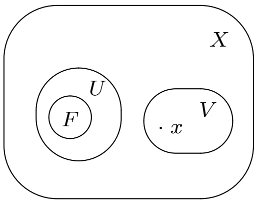
Though not one of the founders of locale theory, he was aware of the idea and greatly sympathetic to it – though he couldn't see any reason for using the French spelling and pronunciation. Once when in the midst of explaining his ideas the lattice structures started to become manifest and he would excitedly talk about 'getting down to the local'.

He studied initially at Cambridge under the influence of Bedford Charles Wells and his thesis, starting off on Klein bottles, soon took in Gross bottles too. He made his academic home in the University of Portsmouth and was much loved by both his colleagues and his students for his parties and for his never-failing warm welcome 'Come in and what'll you have?' He is much missed by all who knew him."

5. Alguns conceitos topológicos em Frm

Existem diversas propriedades de um espaço topológico que não dependem dos seus pontos mas sim do seu reticulado dos abertos. Por exemplo:

5.1. Regularidade. Recordemos que um espaço X se diz *regular* se, para todo o fechado F e todo o $x \in X \setminus F$, existem abertos U e V tais que $F \subseteq U$, $x \in V$ e $U \cap V = \emptyset$:



A condição de regularidade é assim um axioma de separação que separa pontos de fechados.

Teorema. *X é regular se e só se para cada aberto U e cada $x \in U$ existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demonstração. "$\Rightarrow$" Como $x \notin X \setminus U$, existem abertos V e W, disjuntos, tais que $x \in V$ e $X \setminus U \subseteq W$. Claro que então $V \subseteq X \setminus W$ e $X \setminus W \subseteq U$. Como $X \setminus W$ é fechado, $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

"$\Leftarrow$" Seja $x \in X \setminus F$, F fechado. Por hipótese, existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus F$. Bastará agora tomar $U = X \setminus \overline{V}$. ■

Esta proposição diz-nos que X é regular se e só se todo o seu ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas ou, equivalentemente,

$$\forall U \in \mathcal{O}X \quad U = \bigcup\{V \in \mathcal{O}X \mid \overline{V} \subseteq U\}.$$

Consideremos a seguinte relação de ordem definida em $\mathcal{O}X$:

$$U \triangleleft V \equiv U^* \cup V = X.$$

Note que, como o pseudocomplemento U^* é, por definição,

$$\bigcup\{W \in \mathcal{O}X \mid W \cap U = \emptyset\} = X \setminus \overline{U},$$

$U \lhd V$ equivale a $\overline{U} \subseteq V$. Podemos então afirmar que X é regular se e só se

$$\forall U \in \mathcal{O}X \quad U = \bigcup \{V \in \mathcal{O}X \mid V \lhd U\}.$$

Esta caracterização de regularidade está unicamente expressa em termos do reticulado $\mathcal{O}X$. Será então natural introduzir a seguinte definição:

Um reticulado local L diz-se *regular* caso todo o elemento $a \in L$ coincida com $\bigvee\{b \in L \mid b \lhd a\}$, onde $b \lhd a$ se e só se $b^* \vee a = 1$ (ou, equivalentemente, $b \wedge c = 0$ e $c \vee a = 1$ para algum $c \in L$).

Portanto um espaço topológico X é regular se e só se $\mathcal{O}X$ é um reticulado local regular.

Observação. A relação $\lhd$ em L é muito importante no estudo dos reticulados locais, permitindo caracterizar muitos factos (só para dar um exemplo, caracteriza os elementos complementados: c é complementado se e só se $c \lhd c$). Verifica as seguintes propriedades (entre muitas outras):

- $a \lhd b \Rightarrow a \leq b$;
- $a \leq b \lhd c \leq d \Rightarrow a \lhd d$;
- $a_i \lhd b_i \ (i = 1, 2) \ \Rightarrow a_1 \vee a_2 \lhd b_1 \vee b_2, a_1 \wedge a_2 \lhd b_1 \wedge b_2$.

Proposição. *Seja L um reticulado local regular. Então ΣL é um espaço regular.*

Demonstração. Observemos primeiro que qualquer homomorfismo h em Frm preserva a relação $\lhd$: se $a \lhd b$, isto é, $a^* \vee b = 1$, então $h(a^* \vee b) = 1$. Equivalentemente, $h(a^*) \vee h(b) = 1$. Mas $h(a^*) \leq h(a)^*$ logo $h(a)^* \vee h(b) = 1$, ou seja, $h(a) \lhd h(b)$.

(Se tivessemos utilizado a caracterização

$$a \lhd b \Leftrightarrow \exists c : a \wedge c = 0, c \vee b = 1,$$

a demonstração era trivial!)

Agora qualquer aberto $\varepsilon_L(a)$ de ΣL coincide com $\varepsilon_L(\bigvee_{b \lhd a} b)$; mas

$$\varepsilon_L(\bigvee_{b \lhd a} b) = \bigcup_{b \lhd a} \varepsilon_L(b) \leq \bigcup_{\varepsilon_L(b) \lhd \varepsilon_L(a)} \varepsilon_L(b) \leq \varepsilon_L(a).$$

Então $\varepsilon_L(a) = \bigcup_{\varepsilon_L(b) \lhd \varepsilon_L(a)} \varepsilon_L(b)$. ∎

A teoria das categorias diz-nos imediatamente que:

Corolário. *A dualidade entre as categorias* Sob *e* SpFrm *restringe-se nos espaços regulares sóbrios a uma dualidade entre as respectivas subcategorias* RegSob *(dos espaços sóbrios regulares) e* $\mathsf{RegSpFrm}$ *(dos reticulados locais espaciais regulares).* ∎

Desenvolvendo a teoria dos reticulados locais regulares encontram-se muitas generalizações de resultados clássicos; por exemplo, imagens homomorfas de reticulados locais regulares são regulares, a subcategoria plena de Frm dos reticulados locais regulares é co-reflectiva (a co-reflexão de L é dada pelo maior sub-reticulado local regular de L). Não seguimos esse caminho por manifesta falta de tempo.

A adjunção dada pelo functor aberto $\mathcal{O}$ e pelo functor espectral Σ servirá sempre como aferidor da boa escolha do conceito “livre de pontos”. Neste caso temos, em resumo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[rr, shift left, "\mathcal{O}"] & & \mathsf{Frm} \arrow[ll, shift left, "\Sigma", "\text{(adjunção dual)}"'] \\
\mathsf{Reg} \arrow[u, hook, "\text{(reflectiva)}"] \arrow[drr, "\mathcal{O}" near start] & & \mathsf{RegFrm} \arrow[u, hook, "\text{(co-reflectiva)}"'] \arrow[dll, "\Sigma"' near start] \\
\mathsf{RegSob} \arrow[u, hook, "\text{(reflectiva)}"] \arrow[rr, shift left, "\mathcal{O}"] & & \mathsf{RegSpFrm} \arrow[u, hook, "\text{(co-reflectiva)}"'] \arrow[ll, shift left, "\Sigma", "\text{(dualidade)}"']
\end{tikzcd}
$$

5.2. Compacidade. Recorde que um espaço topológico X é *compacto* se toda a sua cobertura finita possui uma subcobertura finita.

Naturalmente, esta definição pode ser imediatamente generalizada a qualquer reticulado local L:

(1) Um subconjunto A de L diz-se uma *cobertura* de L caso $\bigvee A = 1$.

(2) L é *compacto* se toda a sua cobertura possui uma subcobertura finita.

É óbvio que um espaço topológico X é compacto se e só se o respectivo reticulado local $\mathcal{O}X$ é compacto.

Fazendo um estudo análogo ao referido no final de 5.1 podemos concluir o seguinte:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}"] & \mathsf{Frm} \arrow[l, shift left, "\Sigma", "\text{(adjunção dual)}"'] \\
\mathsf{Comp} \arrow[u, hook, "\text{(reflectiva)}"] \arrow[dr, "\mathcal{O}"] & \mathsf{CompFrm} \arrow[u, hook', "\text{(co-reflectiva)}"'] \\
\mathsf{CompSob} \arrow[u, hook, "\text{(reflectiva)}"] \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}"] & \mathsf{CompSpFrm} \arrow[u, hook', "\text{(co-reflectiva)}"'] \arrow[l, shift left, "\Sigma", "\text{(dualidade)}"']
\end{tikzcd}
$$

Neste caso o espectro de um reticulado local compacto não é necessariamente compacto (veja um exemplo em [7]).

5.3. Regularidade completa. A noção de regularidade completa é um pouco mais forte que a de regularidade (e muito importante também, uma vez que caracteriza os espaços uniformizáveis):

Um espaço X diz-se *completamente regular* se, para qualquer fechado F e qualquer $x \in X \setminus F$, existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ que separa F e x, isto é, $f(F) = \{1\}$ e $f(x) = 0$.

Chamando *sequência interpoladora* num espaço X a uma sequência de abertos

$$(W_{n,k})_{n=0,1,\ldots;k=0,1,\ldots,2^n}$$

tal que $W_{n,k} = W_{n+1,2k}$ e $W_{n,k} \lhd W_{n,k+1}$, introduzamos a seguinte ordem parcial em $\mathcal{O}X$:

$U \lhd\!\lhd V \equiv$ Existe uma sequência interpoladora $(W_{n,k})$ tal que $W_{0,0} = U$ e $W_{0,1} = V$.

Do seguinte lema, que pode ser provado usando as técnicas de demonstração do Lema de Urysohn, decorre imediatamente que X é completamente regular se e só se, para cada $U \in \mathcal{O}X$, $U = \bigcup\{V \in \mathcal{O}X \mid V \lhd\!\lhd U\}$.

Lema. *Sejam $U, V \in \mathcal{O}X$. Então $U \lhd\!\lhd V$ se e só se existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(U) = \{0\}$ e $f(X \setminus V) = \{1\}$.*

A relação $\lhd\!\lhd$ foi introduzida em 1953 por B. Banaschewski para caracterizar os espaços de Tychonoff em termos dos seus abertos.

Tudo isto se traduz imediatamente para reticulados locais:

(1) Uma *sequência interpoladora* num reticulado local L é uma sequência de elementos
$$(c_{n,k})_{n=0,1,\ldots;k=0,1,\ldots,2^n}$$
tal que $c_{n,k} = c_{n+1,2k}$ e $c_{n,k} \lhd c_{n,k+1}$.

(2) Dados $a, b \in L$, dizemos que $a \lhd\!\lhd b$ se existe uma sequência interpoladora $(c_{n,k})$ *entre* a *e* b, ou seja, tal que $c_{0,0} = a$ e $c_{0,1} = b$.

(3) L diz-se *completamente regular* se $a = \bigvee\{b \in L \mid b \lhd\!\lhd a\}$ para todo o elemento a de L.

