Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I (Eng$^{\text{as}}$ Biomédica, Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic$^{\text{a}}$ Física)

Ano lectivo de 2006/07 Folha 1

Funções Elementares

1. Calcule as raízes das seguintes equações:

   (a) $3x^2+5x+2=0$; (b) $5x^3-4x+1=0$; (c) $5x^4-3x^3-12x^2=0$;

   (d) $(x^2-9)(2x-5)=0$; (e) $2x^2+4x+2=0$; (f) $x^4-x^2-1=0$;

   (g) $\sqrt{3x+1}=2x$; (h) $\sqrt{x^2-6}=\sqrt{x}$; (i) $x^3-2x^2+x-2=0$.

2. Simplifique as seguintes fracções:

   (a) $\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{3}{x+2}$; (b) $\dfrac{\sin^2 x-3\sin x}{\cos x(\sin x-3)}$; (c) $\dfrac{\sin^4 x-1}{(\sin x+1)^2}$;

   (d) $\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x+2\cos x}$; (e) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}$; (f) $\dfrac{\log^2 x-3\log x}{\log x}$;

   (g) $\dfrac{\log x+2}{\log^2 x+2\log x}$; (h) $\dfrac{e^{3x}+2e^{2x}-e^x-2}{e^{2x}-1}$; (i) $\dfrac{x^3-3x}{x-\sqrt{3}}$.

3. Aplique as propriedades das funções exponencial e logaritmo, e simplifique as expressões:

   (a) $\log 6-\log 3+e^{\log 5}$; (b) $e^{\log 2+\log|x|}$; (c) $2^{\log_4 (x-2)^2}+\log_3 9^{(x-1)}$;

   (d) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2-x}$; (e) $(e^x)^{\log 2}$; (f) $\dfrac{\log_3|x+1|}{\log_3 5}$;

   (g) $\dfrac{\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right)^{(x-\sqrt{5})}}{x^2-5}$; (h) $9^{(\log_3|x+4|+2)}$; (i) $a^{(2-\log_a|x|)/3}$, $a\in\mathbb{R}^+-\{1\}$.

4. Calcule:

   (a) $\sin\left(\text{arc cos}\,\dfrac{3}{5}\right)$; (b) $\sin(\text{arc tg}\,2)$; (c) $\text{arc cos}\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

   (d) $\sin\left(\text{arc sin}\,\dfrac{12}{13}+\text{arc sin}\,\dfrac{4}{5}\right)$; (e) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\text{arc cos}\,\dfrac{4}{5}\right)$; (f) $\cos\left(\text{arc cos}\,\dfrac{15}{17}-\text{arc cos}\,\dfrac{7}{25}\right)$.

5. Simplifique as expressões:

   (a) $\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x}$; (b) $-\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{27\pi}{2}-x\right)+\sin(x+3\pi)-\cos(7\pi-x)$;

   (c) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\cos(2x)$; (d) $\text{tg}\,(x+\pi)+\text{tg}\,(x-\pi)$; (e) $\dfrac{x}{\sin x}+\dfrac{2}{\cos x}$;

   (f) $1+\dfrac{1}{1+\text{sh}^2 x}$; (g) $\dfrac{\text{ch}\,x\,\text{sh}\,x-\text{sh}\,x}{\text{ch}^2 x-1}$; (h) $\dfrac{1+\text{sh}^2 x}{1+\text{ch}\,(2x)}$.

6. Verifique as seguintes igualdades:

(a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2 x-\frac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R};$

(b) $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x,\ \forall x\in\mathbb{R};$

(c) $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R};$

(e) $(\cos x+\cos(2x))^2+(\sin x+\sin(2x))^2=2+2\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R};$

(f) $1+\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right),\ \forall x\in\mathbb{R};$

(g) $\operatorname{tg}(2x)=\frac{1}{1-\operatorname{tg}x}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}x};$

(h) $\operatorname{arc\,tg}x=\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

(i) $\operatorname{sh}(3x)=3\operatorname{sh}x+4\operatorname{sh}^3x;$

(l) $\operatorname{th}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}.$

7. Mostre que:

(a) $x\le|x|$, para todo o $x\in\mathbb{R};$

(b) $|x+y|\le|x|+|y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R};$

(c) $\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh}x;$

(d) $\log_a x=\frac{\log x}{\log a},\ \forall x>0,\ \forall a\in]0,1[\cup]1,+\infty[;$

(e) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1;$

(f) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}y\operatorname{ch}x;$

(g) $\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y));$

(h) $\operatorname{arg\,ch}x=\log(x+\sqrt{x^2-1}),\ x\ge1.$

8. Resolva as seguintes equações:

(a) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2}{x^2-1};$

(b) $\left|\frac{x-1}{3x+4}\right|=2;$

(c) $\cos x+\sin(2x)=0;$

(d) $3^{\sin x+\sin x\operatorname{tg}x}=1;$

(e) $\log_3 x=\frac{1}{2}+\log_9(4x+15);$

(f) $e^x+4e^{-x}=5;$

(g) $\log_2(\sin x+1)-1=0;$

(h) $1+\operatorname{sh}^2x=3\operatorname{ch}x.$

9. Resolva as seguintes inequações:

(a) $\frac{x-3}{1-x}\ge0;$

(b) $\frac{x^2-4}{x^2-5x}<0;$

(c) $|x^2-1|>1;$

(d) $5+\sqrt{x}<1;$

(e) $\log_{1/3}(1-x)<2;$

(f) $\log(1-x)\operatorname{arc\,tg}(x+2)\le0;$

(g) $\frac{x^2-1}{\operatorname{arg\,ch}(x+3)}<0;$

(h) $\log(\operatorname{ch}x)\ge0;$

(i) $|\operatorname{sh}x-3|<2.$

10. Determine os domínios das funções definidas por:

(a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$; (b) $f(x) = x^{1/x}$;

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$; (d) $f(x) = \text{arc tg}\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$;

(e) $f(x) = \text{arc cos}\left(\dfrac{-3x^2 + x}{x^2 + 1}\right)$; (f) $f(x) = \log\left(\text{arc tg}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right)$;

(g) $f(x) = \text{arg ch}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$; (h) $f(x) = \text{arg sh}\left(\dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$;

(i) $f(x) = \sqrt{\text{ch}\, x - 2}$.

11. Mostre que:

(a) $\text{sh}^2 x = \dfrac{\text{ch}(2x) - 1}{2}$; (b) $\text{arg sh}\, x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(c) $\text{arc tg}\,|x| = \text{arc cos}\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; (d) $\text{arg th}\, x = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$.

12. Sabendo que $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$, deduza fórmulas para

(a) $\cos(x + y)$; (b) $\