Neste caso temos:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Top} \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}"] & \mathsf{Frm} \arrow[l, shift left, "\Sigma", "\text{(adjunção dual)}"'] \\
\mathsf{CReg} \arrow[u, hook, "\text{(reflectiva)}"] \arrow[dr, "\mathcal{O}" near start] & \mathsf{CRegFrm} \arrow[u, hook', "\text{(co-reflectiva)}"'] \arrow[dl, "\Sigma"' near start] \\
\mathsf{CRegSob} \arrow[u, hook, "\text{(reflectiva)}"] \arrow[r, shift left, "\mathcal{O}"] & \mathsf{CRegSpFrm} \arrow[l, shift left, "\Sigma", "\text{(dualidade)}"'] \arrow[u, hook', "\text{(co-reflectiva)}"']
\end{tikzcd}$$

Tal como $\lhd$, a relação $\lhd\!\lhd$ é muito importante na topologia sem pontos. Da definição de $\lhd\!\lhd$ decorre imediatamente que
$$a \lhd\!\lhd b \Rightarrow a \lhd b$$
para quaisquer $a, b \in L$. A relação $\lhd\!\lhd$ satisfaz então todas as propriedades já enunciadas para $\lhd$. Satisfaz ainda a seguinte propriedade, chamada *propriedade interpoladora*:
$$a \lhd\!\lhd b \Rightarrow \exists c \in L : a \lhd\!\lhd c \lhd\!\lhd b.$$

(Basta observar que, dada uma sequência interpoladora $(c_{n,k})$ entre a e b e tomando $c = c_{1,1}$, se tem $a \lhd\!\lhd c$ e $c \lhd\!\lhd b$ pois $d_{n,k} = c_{n+1,k}$ e $e_{n,k} = c_{n+1,2^n+k}$ definem sequências interpoladoras $(d_{n,k})$ e $(e_{n,k})$ entre a e c e entre c e b, respectivamente.)

A relação $\lhd\!\lhd$ é claramente a maior ordem parcial contida em $\lhd$ que é *interpoladora* em L, pelo que, quando $\lhd$ é interpoladora, $\lhd$ e $\lhd\!\lhd$ coincidem. É o que acontece nos reticulados locais compactos regulares:

Se $a \lhd b$, como $b = \bigvee\{x \mid x \lhd b\}$, temos que $\{a^*\} \cup \{x \mid x \lhd b\}$ é uma cobertura de L; pela compacidade de L, existem $x_1, \ldots, x_n \lhd b$ tais que

$$a^* \vee x_1 \vee \ldots \vee x_n = 1.$$

Fazendo $c = c_1 \vee \ldots \vee c_n$ tem-se $a^* \vee c = 1$, isto é, $a \lhd c$; por outro lado $c \lhd b$ (por uma das propriedades básicas de $\lhd$).

Acabámos de provar a seguinte proposição:

***Proposição.** *Todo o reticulado local compacto regular é completamente regular.* ∎

Quando afirmamos que "$\lhd\!\lhd$ é a maior ordem parcial contida em $\lhd$ que é interpoladora e que, consequentemente, $\lhd$ coincide com $\lhd\!\lhd$ quando é interpoladora", estamos a usar o Axioma da Escolha, mais propriamente o Axioma da Escolha Dependente Numerável. De facto, para chegar à sequência interpoladora $(c_{n,k})_{n=0,1,\ldots;k=0,1,\ldots,2^n}$, com $c_{0,0} = a$ e $c_{0,1} = b$, a partir de $a \lhd b$, teremos que recorrer a essa escolha. Portanto esta proposição não é construtiva. O asterisco na proposição assinala este facto.

5.4. Espaços compactos de Hausdorff. Dediquemos um pouco mais de atenção aos espaços compactos de Hausdorff. Se X é compacto de Hausdorff então $\mathcal{O}X$ é um reticulado local compacto regular. O recíproco é válido se X for T_0. Pode mesmo provar-se, usando uma variante – mais fraca – do Axioma da Escolha, que existe uma dualidade entre a categoria dos espaços compactos de Hausdorff e a dos reticulados locais compactos regulares. Recordemos para isso algumas variantes do Axioma da Escolha:

(BUT) Teorema do Ultrafiltro Booleano. *Toda a álgebra de Boole não trivial contém um ultrafiltro (⇔ tem homomorfismos em* **2** *⇔ contém um ideal primo).*

(PIT) Teorema do Ideal Primo. *Todo o reticulado distributivo não trivial contém um ideal primo.*

(BUT) é equivalente a (PIT) que, por sua vez, equivale a dizer que $\mathcal{I}A$ é espacial para qualquer reticulado distributivo A. Estas condições equivalentes são um pouco mais fracas que o Axioma da Escolha.

Lema. *Seja M um reticulado local compacto regular. Então*

$$\begin{array}{rccc} r: & M & \longrightarrow & \mathcal{I}M \\ & a & \longmapsto & \{x \in M \mid x \lhd a\} \end{array}$$

é um homomorfismo de reticulados locais.

Demonstração. Claramente $r(0) = 0$, $r(1) = M$ e, uma vez que $x \lhd a$ e $x \lhd b$ implicam $x \lhd a \wedge b$, $r(a) \cap r(b) = r(a \wedge b)$.

Quanto aos supremos binários temos:

Se $x \lhd a \vee b$ existe $c \in L$ tal que $x \wedge c = 0$ e $c \vee a \vee b = 1$. Por regularidade, $a = \bigvee_{u \lhd a} u$ e $b = \bigvee_{v \lhd b} v$, logo, por compacidade, existem $u, v \in L$ tais que $u \lhd a$, $v \lhd b$ e $c \vee u \vee v = 1$. Então

$$x = x \wedge 1 = (x \wedge c) \vee (x \wedge u) \vee (x \wedge v) = (x \wedge u) \vee (x \wedge v) \in r(a) \vee r(b).$$

Portanto $r(a \vee b) \subseteq r(a) \vee r(b)$ e imediatamente $r(a \vee b) = r(a) \vee r(b)$.

Faltará só provar que $r(\bigsqcup_{i \in I} a_i) = \bigcup_{i \in I} r(a_i)$. A inclusão $\supseteq$ é trivial; por outro lado, se $x \lhd \bigsqcup_{i \in I} a_i$, a compacidade e o facto de $\{a_i \mid i \in I\}$ ser uma família dirigida garantem-nos que $x \lhd a_i$ para algum $i \in I$. ∎

Proposição. *As seguintes asserções são equivalentes:*

(i) *(BUT).*

(ii) *Todo o reticulado local compacto regular é espacial.*

Demonstração. "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Pelo Lema podemos considerar $r : M \to \mathcal{I}M$. Compondo r à direita com $\bigvee \mathcal{I}M \to M$ obtemos a identidade $\bigvee r(a) = a$. Isto quer dizer que r é injectiva pelo que $M \cong r(M)$ e este, sendo um sub-reticulado local do reticulado local $\mathcal{I}M$ (que é espacial por (BUT)), é espacial.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": Seja B uma álgebra de Boole não trivial. $\mathcal{I}B$ é compacto e regular (para cada $a \in B$, $\downarrow a \lhd \downarrow a$ pois $(\downarrow a)^* \vee \downarrow a = \downarrow(\neg a) \vee \downarrow a = B$). Então é espacial, por hipótese. Como B é não trivial, $\mathcal{I}B$ é não trivial pelo que $\Sigma\mathcal{I}B \neq \emptyset$, isto é, existe um elemento primo em $\mathcal{I}B$. Mas os elementos primos de $\mathcal{I}B$ são os ideais primos (o que, felizmente, abona em favor da terminologia escolhida), logo está provado. ∎

Como todo o espaço de Hausdorff é sóbrio podemos então concluir que a restrição da dualidade

$$\mathsf{Sob} \underset{\Sigma}{\overset{\mathcal{O}}{\leftrightarrows}} \mathsf{SpFrm}$$

aos espaços compactos de Hausdorff nos dá:

Teorema. *Usando (BUT), a categoria dos espaços compactos de Hausdorff é dualmente equivalente (por $\mathcal{O}$ e Σ) à categoria dos reticulados locais compactos regulares.* ∎

Isto ilustra um dos aspectos importantes que a teoria dos reticulados locais nos revela: em muitas situações, só conseguimos ver os pontos de determinados espaços em virtude de algum princípio de escolha (não construtivo, pois), enquanto que os seus reticulados de abertos já têm existência prévia, antes de tais assunções. De certo modo, podemos sempre ver os abertos enquanto que ver os seus pontos requere um dispositivo adicional, na forma de alguma variante do Axioma da Escolha. Isto é significativo, pois em muitas situações conhecer o reticulado local dos abertos de um espaço é praticamente tão bom quanto conhecer o próprio espaço. Indicia ainda que na topologia sem pontos talvez nos consigamos libertar das dependências que a topologia tem de princípios não construtivistas, pois parece que estes só servem para garantir a existência de pontos suficientes e não têm nada a ver com as propriedades topológicas em si.

Poderíamos continuar este caminho, introduzindo, de forma análoga, as noções de paracompacidade, compacidade local, normalidade, zero-dimensionalidade, conexidade, conexidade local, desconexidade extremal, etc., pois as respectivas noções clássicas admitem caracterizações totalmente em termos dos abertos do espaço.

Com todos estes exemplos tentámos ilustrar a ideia de como podemos fazer topologia dentro de Frm; trata-se de um ambiente perfeitamente plausível e natural para fazer topologia. No entanto, até agora, aparenta que se limita a incentivar a descoberta de novas caracterizações (em termos puramente dos abertos) para os diversos conceitos e resultados da topologia clássica.

Haverá algum aspecto realmente inovador nesta abordagem?

Sim: a inovação decorre da alteração de muitas das propriedades categoriais na passagem de Top para Frm. Para observar isso, vamos em seguida analisar algumas construções em Frm.

6. Propriedades de Frm

Neste capítulo vamos estudar as propriedades essenciais da categoria Frm que nos permitem construir novos reticulados locais a partir de alguns reticulados locais dados.

6.1. Quocientes. Já sabemos (Proposição 3.5) que, como Frm é uma categoria algébrica, todo o homomorfismo de reticulados locais $h : L \to M$ pode ser factorizado na forma $L \xrightarrow{q} N \xrightarrow{m} M$ onde q é sobrejectiva (epimorfismo regular) e m é injectiva (monomorfismo).

Já vimos no Capítulo 3 como se constrói o *reticulado local livre* gerado por um conjunto X. Observámos na altura que temos à disposição congruências para descrever os quocientes (sobrejecções), exactamente como acontece em qualquer categoria de álgebras. Aqui, num reticulado local L, uma *congruência* é uma relação de equivalência Θ que é um sub-reticulado local de $L \times L$ ($L \times L$ é um reticulado local para a ordem usual $(a, b) \leq (c, d) \equiv a \leq c$ e $b \leq d$). O correspondente *reticulado local quociente* L/Θ é então definido como os quocientes são sempre definidos para sistemas algébricos, tornando a aplicação $L \to L/\Theta$, que aplica cada $a \in L$ no seu Θ-bloco $[a]_\Theta$, um homomorfismo de reticulados locais.

Isto tudo resulta da natureza algébrica dos reticulados locais; no entanto existe, neste caso, um modo consideravelmente mais conveniente para representar os quocientes, como veremos em seguida.

Seja L um reticulado local. Uma aplicação $j : L \to L$ diz-se um *núcleo* se for um operador de fecho que preserve ínfimos binários, ou seja, j satisfaz

(1) $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$

(2) $a \leq j(a)$

(3) $j(j(a)) = j(a)$

(4) $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

para quaisquer $a, b \in L$.

Claro que (1) é, na presença de (4), redundante.

Denotemos por $N(L)$ o conjunto dos núcleos de L, parcialmente ordenado por

$$j \leq k \equiv j(a) \leq k(a) \ \ \forall a \in L.$$

A prova da seguinte proposição é um exercício muito simples.

Proposição.

(a) *Dada uma congruência Θ em L, a aplicação $j_\Theta : L \to L$ definida por $j_\Theta(a) = \bigvee\{b \in L \mid (b, a) \in \Theta\}$ é um núcleo.*

(b) *Para qualquer* $j \in N(L)$, $ker(j) := \{(a,b) \in L \times L \mid j(a) = j(b)\}$ *é uma congruência em* L.

(c) *As correspondências definidas em (a) e (b) são inversas uma da outra e definem um isomorfismo entre os conjuntos parcialmente ordenados* $N(L)$ *e* $C(L)$ *(onde* $C(L)$ *designa o conjunto de todas as congruências em* L*, parcialmente ordenado por inclusão).* ∎

Sendo j um núcleo em L, definamos $Fix(j) = \{a \in L \mid j(a) = a\}$. Pela idempotência de j, $Fix(j) = j(L)$. Evidentemente, para $j = j_\Theta$, $Fix(j)$ representa o conjunto subjacente a L/Θ pois $j_\Theta(a)$ é o máximo elemento de $[a]_\Theta$. Este conjunto $Fix(j)$ é um reticulado local para a ordem induzida por L, ou seja, para as operações

$$a \sqcap b = a \wedge b$$

e

$$\bigsqcup_{i \in I} a_i = j(\bigvee_{i \in I} a_i),$$

e torna $j : L \to Fix(j)$ um homomorfismo de reticulados locais sobrejectivo. Como $[a]_\Theta = [b]_\Theta$ se e só se $j_\Theta(a) = j_\Theta(b)$ então os reticulados locais L/Θ e $Fix(j_\Theta)$ são isomorfos e os quocientes $L \to L/\Theta$ podem então ser representados por núcleos, do modo acima descrito.

Observação. Como os núcleos descrevem os quocientes em Frm, ou seja, os subobjectos em Loc, os subconjuntos de L do tipo $Fix(j)$ ou, o que é o mesmo, os $j : L \to Fix(j)$ descrevem os subobjectos do locale L (chamados *sublocales*). Esta é a noção *locálica* correspondente à noção clássica de subespaço.

6.2. Reticulados locais definidos por geradores e relações. O facto de Frm ser algébrica também implica a existência de um processo de definição de reticulados locais especificando geradores e relações. Como habitualmente, dado um conjunto X de geradores e uma família de relações $u = v$ (claro que as relações também podem ser dadas na forma $u \leq v$), basta considerar o reticulado local $F(X)/\Theta$, sendo $F(X)$ o reticulado local livre gerado por X e Θ a congruência gerada pelos pares (u, v).

Vejamos então como determinar a congruência gerada por $R \subseteq L \times L$ e o respectivo quociente. Seja R uma relação binária num reticulado local L. Dizemos que $s \in L$ é *saturado* (mais exactamente, R-saturado) se

$$\forall a, b, c \in L \ \Big((a, b) \in R \Rightarrow (a \wedge c \leq s \text{ se e só se } b \wedge c \leq s)\Big).$$

Claramente, qualquer ínfimo de elementos saturados é saturado e 1 é saturado, isto é, o conjunto dos elementos R-saturados de L é um sistema de fecho. Consideremos o respectivo operador de fecho

$$\begin{array}{rcl} j_R : L & \longrightarrow & L \\ a & \longmapsto & \bigwedge\{b \in L \mid b \text{ é saturado e } a \leq b\}. \end{array}$$

Neste caso este operador de fecho é mesmo um núcleo. Para verificar isso necessitamos do seguinte lema:

Lema. *Se s é saturado então $x \to s$, para qualquer $x \in L$, é também saturado.*

Demonstração. Se $(a, b) \in R$ temos:

$$\begin{aligned} a \wedge c \leq x \to s \quad &\Leftrightarrow \quad a \wedge c \wedge x \leq s \\ &\Leftrightarrow \quad b \wedge c \wedge x \leq s \\ &\Leftrightarrow \quad b \wedge c \leq x \to s. \end{aligned}$$

■

Provemos então que $j_R(a) \wedge j_R(b) \leq j_R(a \wedge b)$:

Como $a \wedge b \leq j_R(a \wedge b)$ então $a \leq b \to j_S(a \wedge b)$. Consequentemente $j_R(a) \leq j_R(b \to j_R(a \wedge b))$ que, pelo Lema, é equivalente a $j_R(a) \leq b \to j_R(a \wedge b)$, ou seja, $j_R(a) \wedge b \leq j_R(a \wedge b)$. Portanto $j_R(a) \wedge b \leq j_R(a \wedge b)$ para quaisquer $a, b \in L$. A idempotência de j_R garante o resto:

$$j_R(a) \wedge j_R(b) \leq j_R(a \wedge j_R(b)) \leq j_R(j_R(a \wedge b)) = j_R(a \wedge b).$$

Do que vimos na secção anterior, $Fix(j_R)$ é um reticulado local e $j : L \to Fix(j_R)$ é um homomorfismo de reticulados locais sobrejectivo. Denotemos $Fix(j_R)$ por L/R. Se $(a, b) \in R$ então $j_R(a) = j_R(b)$; com efeito, $a \leq j_R(a) \Rightarrow b \leq j_R(a)$ porque $j_R(a)$ é saturado. Então $j_R(b) \leq j_R(a)$.

Teorema. (Lema da Factorização) *Se $h : L \to M$ é um homomorfismo de reticulados locais tal que $(a, b) \in R \Rightarrow h(a) = h(b)$, então existe exactamente um homomorfismo $\overline{h} : L/R \to M$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j_R"] \arrow[dr, "h"'] & L/R \arrow[d, dashed, "\overline{h}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

comuta. E mais: $\overline{h}(a) = h(a)$ para qualquer $a \in L/R$.

Demonstração. Unicidade: Para cada $a \in L/R$ necessariamente $\overline{h}(a) = \overline{h}(j_R(a)) = h(a)$. Portanto $\overline{h}$ se existir terá que ser definido por $\overline{h}(a) = h(a)$ para cada $a \in L/R$.

Existência: Além de ser necessário provar que $\overline{h}(a) = h(a)$ define um homomorfismo de reticulados locais (exercício simples que deixamos a cargo do leitor) é preciso provar, para garantir efectivamente a comutatividade do diagrama, que $h(x) = h(y)$ sempre que $j_R(x) = j_R(y)$. Bastará para isso provar que $h(x) = h(j_R(x))$ para qualquer $x \in L$.

Seja então $x \in L$. Consideremos $\sigma(x) := \bigvee\{y \in L \mid h(y) \leq h(x)\}$. Claramente $h(\sigma(x)) = h(x)$. Além disso, $\sigma(x)$ é saturado: se $(a,b) \in R$ e $a \wedge c \leq \sigma(x)$ então $h(a) \wedge h(c) \leq h(x)$. Logo $h(b \wedge c) = h(b) \wedge h(c) = h(a) \wedge h(c) \leq h(x)$, pelo que $b \wedge c \leq \sigma(x)$.

Obviamente $x \leq \sigma(x)$, logo $j_R(x) \leq j_R(\sigma(x)) = \sigma(x)$. Então $h(x) \leq h(j_R(x)) \leq h(\sigma(x)) = h(x)$, pelo que $h(j_R(x)) = h(x)$. ■

Este teorema diz-nos que a congruência $ker(j_R)$ associada ao núcleo j_R é a congruência gerada por R. De facto:

- Como vimos, $(a,b) \in R \Rightarrow j_R(a) = j_R(b) \Leftrightarrow (a,b) \in ker(j_R)$;
- Se Θ é uma congruência que contém R então $j_\Theta : L \to L$ está nas condições do Teorema pelo que existe $\phi : L/R \to L$ tal que $\phi \cdot j_R = j_\Theta$. Consequentemente
$$(a,b) \in ker(j_R) \Leftrightarrow j_R(a) = j_R(b) \Rightarrow j_\Theta(a) = j_\Theta(b) \Leftrightarrow (a,b) \in \Theta.$$

Portanto o reticulado local quociente $L/ker(j_R)$ pode ser representado por
$$L/R = \{a \in L \mid j_R(a) = a\} = \{a \in L \mid a \text{ é } R\text{-saturado}\}.$$

Observação. A definição de elemento saturado pode ser formulada de modo mais elegante: s é saturado se e só se
$$(a,b) \in R \Rightarrow a \to s = b \to s.$$

6.3. Produtos, igualizadores e co-igualizadores. Os produtos em Frm são obtidos de modo óbvio como produtos cartesianos, com a estrutura definida coordenada a coordenada[1].

Se $f, g : L \to M$ são homomorfismos, a imersão $\{a \in L \mid f(a) = g(a)\} \hookrightarrow L$ é evidentemente o igualizador de f e g.

Se definirmos uma relação binária R em M por
$$(a,b) \in R \equiv \exists c \in L : f(c) = a,\ g(c) = b$$
o núcleo $M \to M/R$ é o co-igualizador de f e g.

6.4. Coprodutos (caso binário). A única coisa que falta verificar para que Frm seja completa e cocompleta é a questão dos coprodutos[2]. Antes de observarmos como se pode construir o coproduto de uma família arbitrária de reticulados locais, analisemos o caso binário, muito simples de motivar e que nos pode dar a ideia para construir o caso geral, mais complicado.

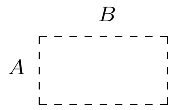
Dados dois reticulados locais L e M como havemos de construir o seu coproduto $L \oplus M$?

O caso espacial é muito motivador; recordando que

[1] Consequência da Proposição 3.5.

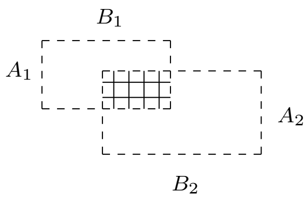
[2] Claro que do facto de ser algébrica já sabemos que Frm é completa e cocompleta; mas uma coisa é saber que existem os produtos, igualizadores, coprodutos e co-igualizadores e outra coisa bem mais importante é saber construir-los!

- a topologia produto de dois espaços topológicos X e Y tem por base os rectângulos



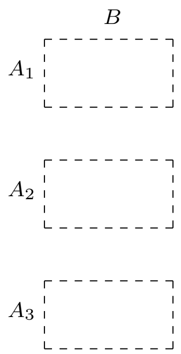
$$A \times B \in \mathcal{O}X \times \mathcal{O}Y,$$

- a intersecção de dois rectângulos é ainda um rectângulo:



$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

- em geral, a união de rectângulos não é um rectângulo a não ser que os rectângulos sejam do tipo



$$(A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) \cup (A_3 \times B) = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \times B,$$

não será surpresa para ninguém se elegermos como candidato para $L \oplus M$ o reticulado local gerado por $L \times M$, sujeito às relações

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) &= (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) && (1) \\ \bigvee_{i \in I} (a_i, b) &= \Big(\bigvee_{i \in I} a_i, b\Big) && (2) \\ \bigvee_{i \in I} (a, b_i) &= \Big(a, \bigvee_{i \in I} b_i\Big) && (3) \end{aligned}$$

Construamos este reticulado local, ou seja, o quociente do reticulado local livre gerado por $L \times M$ pela congruência gerada por estas relações. Felizmente esta construção pode ser simplificada devido ao seguinte facto evidente:

> *O $\wedge$-semi-reticulado gerado por $L \times M$ sujeito à relação (1) é isomorfo ao $\wedge$-semi-reticulado* $(L \times M, \wedge, (1, 1))$.

Então o reticulado local que queremos construir é o reticulado local livre sobre o $\wedge$-semi-reticulado $L \times M$, isto é, $\mathcal{D}(L \times M)$, sujeito às seguintes relações[3]:

$$\bigcup_{i \in I} \downarrow (a_i, b) = \downarrow (\bigvee_{i \in I} a_i, b)$$

$$\bigcup_{i \in I} \downarrow (a, b_i) = \downarrow (a, \bigvee_{i \in I} b_i)$$

Estamos pois a conjecturar que $L \oplus M = \mathcal{D}(L \times M)/R$, ou seja,

$$L \oplus M = \{U \in \mathcal{D}(L \times M) \mid U \text{ é } R\text{-saturado}\},$$

onde R consiste nos pares

$$\Big(\bigcup_{i \in I} \downarrow (a_i, b), \downarrow (\bigvee_{i \in I} a_i, b)\Big)$$

e

$$\Big(\bigcup_{i \in I} \downarrow (a, b_i), \downarrow (a, \bigvee_{i \in I} b_i)\Big).$$

---

[3]São a tradução das relações (2) e (3) pela imersão

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \overset{\lambda}{\hookrightarrow} & \mathcal{D}(L \times M) \\ (a, b) & \mapsto & \downarrow (a, b). \end{array}$$

Comecemos por caracterizar os elementos de $\mathcal{D}(L \times M)$ que são R-saturados:

Proposição. *$U \in \mathcal{D}(L \times M)$ é R-saturado se e só se*

$$\{(a_i, b) \mid i \in I\} \subseteq U \Rightarrow \Big(\bigvee_{i\in I} a_i, b\Big) \in U \tag{4}$$

$$\{(a, b_i) \mid i \in I\} \subseteq U \Rightarrow \Big(a, \bigvee_{i\in I} b_i\Big) \in U. \tag{5}$$

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{D}(L \times M)$ um elemento R-saturado. Então, por definição,

$$\bigcup_{i\in I} \downarrow(a_i, b) \subseteq U \Leftrightarrow \downarrow(\bigvee_{i\in I} a_i, b) \subseteq U.$$

Logo, se $\{a_i, b) \mid i \in I\} \subseteq U$ então $(\bigvee_{i\in I} a_i, b) \subseteq U$. A outra condição prova-se de modo análogo.

Reciprocamente seja U um elemento de $\mathcal{D}(L \times M)$ que satisfaz (4) e (5). Para qualquer $V \in \mathcal{D}(L \times M)$ temos

$$\Big(\bigcup_{i\in I} \downarrow(a_i, b)\Big) \cap V = \bigcup_{i\in I} \downarrow(a_i, b) \cap \bigcup_{(x,y)\in V} \downarrow(x, y) = \bigcup_{(x,y)\in V} \bigcup_{i\in I} \downarrow(a_i \wedge x, b \wedge y).$$

Por outro lado,

$$\downarrow\Big(\bigvee_{i\in I}(a_i, b)\Big) \cap V = \bigcup_{(x,y)\in V} \downarrow\Big(\bigvee_{i\in I}(a_i \wedge x), b \wedge y\Big).$$

Portanto, pela condição (4),

$$\Big(\bigcup_{i\in I} \downarrow(a_i, b)\Big) \cap V \subseteq U \Leftrightarrow \downarrow\Big(\bigvee_{i\in I}(a_i, b)\Big) \cap V \subseteq U.$$

O resto prova-se analogamente. ∎

Temos assim uma descrição explícita de $\mathcal{D}(L \times M)/R$ como o *sistema dos subconjuntos decrescentes de $L \times M$ satisfazendo (4) e (5)*. É habitual chamar a estes subconjuntos de $L \times M$, *C-ideais*.

O caso particular $I = \emptyset$ diz-nos que $\mathcal{Z} := \{(a, 0), (0, b) \mid a \in L, b \in M\}$ está sempre contido em qualquer C-ideal U.

Denotemos o C-ideal $j_R(\downarrow(a, b)) = \downarrow(a, b) \cup \mathcal{Z}$ por $a \oplus b$. Definindo

$$\begin{array}{rccc} u_1 : & L & \rightarrow & \mathcal{D}(L \times M)/R \\ & a & \mapsto & a \oplus 1 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} u_2 : & M & \to & \mathcal{D}(L \times M)/R \\ & b & \mapsto & 1 \oplus b \end{array}$$

temos a confirmação da nossa conjectura:

Teorema. *$(\mathcal{D}(L \times M)/R, u_1, u_2)$ é o coproduto de L e M em* Frm.

Demonstração. Sejam $\varphi_1 : L \to N$ e $\varphi_2 : M \to N$ homomorfismos de reticulados locais e consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & L \times M \arrow[d, "\eta_{L\times M}"] \arrow[ddd, bend right=90, "\varphi"'] & \\
 & \mathcal{D}(L \times M) \arrow[d, "j_R"] & \\
L \arrow[uur, "\overline{u}_1"] \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \mathcal{D}(L \times M)/R & M \arrow[uul, "\overline{u}_2"'] \arrow[l, "u_2"'] \arrow[dl, "\varphi_2"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

onde $\varphi(a, b) = \varphi_1(a) \wedge \varphi_2(b)$, $\eta_{L\times M}$ é a "inserção de geradores" de $L \times M$ no $\wedge$-semi-reticulado livre $\mathcal{D}(L \times M)$, j_R é o núcleo $\mathcal{D}(L \times M) \to \mathcal{D}(L \times M)/R$ e $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$ são definidos por, respectivamente, $\overline{u}_1(a) = (a, 1)$ e $\overline{u}_2(b) = (1, b)$. É óbvio que $j_R \cdot \eta_{L\times M} \cdot \overline{u}_i = u_i$ para $i = 1, 2$.

Como $\varphi \in \mathsf{SLat}$, existe um único morfismo $\varphi' : \mathcal{D}(L \times M) \to N$ em Frm tal que $\varphi' \cdot \eta_{L\times M} = \varphi$. Consideremos

$$\Big(\bigcup_{j\in J} \downarrow(a_j, b), \downarrow(\bigvee_{j\in J} a_j, b)\Big) \in R.$$

Então

$$\varphi'\Big(\bigcup_{j\in J} \downarrow(a_j, b)\Big) \quad = \quad \bigvee_{j\in J} \varphi'(\downarrow(a_j, b))$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{j\in J} \varphi'(\eta_{L\times M}(a_j,b))\\
&= \bigvee_{j\in J} \varphi(a_j,b)\\
&= \bigvee_{j\in J} (\varphi_1(a_j)\wedge\varphi_2(b))\\
&= \Big(\bigvee_{j\in J} \varphi_1(a_j)\Big)\wedge\varphi_2(b)\\
&= \Big(\varphi_1(\bigvee_{j\in J} a_j)\Big)\wedge\varphi_2(b)\\
&= \varphi(\bigvee_{j\in J} a_j, b)\\
&= \varphi'\Big(\downarrow(\bigvee_{j\in J} a_j, b)\Big).
\end{aligned}
$$

O mesmo se pode provar para o outro tipo de pares em R. Então pelo Lema da Factorização (Teorema 6.2) existe um e um só homomorfismo de reticulados locais, $\varphi'' : L\oplus M \to N$, tal que $\varphi''\cdot j_R = \varphi'$. Consequentemente,

$$\varphi''\cdot u_i = \varphi''\cdot j_R\cdot\eta_{L\times M}\cdot\overline{u}_i = \varphi'\cdot\eta_{L\times M}\cdot\overline{u}_i = \varphi\cdot\overline{u}_i = \varphi_i \ (i=1,2).$$

Obtivemos assim um morfismo $\varphi'' : L\oplus M\to N$ tal que $\varphi''\cdot u_i = \varphi_i$ $(i=1,2)$. A unicidade de φ'' é óbvia: se $\overline{\varphi} : L\oplus M\to N$ satisfaz $\overline{\varphi}\cdot u_i = \varphi_i$ $(i=1,2)$, então $\overline{\varphi}\cdot j_R\cdot\eta_{L\times M}\overline{u}_i = \varphi_i = \varphi\cdot\overline{u}_i$. Isto implica $\overline{\varphi}\cdot j_R\cdot\eta_{L\times M} = \varphi$ e, pela unicidade de φ', $\overline{\varphi}\cdot j_R = \varphi'$. Agora pela unicidade de φ'' no Lema da Factorização, $\overline{\varphi} = \varphi''$. ■

A unicidade de φ'' também decorre imediatamente do seguinte facto importante:

> *Os elementos $a\oplus 1$ e $1\oplus b$ ($a\in L$, $b\in M$) geram $L\oplus M$ por ínfimos finitos e supremos arbitrários, isto é, todo o elemento de $L\oplus M$ é da forma $\bigvee_{i\in I}(a_i\oplus b_i)$.*

Em resumo, $L\oplus M$ tem a seguinte apresentação por geradores e relações:

- Geradores:

$$a\oplus b \ \ (a\in L,\ b\in M).$$

- Relações:

$$
\begin{aligned}
\bigwedge_{i\in I}(a_i\oplus b_i) &= \bigwedge_{i\in I} a_i \oplus \bigwedge_{i\in I} b_i\\
\bigvee_{i\in I}(a_i\oplus b) &= \Big(\bigvee_{i\in I} a_i\Big)\oplus b
\end{aligned}
$$

$$\bigvee_{i \in I} (a \oplus b_i) \quad = \quad a \oplus \big(\bigvee_{i \in I} b_i \big).$$

Observação. O conhecimento do coproduto binário $L \oplus L$ em pormenor permite-nos estender, sem grande dificuldade, a noção de espaço uniforme (introduzida por A. Weil em termos da noção básica de vizinhança da diagonal), aos reticulados locais[4]. Uma *vizinhança da diagonal* de um conjunto X é um subconjunto E de $X \times X$ através do qual a diagonal $\Delta_X : X \to X \times X$ se factoriza:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\exists f"'] \arrow[d, "\Delta_X"] \\
E \arrow[r, hook] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Uma *uniformidade* em X é um filtro $\mathcal{E}$ de vizinhanças da diagonal de X satisfazendo as seguintes condições:

- Para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que a vizinhança da diagonal

  $$F \circ F := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X : (x, z), (z, y) \in F\}$$

  está contida em E;
- Para cada $E \in \mathcal{E}$, a vizinhança da diagonal $E^{-1} := \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in E\}$ ainda pertence a $\mathcal{E}$.

O par $(X, \mathcal{E})$ é então chamado um *espaço uniforme*.

Uma função $f : (X, \mathcal{E}) \longrightarrow (Y, \mathcal{F})$, onde $(X, \mathcal{E})$ e $(Y, \mathcal{F})$ são espaços uniformes, diz-se *uniformemente contínua* se, para qualquer $E \in \mathcal{F}$, $(f \times f)^{-1}(E) \in \mathcal{E}$. Fica assim definida a categoria dos espaços uniformes.

Recordemos ainda que qualquer uniformidade $\mathcal{E}$ em X induz uma topologia $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ em X (chamada *topologia uniforme*), definida do seguinte modo:

$A \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ se, para cada $a \in A$, existe $E \in \mathcal{E}$ tal que

$$E[a] := \{b \in X \mid (a, b) \in E\} \subseteq A.$$

[4] A ideia deve-se a J. Picado em *Vizinhanças da Diagonal no Sentido de Weil em Reticulados Locais*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra 1995. Veja J. Picado, *Structured frames by Weil entourages*, Applied Categorical Structures (a aparecer) para uma perspectiva geral sobre o papel das vizinhanças da diagonal no estudo de diversas estruturas topológicas (uniformidades, quase-uniformidades, adjacências, proximidades, etc.) em reticulados locais.

É bem sabido que esta topologia é completamente regular pois, para qualquer $A \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, tem-se $A = \bigcup\{B \in \mathcal{O}(\mathcal{E}) \mid B \overset{\mathcal{E}}{\lhd} A\}$, onde $B \overset{\mathcal{E}}{\lhd} A$ significa que $E \circ (B \times B) \subseteq A \times A$ para algum $E \in \mathcal{E}$.

Isto motiva o estudo num reticulado local L dos elementos E de $L \oplus L$, a que chamaremos *vizinhanças da diagonal* de L, para os quais a co-diagonal $\nabla_L : L \oplus L \to L$ se factoriza através do sublocale $L \oplus L \to \downarrow\{E\}$ de $L \oplus L$:

$$\begin{tikzcd}
L \oplus L \arrow[r, two heads, "(-) \cap E"] \arrow[d, "\nabla_L"'] & \downarrow\{E\} \arrow[dl, "\exists f"] \\
L &
\end{tikzcd}$$

(aqui, $(-) \cap E(F) = E \cap F$, para qualquer $F \in L \oplus L$ e ∇_L é o único morfismo tal que $\nabla_L \cdot u_1^L = 1_L = \nabla_L \cdot u_2^L$.) É evidente que $E \in L \oplus L$ é uma vizinhança da diagonal se e só se $\nabla_L(E) = 1$. Como ∇_L é definida por

$$E = \bigvee_{(x,y) \in E} (x \oplus y) \longmapsto \bigvee_{(x,y) \in E} (x \wedge y),$$

um elemento E de $L \oplus L$ é uma vizinhança da diagonal se e só se $\bigvee_{(x,x) \in E} x = 1$.

Finalmente, introduzindo a operação

$$A \circ B = \bigvee \{a \oplus b \mid \exists c \in L \setminus \{0\} : (a,c) \in A, (c,b) \in B\}$$

em $L \oplus L$, podemos definir reticulados locais uniformes:

Sendo L um reticulado local, o par $(L, \mathcal{E})$ é um *reticulado local uniforme* se $\mathcal{E}$ for um filtro de vizinhanças da diagonal de L satisfazendo as seguintes condições:

- Para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $F \in \mathcal{E}$ tal que $F \circ F \subseteq E$;
- Para cada $E \in \mathcal{E}$, $E^{-1} := \{(a,b) \in L \times L \mid (b,a) \in E\}$ também pertence a $\mathcal{E}$;
- $a = \bigvee\{b \in L \mid b \overset{\mathcal{E}}{\lhd} a\}$ para qualquer $a \in L$ (onde $b \overset{\mathcal{E}}{\lhd} a$ significa que $E \circ (b \oplus b) \subseteq a \oplus a$ para algum $E \in \mathcal{E}$).

Dados $(L, \mathcal{E})$ e $(M, \mathcal{F})$ reticulados locais uniformes, um *homomorfismo uniforme de Weil* $h : (L, \mathcal{E}) \to (M, \mathcal{F})$ é um homomorfismo de reticulados locais $h : L \to M$ tal que $(h \oplus h)(E) \in \mathcal{F}$ sempre que $E \in \mathcal{E}$ (sendo $h \oplus h$ o único morfismo de $L \oplus L$ em $M \oplus M$ tal que $(h \oplus h) \cdot u_i^L = u_i^M \cdot h$, $i = 1, 2$). Fica assim estabelecida a categoria dos reticulados uniformes (de Weil).

Estendendo os functores $\mathcal{O}$ e Σ de 4.3 a este contexto pode ainda concluir-se que a categoria dos reticulados locais uniformes está para a categoria dos espaços uniformes exactamente como a categoria dos reticulados locais está para a dos espaços topológicos.

6.5. Coprodutos (caso geral). Finalmente vejamos o caso geral em que temos uma família arbitrária de reticulados locais L_i $(i \in I)$. Limitar-nos-emos a apresentar a construção (a demonstração pode ser feita tomando a prova do caso binário como modelo).

Neste caso o $\wedge$-semi-reticulado gerado por $\prod_{i\in I} L_i$, sujeito às relações

$$(a_i)_{i\in I} \wedge (b_i)_{i\in I} = (a_i \wedge b_i)_{i\in I}$$

é o $\wedge$-semi-reticulado

$$\overline{\prod}_{i\in I} L_i = \Big\{(a_i)_{i\in I} \mid a_i = 1 \text{ excepto para um número finito de índices}\Big\}.$$

Temos então que considerar $\mathcal{D}\big(\overline{\prod}_{i\in I} L_i\big)$ e definir $\bigoplus_{i\in I} L_i = \mathcal{D}\big(\overline{\prod}_{i\in I} L_i\big)/R$, onde R consiste nos pares

$$\Big(\bigcup_{j\in J} \downarrow(a_{ij})_{i\in I}, \downarrow(a_i)_{i\in I}\Big)$$

tais que, para algum $k \in I$,

- $i \neq k \Rightarrow a_{ij} = a_i$ para todo o $j \in J$,
- $a_k = \bigvee_{j\in J} a_{kj}$.

Fazemos notar o seguinte:

(1) Para qualquer

$$\Big(\bigcup_{j\in J} \downarrow(a_{ij})_{i\in I}, \downarrow(a_i)_{i\in I}\Big) \in R,$$

tem-se

$$\bigcup_{j\in J} \downarrow(a_{ij})_{i\in I} \subseteq \downarrow(a_i)_{i\in I}.$$

(2) Sendo $\mathcal{Z} := \Big\{(a_i)_{i\in I} \mid \exists k \in I : a_k = 0\Big\}$, se $(a_i)_{i\in I} \in \mathcal{Z}$ então $(\emptyset, \downarrow(a_i)_{i\in I}) \in R$.

Lema. *$U \in \mathcal{D}\big(\overline{\prod}_{i\in I} L_i\big)$ é R-saturado se e só se a seguinte condição se verifica:*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall j \in J\ (a_{ij})_{i\in I} \in U \\ \bullet\ \exists k \in I : \bigvee_{j\in J} a_{kj} = a_k \ \text{ e } \forall i \in I \setminus \{k\}\ a_{ij} = a_i \end{array}\right\} \Rightarrow (a_i)_{i\in I} \in U. \qquad (6)$$

(Note que, em particular, $\mathcal{Z} \subseteq U$ para qualquer U saturado.)

Portanto $\bigoplus_{i\in I} L_i$ é o conjunto dos subconjuntos descendentes de $\overline{\prod}_{i\in I} L_i$ que satisfazem (6).

Denotando os elementos $j_R\big(\downarrow(a_i)_{i\in I}\big) = \downarrow(a_i)_{i\in I} \cup \mathcal{Z}$ por $\oplus_{i\in I} a_i$ e definindo

$$\begin{array}{rccc} u_j: & L_j & \to & \bigoplus_{i\in I} L_i \\ & a & \mapsto & \oplus_{i\in I} a_i, \end{array}$$

onde $a_j = a$ e $a_i = 1$ para $i \neq j$, pode provar-se que:

Teorema. $\big(\bigoplus_{i\in I} L_i, u_i\ (i\in I)\big)$ *é o coproduto dos reticulados locais* L_i $(i \in I)$ *em* Frm*.*

Observações. (1) É notória a analogia desta construção com a construção do produto tensorial de grupos abelianos (começa-se por considerar o produto cartesiano, forma-se o grupo livre sobre ele e factoriza-se para ficar conforme com a estrutura aditiva em cada uma das suas coordenadas). Recordando que os coprodutos de anéis são calculados como produtos tensoriais das partes aditivas torna a analogia completa. De facto, ambos são casos especiais de uma construção categorial geral.

(2) Por dualidade, os coprodutos em Frm são os produtos em Loc. Confrontemos, no caso espacial, $\mathcal{O}\big(\prod_{i\in I} X_i\big)$ com $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}(X_i)$. O homomorfismo de reticulados locais

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}(X_i) & \longrightarrow & \mathcal{O}\big(\prod_{i\in I} X_i\big) \\ \oplus_{i\in I} U_i & \longmapsto & \prod_{i\in I} U_i \end{array}$$

é sobrejectivo (pois os abertos $\prod_{i\in I} U_i$ constituem uma base para a topologia produto) mas, como Isbell mostrou em [5], nem sempre é injectivo (por exemplo, $\mathcal{O}(\mathbb{Q}) \oplus \mathcal{O}(\mathbb{Q})$ não é isomorfo a $\mathcal{O}(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$, sendo $\mathbb{Q}$ os racionais com a topologia de subespaço induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$).

Portanto $\mathcal{O}$: Top $\to$ Loc não preserva, em geral, produtos, o que não é de estranhar pois, apesar de tudo, é um adjunto à esquerda e não um adjunto à direita. Pelo contrário, é uma agradável surpresa que tal aconteça em alguns casos de espaços importantes: se X é localmente compacto e Y é arbitrário então

$$\mathcal{O}(X) \oplus \mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(X \times Y).$$

Isto não deve ser entendido como um defeito da categoria Loc, mas sim como um defeito de Top! Com efeito, é bem agradável que não aconteça tal isomorfismo: construímos um ambiente – a categoria Loc – onde podemos fazer topologia de modo natural e intuitivo, que possui melhores propriedades categoriais que o ambiente clássico. De facto, os produtos em Loc comportam-se melhor: o produto de qualquer família de locales paracompactos é paracompacto; o produto de qualquer família de locales de Lindelöf regulares é ainda Lindelöf; o produto de qualquer família de locales plenamente normais (isto é, paracompactos e normais) é plenamente normal. No entanto, as propriedades de paracompacidade, regularidade Lindelöf e normalidade plena não são preservadas pelos produtos topológicos. Isto quer dizer que os pontos de um espaço topológico são não só irrelevantes para definir tais propriedades, como a sua presença nos conduz a trabalhar na categoria errada e a obtermos menos teoremas interessantes.

Fica assim justificada mais um outro aspecto relevante da topologia sem pontos.

Historicamente, acabámos de passar da “era pré-Isbell” (anos 60) para a “era Isbell” (anos 70) iniciada com a publicação do já citado artigo [5], na qual pela primeira vez se apresentaram diferenças significativas entre as propriedades categoriais das duas abordagens à topologia, com implicações no tipo de teoremas que se podem obter com uma e outra.

7. A compactificação de Stone-Čech. O Teorema de Tychonoff.

No início dos anos 80 deu-se uma segunda "revolução" no estudo dos reticulados locais[1]. Iremos ilustrá-la com um exemplo (que, apesar de pouco representativo da qualidade das demonstrações que se podem agora obter, permite apresentar a ideia fundamental subjacente).

7.1. A compactificação de Stone-Čech. Um dos resultados mais importantes da topologia garante que, para todo o espaço de Tychonoff X (ou seja, todo o espaço de Hausdorff completamente regular), existe um espaço compacto de Hausdorff βX que contém X como subespaço denso. Esta imersão densa satisfaz a seguinte propriedade universal:

Para cada morfismo $f : X \to Y$ com Y compacto de Hausdorff, existe um e um só morfismo $\overline{f} : \beta X \to Y$ que torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[dr, "f"'] & \beta X \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

comutativo.

Em termos categoriais isto quer dizer que a subcategoria KHaus (espaços compactos de Hausdorff) da categoria Tych dos espaços de Tychonoff é reflectiva, sendo βX a reflexão de X em KHaus e $\beta_X : X \hookrightarrow \beta X$ a unidade da adjunção. Esta imersão β_X é a famosa *compactificação de Stone-Čech*[2] do espaço X.

---

[1]Com os seguintes artigos: B. Banaschewski e C. J. Mulvey, *Stone-Čech compactification of locales I*, Houston J. Math. 6 (1980) 301-312; P. T. Johnstone, *Tychonoff's Theorem without the Axiom of Choice*, Fund. Math. 113 (1981) 21-35; B. Banaschewski e C. J. Mulvey, *Stone-Čech compactification of locales II*, J. Pure Appl. Algebra 33 (1984) 107-122.

[2]Existem diversas maneiras de construir a compactificação de Stone-Čech de um espaço; por exemplo, pode ser obtida como o espaço dos ideais maximais da sua álgebra das funções reais contínuas limitadas $C^*(X)$.

Mais geralmente, $X \overset{m}{\hookrightarrow} Y$ é uma *compactificação* de um espaço X se for uma imersão densa de X num espaço Y compacto de Hausdorff. Existem diversos tipos de compactificação de acordo com o tipo de espaço Y (compactificação de Stone-Čech, compactificação zero-dimensional de Stone-Banaschewski, compactificação de Wallman, compactificação de Alexandroff, etc.).

O functor β pode ser estendido a Top, continuando a ser um adjunto à esquerda da inclusão $\mathsf{KHaus} \hookrightarrow \mathsf{Top}$; neste caso geral a unidade $\beta_X : X \hookrightarrow \beta X$ pode não ser necessariamente uma imersão. É-o exactamente quando X é completamente regular. Estranhamente apesar de não haver obstáculo nenhum à definição de β em espaços arbitrários, muitos autores usam o termo "compactificação de Stone-Čech" para a restrição de β à subcategoria Tych[3].

A existência da compactificação de Stone-Čech de um espaço X é equivalente, classicamente, ao Teorema do Ideal Primo e, portanto, só um pouco mais fraca que o Axioma da Escolha.

7.2. Uma construção preliminar. Vejamos o que acontece nos reticulados locais. Para isso precisamos de recordar o reticulado local $\mathcal{I}L$ de 2.3(8). Trata-se de um reticulado local com $1 = L$ e $0 = \{0\}$. Relativamente aos supremos podemos dizer o seguinte:

Lema. *O supremo em $\mathcal{I}L$ é dado pela fórmula*

$$\bigvee_{i\in I} J_i = \{a_1 \vee \cdots \vee a_n \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1,\ldots,n\} \exists \alpha_i \in I : a_i \in J_{\alpha_i}\}.$$

Demonstração. Como observámos no exemplo (8) em 2.3,

$$\begin{aligned}\bigvee_{i\in I} J_i &= \bigsqcup\{\bigvee_{i\in F} J_i \mid F \subseteq I, F \text{ finito}\}\\ &= \bigcup\{\bigvee_{i\in F} J_i \mid F \subseteq I, F \text{ finito}\}\\ &= \{a_1 \vee \cdots \vee a_n \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1,\ldots,n\} \exists \alpha_i \in I : a_i \in J_{\alpha_i}\}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Vamos agora apresentar a ideia básica da construção da compactificação de Stone--Čech em reticulados locais. A construção, a apresentar mais adiante, será uma modificação ligeira desta ideia, explorando a regularidade completa.

Proposição. *$\mathcal{I}L$ é compacto.*

Demonstração. Se $\bigvee_{i\in I} J_i = L$, temos em particular que $1 \in \bigvee_{i\in I} J_i$. Portanto podemos escrever $1 = a_1 \vee \cdots \vee a_n$ onde $a_i \in J_{\alpha_i}$ para algum $\alpha_i \in I$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. Então já $J_{\alpha_1} \vee \cdots \vee J_{\alpha_n} = L$. $\blacksquare$

Observação. Consideremos as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \upsilon : & \mathcal{I}L & \to & L \\ & J & \mapsto & \bigvee J \end{array}$$

[3]Presumivelmente pensando que uma compactificação de X terá que conter X como subespaço.

e

$$\begin{array}{rccc} \downarrow\colon & L & \to & \mathcal{I}L \\ & a & \mapsto & \downarrow a. \end{array}$$

É evidente que $\upsilon \downarrow(a) = a$ e $\downarrow \upsilon(J) \geq J$.

Um homomorfismo h de reticulados locais diz-se *denso* se $h(a) = 0$ implica $a = 0$.

Teorema. *$\upsilon : \mathcal{I}L \to L$ é um homomorfismo de reticulados locais sobrejectivo e denso.*

Demonstração. Pela observação anterior, υ é um adjunto à esquerda de $\downarrow$ logo preserva supremos. Claramente $\upsilon(L) = 1$ e $\upsilon(J \cap H) \subseteq \upsilon(J) \wedge \upsilon(H)$. Por outro lado, pela distributividade, $\upsilon(J) \wedge \upsilon(H)$ é igual a

$$(\bigvee J) \wedge (\bigvee H) = \bigvee \{x \wedge y \mid x \in J, y \in H\} \leq \bigvee z \mid z \in J \cap H\} = \upsilon(J \cap H).$$

A sobrejectividade e a densidade são óbvias. ■

7.3. Intermezzo: o sublocale denso minimal. Uma vez que acabámos de introduzir a noção de morfismo denso em Frm podemos aproveitar para fazer uma brevíssima digressão por um aspecto que ilustra mais uma diferença importante entre Frm e Top (e, mais uma vez, com vantagem para Frm).

Como em qualquer categoria (relativamente à respectiva noção de subobjecto), diz-se que, dados dois sublocales $h : M \hookrightarrow L$ e $g : N \hookrightarrow L$ de um locale L, se tem $h \leq g$, se existir $\varphi : M \to N$ em Loc tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & L \\ N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

No reticulado local L consideremos o subconjunto dos seus *elementos regulares*, ou seja, $\{a \in L \mid a^{**} = a\}$, que denotaremos por $\mathcal{B}L$. As propriedades dos pseudo-complementos dizem-nos que se trata de uma álgebra de Boole completa (embora não seja um sub-reticulado de L). Claramente

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathcal{B}L \\ a & \longmapsto & a^{**} \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo de reticulados locais. Além disso é denso, pois $a^{**} \geq a$. Portanto o respectivo morfismo de locales $\mu_L : \mathcal{B}L \to L$ é um sublocale denso de L.

Proposição. *μ_L é o menor sublocale denso de L.*

Demonstração. Seja $g : N \to L$ um outro sublocale denso de L. Teremos que mostrar que existe $\varphi : \mathcal{B}L \to N$ em Loc tal que $g\varphi = \mu_L$, ou seja, que existe $\varphi^* : N \to \mathcal{B}L$ em Frm tal que $\varphi^* g^* = \mu_L$ (adoptamos aqui a convenção de, dado um morfismo $h : L \to M$ de locales, designar por $h^* : M \to L$ o correspondente homomorfismo de reticulados locais).

Dado $x \in N$, como g^* é sobrejectiva, $x = g^*(a)$ para algum $a \in L$. Teremos então que fazer $\varphi^*(x) = \varphi^* g^*(a) = \mu_L{}^*(a) = a^{**}$. Mas teremos que garantir que se $g^*(b) = x$ também $b^{**} = a^{**}$, o que é simples:

$$g^*(a^*) \wedge g^*(a) = 0 \Rightarrow g^*(a^*) \wedge g^*(b) = 0.$$

Pela densidade de g^*, $a^* \wedge b = 0$ logo $a^* \leq b^*$. Analogamente, $b^* \leq a^*$. Portanto $a^* = b^*$ pelo que $a^{**} = b^{**}$. ■

A importância desta proposição está bem expressa nas afirmações de Johnstone que reproduzimos no apêndice (página 58).

Observação. Claro que depois de familiarizado com a "art of backwards thinking" ninguém escreve as coisas deste modo tão pormenorizado; ou opta por escrever tudo em Frm (como Banaschewski, Pultr e outros), isto é, prova que $\mu_L : L \to \mathcal{B}L$ é o maior quociente denso de L ou opta por Loc (como Isbell, Johnstone e os "topos-theorists"), sem fazer qualquer referência aos correspondentes morfismos h^* em Frm.

7.4. Ideais regulares. Um ideal J de L diz-se *regular* se, para cada $a \in J$, existe $b \in J$ tal que $a \lhd\lhd b$. Denotaremos a família dos ideais regulares de L por βL.

Proposição. *βL é um sub-reticulado local de $\mathcal{I}L$. Então, em particular, βL é um reticulado local compacto.*

Demonstração. Sejam $J, H \in \beta L$ e $a \in J \cap H$. Existem $b_1 \in J$ e $b_2 \in H$ tais que $a \lhd\lhd b_1$ e $a \lhd\lhd b_2$. Das propriedades de $\lhd$ e da definição de $\lhd\lhd$ rapidamente deduzimos que $a \lhd\lhd b_1 \wedge b_2$. Como $b_1 \wedge b_2 \in J \cap H$ então $J \cap H$ é regular.

Para provar que $L \in \beta L$ basta observar que $1 \lhd 1$.

Para provar que βL é fechado para todos os supremos em $\mathcal{I}L$ bastará mostrar que

(1) é fechado para supremos finitos e

(2) é fechado para supremos de conjuntos dirigidos.

Quanto a (2) não há problema pois, em tal caso, $\bigsqcup J_i = \bigcup J_i$.

Sejam agora J_1 e J_2 regulares, $a \in J_1 \vee J_2$. Então $a = a_1 \vee a_2$ para algum $a_1 \in J_1$ e algum $a_2 \in J_2$. Além disso existem $b_i \in J_i$ tais que $a_i \lhd\lhd b_i$ $(i = 1, 2)$. Como $a_1 \vee a_2 \lhd\lhd b_1 \vee b_2$ e $b_1 \vee b_2 \in J_1 \vee J_2$, podemos concluir que $J_1 \vee J_2$ é regular. ■

7.5. A compactificação de Stone-Čech em Frm. Para cada $a \in L$ definamos

$$k_L(a) = \{x \in L \mid x \lhd\lhd a\}.$$

Como $\triangleleft\triangleleft$ é interpoladora imediatamente se conclui que $k_L(a) \in \beta L$.

Lema. *Se $a \triangleleft \triangleleft b$ em L então $k_L(a) \triangleleft \triangleleft k_L(b)$ em βL.*

Demonstração. Mostremos primeiro que se $a \triangleleft \triangleleft b$ então $k_L(a) \triangleleft k_L(b)$ em βL. Por interpolação podemos construir c e d tais que $a \triangleleft \triangleleft c \triangleleft \triangleleft d \triangleleft \triangleleft b$. Então $d \in k_L(b)$. Além disso $c^* \in k_L(a^*)$ (de facto, se $u \triangleleft v$ temos $u^* \vee v = 1$ e então $u^* \vee v^{**} = 1$ pelo que $v^* \triangleleft u^*$; estender esta regra a $\triangleleft\triangleleft$ é imediato). Como $1 = c^* \vee d \in k_L(a^*) \vee k_L(b)$ então $k_L(a^*) \vee k_L(b) = L$. Automaticamente $k_L(a)^* \vee k_L(b) = L$. Por outro lado, $k_L(a) \cap k_L(a^*) \subseteq \downarrow a \cap \downarrow a^* = \{0\}$. Isto mostra que $k_L(a) \triangleleft k_L(b)$.

Agora se $(c_{n,k})_{n=0,1,\ldots;k=0,1,\ldots,2^n}$ é uma sequência interpoladora entre a e b então

$$\forall n \in \{0, 1, \ldots\}\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}\ \ c_{n,k} \triangleleft \triangleleft c_{n,k+1},$$

pois, como é fácil de confirmar, $d_{m,l} = c_{n+m,2^n k+l}$ $(m = 0, 1, \ldots; l = 0, 1, \ldots, 2^m)$ define uma sequência interpoladora entre $c_{n,k}$ e $c_{n,k+1}$. Então $k_L(c_{n,k}) \triangleleft k_L(c_{n,k+1})$, o que garante que $(k_L(c_{n,k}))$ é uma sequência interpoladora entre $k_L(a)$ e $k_L(b)$. ∎

Proposição. *βL é completamente regular.*

Demonstração. Seja $J \in \beta L$. Por definição de ideal regular temos imediatamente $J = \bigvee\{k_L(a) \mid a \in J\}$. Bastará então mostrar que $k_L(a) \triangleleft \triangleleft J$ para qualquer $a \in J$. Mas para cada $a \in J$ existe $b \in J$ tal que $a \triangleleft \triangleleft b$. Por conseguinte, usando o Lema, $k_L(a) \triangleleft \triangleleft k_L(b) \subseteq J$ e está provado. ∎

Dado um homomorfismo de reticulados locais $h : L \to M$, definamos

$$\begin{array}{rccc} \beta h : & \beta L & \to & \beta M \\ & J & \mapsto & \downarrow h[J]. \end{array}$$

Consideremos ainda a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \beta_L : & \beta L & \to & L \\ & J & \mapsto & \bigvee J. \end{array}$$

Denotando por $\mathsf{KCRegFrm}$ a categoria dos reticulados locais compactos completamente regulares, temos que as correspondências $L \mapsto \beta L$ e $h \mapsto \beta h$ acima descritas definem um functor $\beta : \mathsf{Frm} \to \mathsf{KCRegFrm}$. Com efeito:

Trivialmente $\beta h(J \cap H) \subseteq \beta h(J) \cap \beta h(H)$ e $\bigvee_{i\in I} \beta h(J_\alpha) \subseteq \beta h(\bigvee_{i\in I} J_\alpha)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \beta h(J) \cap \beta h(H) &= \downarrow h[J] \cap \downarrow h[H] \\ &= \{x \mid \exists a \in J, b \in H : x \le h(a) \wedge h(b)\} \\ &= \{x \mid \exists a \in J, b \in H : x \le h(a \wedge b)\}. \end{aligned}$$

Como, para cada $a \in J$ e $b \in H$, $a \cap b \in J \cap H$, obtemos, prosseguindo,

$$\beta h(J) \cap \beta h(H) \subseteq \{x \mid \exists c \in J \cap H : x \le h(c)\} = \beta h(J \cap H).$$

Se $x \in \beta h(\bigvee_{i\in I} J_\alpha)$ então $x \leq h(a_1 \vee \cdots \vee a_n)$ para alguns $a_i \in J_{\alpha_i}$ logo $x \leq h(a_1) \vee \cdots \vee h(a_n)$, ou seja, $x \in\downarrow(\bigvee \downarrow h[J_\alpha]) = \bigvee \downarrow h[J_\alpha] = \bigvee \beta h(J_\alpha)$. Portanto β é um functor.

Teorema. (Compactificação de Stone-Čech) *A inclusão de* $\mathsf{KCRegFrm}$ *em* Frm *tem um adjunto à direita que é* β. *Além disso, o morfismo co-reflector* $\beta_L : \beta L \to L$ *é:*

- *para qualquer* L, *denso e sobrejectivo;*
- *sobrejectivo se e só se* L *é completamente regular;*
- *um isomorfismo se* L *é compacto completamente regular.*

Demonstração. Comecemos por verificar as propriedades de β_L. É evidente que cada β_L é denso. Como $k_L\beta_L(J) \supseteq J$, β_L é um adjunto à esquerda pelo que preserva supremos arbitrários. A prova da preservação dos ínfimos binários pode ser feita como no Teorema 7.2.

Se L for completamente regular então $\beta_L k_L = 1_L$ pelo que β_L é sobrejectiva. Reciprocamente, sendo β_L sobrejectiva e $a \in L$, podemos escrever $k_L(a) = k_L\beta_L(J) \supseteq J$ para algum $J \in \beta L$. Isto implica $\bigvee\{x \in L \mid x \lhd\!\lhd a\} \geq \bigvee J = a$, logo L é completamente regular.

Suponhamos agora que L é compacto completamente regular. Já vimos que $k_L(\beta_L(J)) \supseteq J$. Seja $a \in k_L(\beta_L(J))$. Então $a \lhd\!\lhd \bigvee J$ e $a^* \vee \bigvee J = 1$. Portanto $\{a^*\} \cup J$ é uma cobertura de L e, consequentemente, existem $x_1, \cdots, x_n \in J$ tais que $a^* \vee x_1 \vee \cdots \vee x_n = 1$. Como $x = x_1 \vee \cdots \vee x_n \in J$, temos $a \lhd x \in J$ o que mostra que $a \in J$. Então $k_L(\beta_L(J)) = J$ e k_L e β_L são isomorfismos (mutuamente inversos).

Finalmente, seja $h : M \to L$ com M compacto completamente regular. Aplicando β é óbvio que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\beta L \arrow[r, "\beta_L"] & L \\
\beta M \arrow[u, "\beta h"] \arrow[r, "\beta_M"'] & M \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

comuta:

$$\beta_L(\beta h(J)) = \bigvee \downarrow h[J] = \bigvee h[J] = h(\bigvee J) = h(\beta_M(J)).$$

Como β_M é um isomorfismo, então h factoriza-se através de β_L e esta factorização é única ($h = \beta_L \cdot \beta h \cdot k_M$). ∎

O paralelismo com a situação clássica é evidente; daí o dizer-se que esta construção é a compactificação de Stone-Čech para reticulados locais. Se restringirmos Frm a $\mathsf{CRegFrm}$ então β_L é sempre sobrejectiva, isto é, L é um sublocale denso de βL, situação perfeitamente análoga à compactificação de Stone-Čech clássica.

Observações.

(1) O leitor pode verificar que toda a compactificação de Stone-Čech foi feita sem o recurso ao Axioma da Escolha e à Lei do Terceiro Excluído. É pois um processo totalmente construtivo. Banaschewski e Mulvey apresentaram esta construção em [2]. Posteriormente apresentaram outra completamente diferente[4].

No entanto a existência de compactificações de Stone-Čech para espaços topológicos implica o Teorema de Tychonoff para espaços compactos de Hausdorff; é pois equivalente ao Teorema do Ideal Primo, logo não construtiva.

Este exemplo ilustra um aspecto fundamental da topologia sem pontos: os seus resultados sendo, ao contrário das respectivas versões clássicas, construtivos permitem que esta topologia possa ser usada em contextos não clássicos (topos).

(2) Esta construção, com pequenos ajustamentos, pode ser usada para mostrar que $\mathsf{KRegFrm}$ é co-reflectiva em Frm. Mas para manter o processo construtivo, o reflector β tem que ser modificado, perdendo-se a descrição efectiva dos ideais que vão estar em βL [2].

(3) No caso de um espaço X, como Johnstone refere em [7], definindo $\beta X = \Sigma(\beta(\mathcal{O}X))$, combinando o Teorema 7.5 com a adjunção $\mathcal{O} \dashv \Sigma$ (4.3), e usando trivialidades categoriais e o facto de que, assumindo o Axioma da Escolha, todo o reticulado local compacto regular é espacial, obtem-se imediatamente a compactificação de Stone-Čech para espaços:

***Corolário.** *(Compactificação de Stone-Čech para espaços) A inclusão de* KHaus *em* Top *tem um adjunto à esquerda* β*. O morfismo reflector* $X \to \beta X$ *é uma imersão se e só se* X *é completamente regular.*

7.6. Outro exemplo: o Teorema de Tychonoff para reticulados locais. Verificando que o seguinte facto da teoria das categorias

uma subcategoria co-reflectiva é fechada para co-limites[5]

pode também ser provado sem recurso ao Axioma da Escolha e à Lei do Terceiro Excluído, podemos concluir do Teorema 7.5 que

coprodutos de reticulados locais compactos regulares são compactos, e este facto não depende de princípios não construtivos.

Aliás, isto é ainda verdade para reticulados locais compactos não necessariamente regulares. É o chamado Teorema de Tychonoff para reticulados locais. A sua prova é, contudo, mais longa e muito mais difícil, pelo que não a apresentaremos.

Tudo isto contrasta com o caso clássico onde o Teorema de Tychonoff é equivalente ao Axioma da Escolha[6] (no contexto dos espaços de Hausdorff é equivalente ao

---

[4]B. Banaschewski e C. J. Mulvey, *Stone-Čech compactification of locales II*, J. Pure Appl. Algebra 33 (1984) 107-122.

[5]Em particular, que é o que nos interessa, é fechada para coprodutos.

[6]Cf. J. L. Kelley, *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fund. Math. 37 (1954) 75-76.

Teorema do Ideal Primo). O que se pode concluir daqui é que o Axioma da Escolha é necessário para que os produtos tenham pontos suficientes e não para a preservação da compacidade.

Notas históricas: O Teorema de Tychonoff para reticulados locais foi pela primeira vez provado por Dowker e Strauss[7] em 1976, prova essa válida na axiomática de Zermelo-Fraenkel com Axioma da Escolha ($\mathbb{ZFC}$). Em 1981[8], num dos artigos mais importantes da topologia sem pontos[9], Johnstone provou a sua validade em $\mathbb{ZF}$ (sem Axioma da Escolha). A prova usa no entanto todo o poder de $\mathbb{ZF}$ (nomeadamente o Axioma da Substituição, não construtivo). Em 1985 Křížapresentou uma nova demonstração[10], válida em $\mathbb{ZF}$, já sem necessitar do Axioma da Substituição. Finalmente, Vermeulen na sua tese de doutoramento[11] dá-nos uma demonstração construtivamente válida no sentido da teoria dos topos (ou seja, uma demonstração válida num topos arbitrário).

[7]C. H. Dowker e D. Strauss, *Products and sums in the category of frames*, in: Categorical Topology, Springer LNM 540, 1976, p. 208-219.

[8]P. T. Johnstone, *Tychonoff's Theorem without the Axiom of Choice*, Fund. Math. 113 (1981) 21-35.

[9]Importante na medida em que constituiu o primeiro exemplo de resultado clássico equivalente ao Axioma da Escolha com versão locálica independente de qualquer princípio de escolha.

[10]I. Kříž, *A constructive proof of the Tychonoff's theorem for locales*, Comment. Math. Univ. Carolinae 26 (1985) 619-630.

[11]J. Vermeulen, *Constructive techniques in functional analysis*, Tese de Doutoramento, Univ. Sussex 1987.

Apêndice

O porquê desta abordagem à Topologia

Citando Johnstone [8], "*there remains the question: why study locales at all?*"

Porque, apesar de originalmente ter tido uma motivação meramente formal, posteriormente revelou diversos aspectos interessantes, decisivos mesmo, segundo alguns matemáticos, para preferir estes novos "espaços generalizados" relativamente aos clássicos:

> "*It is here that the real point of pointless topology begins to emerge; the diference between locales and spaces is one that we can (usually) afford to ignore if we are working in a 'classical' universe with the axiom of choice available, but when (or if) we work in a context where choice principles are not allowed, then we have to take account of the diference – and usually it is locales, not spaces, which provide the right context in which to do topology. This is the point which André Joyal began to hammer home in the early 1970's; I can well remember how, at the time, his insistence that locales were the real stuff of topology, and spaces were merely figments of the classical mathematician's imagination, seemed (to me, and I suspect to others) like unmotivated fanaticism. I have learned better since then*" [8].

Enumeremos então, à laia de conclusão, alguns desses aspectos, que tentámos ir apresentando e justificando ao longo destas notas:

(1) Olhando simultaneamente para Frm e Frm^{op} podemos ter a intuição dos dois lados da questão, o algébrico[1] (reticulados locais) e o geométrico (locales, onde podemos reproduzir a nossa intuição topológica). O facto da categoria Frm ser algébrica apresenta muitas vantagens.

(2) É uma teoria, por natureza, construtiva. Desempenha pois um papel muito importante na abordagem construtiva à topologia, permitindo que a topologia possa ser feita num topos ([6], [11]) e outros contextos não clássicos[2].

(3) A categoria oposta da categoria Frm contém Sob como subcategoria reflectiva, sendo portanto uma generalização de grande parte da topologia clássica (por exemplo, de todos os espaços de Hausdorff). Inúmeras propriedades topológicas podem então ser estendidas dos espaços topológicos sóbrios aos locales.

[1] "Frames can be regarded as the algebraic part of the theory of topological spaces" nas palavras de H. Simmons.

[2] Veja, e.g., B. Banaschewski e C. J. Mulvey, *A constructive proof of the Stone--Weierstrass theorem*, J. Pure Appl. Algebra 116 (1997) 25-40 e B. Banaschewski e C. J. Mulvey, *A globalization of Gelfand Duality*, preprint.

(4) Esta passagem dos espaços sóbrios aos locales é uma imersão plena de categorias; não preserva produtos, em geral. Esta discrepância entre as duas noções de produto é uma das razões pela qual a categoria Loc apresenta diferenças significativas relativamente a Top. Como foi genialmente observado por Isbell em 1972, estas diferenças tornam a categoria dos locales mais atraente: por exemplo, a propriedade de paracompacidade para locales é produtiva, a propriedade de Lindelöf para locales também é produtiva, e todo o subgrupo locálico de um grupo locálico é fechado (os grupos locálicos estão para os grupos topológicos assim como os locales estão para os espaços topológicos). Como é bem conhecido, todas estas propriedades são falsas no caso clássico.

(5) Relativamente à noção de *sublocale* (ou reticulado local quociente), que corresponde à noção de subespaço, todo o locale pode ser representado como um sublocale de um locale espacial, mas em geral os sublocales têm um comportamento muito diferente dos subespaços. Isto é evidente no facto da intersecção de qualquer família de sublocales densos de um dado locale ser ainda densa. Parafraseando Johnstone [8],

> "*...the simple most important fact which distinguishes locales from spaces: the fact that every locale has a smallest dende sublocale. If you want to 'sell' locale theory to a classical topologist, it's a good idea to begin by asking him to imagine a world in which any intersection of dense subspaces would always be dense; once he has contemplated some of the wonderful consequences that would flow from this result, you can tell him that that world is exactly the category of locales (in a sense which can be made quite precise, it is the least possible modification of the category of spaces which makes the result true... It is certainly clear that in order to achieve such a category, we have to abandon the idea of a space as a set of points equipped with some kind of structure;*".

Esta é a outra diferença significativa entre Loc e Top.

(6) Um grande número de factos topológicos são de facto consequência de resultados neste contexto "livre de pontos", enquanto que as provas destes últimos são não só, pela sua própria natureza, mais gerais mas também mais transparentes e sugestivas.

Resumindo, a estrutura topológica de um locale não pode "viver nos seus pontos"; daqui a considerar que a estrutura topológica, isto é, o reticulado local dos abertos é a essência do locale (de modo a que os pontos, caso existam, vivam nos abertos em vez da situação inversa) vai um pequeno passo. Isto justifica que realizemos o esforço de nos treinarmos a pensar "sem pontos".

(7) Os reticulados locais têm uma característica que vai mais além do que o interesse que possam merecer como espaço topológico generalizado. Em muitas situações, determinados espaços são não triviais somente em virtude de algum princípio de escolha, enquanto que os seus reticulados de abertos já têm existência prévia, antes de tais assunções.

Isto quer dizer que, de certo modo, podemos sempre ver os abertos dos espaços em questão, enquanto que ver os seus pontos requere um instrumento adicional, na forma de alguma variante do Axioma da Escolha. Isto é significativo pois em muitos problemas, conhecer o reticulado dos abertos é praticamente tão bom quanto conhecer o próprio espaço.

Esta ideia é muito bem resumida por Banaschewski, com o seguinte *slogan*[3]:

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{choice-free frame argument}\\ + \\ \textit{suitable choice principle}\end{array}}{\textit{classical result on spaces}}$$

Em muitas das construções em Frm que precedem determinados espaços familiares, em contextos mais gerais que a teoria dos conjuntos usual, os espaços em questão não são suficientes e os reticulados locais tomam completamente o seu papel.

Um exemplo típico é a Dualidade de Gelfand. Classicamente trata-se da dualidade entre as álgebras C^* comutativas (com unidade) e os espaços compactos de Hausdorff.

Substituindo a teoria clássica dos conjuntos ($\mathbb{ZFC}$) por um topos de Grothendieck, ela torna-se na dualidade entre as álgebras C^* comutativas (com unidade) e os reticulados locais compactos regulares[4].

Esta é a verdadeira forma da Dualidade de Gelfand, sendo a versão clássica uma consequência (acidental) devido às condições especiais envolvidas: como vimos no Teorema 5.4, a categoria dos reticulados locais compactos regulares é, na presença do Teorema do Ultrafiltro Booleano, (dualmente) equivalente à dos espaços compactos de Hausdorff.

(8) De alguma forma relacionado com o papel dos reticulados locais como antecedentes lógicos dos espaços, está a relação entre os reticulados locais e a lógica (teoria da computação), relação esta explorada no livro [13] de S. Vickers. A motivação aqui prende-se com o facto dos reticulados locais serem o tipo de álgebras que aparecem na "lógica das observações finitas".

Por outro lado, os reticulados locais são precisamente as álgebras de Heyting completas (embora os morfismos das respectivas categorias não sejam os mesmos) e são, portanto, os modelos para a lógica proposicional intuicionista. Determinadas construções de reticulados locais podem ser apresentadas como álgebras de Lindenbaum de teorias proposicionais específicas (isto tem também muito a ver com os objectos de estudo da teoria dos *Fuzzy Sets*[5]).

[3] Em B. Banaschewski, *On proving the Tychonoff Product Theorem*, Kyungpook Math. J. 30 (1990) 65-73.

[4] B. Banaschewski e C. J. Mulvey: *The spectral theory of commutative C^*-algebras*, preprint; *A globalization of Gelfand Duality*, preprint.

[5] Cf. B. Banaschewski, *Propositional Logic, Frames, and Fuzzy Algebra*, preprint.

Também todo o reticulado local ocorre como álgebra de Heyting dos valores de verdade da lógica interna de um topos pelo que considerações da teoria dos topos envolvendo a sua lógica interna têm um impacto evidente nos reticulados locais e vice-versa [6].

(9) A categoria dos locales é o local certo para fazer "fibrewise topology" (cf. [9]).

Para uma discussão mais cuidada e pormenorizada destes (e de outros) aspectos recomendamos a leitura de [8] e [9].

Bibliografia

[1] J. Adámek, H. Herrlich e G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley, New York et. al. 1990.

[2] B. Banaschewski e C. J. Mulvey, *Stone-Čech compactification of locales I*, Houston J. Math. 6 (1980) 301-312.

[3] B. A. Davey e H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics 6, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[5] J. R. Isbell, *Atomless parts of spaces*, Math. Scand. 31 (1972) 5-32.

[6] P. T. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, London et. al. 1977.

[7] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge studies in advanced mathematics 3, Cambridge University Press, Cambridge 1982.

[8] P. T. Johnstone, *The point of pointless topology*, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1983) 41-43.

[9] P. T. Johnstone, *The Art of pointless thinking: a student's guide to the category of locales*, in: Category Theory at Work (Actas do Workshop de Bremen 1990, editadas por H. Herrlich e H.-E. Porst), Heldermann Verlag, Berlim 1991, p. 85-107.

[10] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer Verlag, New York et. al. 1971.

[11] S. MacLane e I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer Verlag, New York et. al. 1992.

[12] E. Manes, *Algebraic Theories*, Graduate Texts in Mathematics 26, Springer Verlag, New York et. al. 1976.

[13] S. Vickers, *Topology via Logic*, Cambridge Tracts in Theor. Comp. Sci. 5, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

Jorge Picado
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
e-mail: picado@mat.uc.pt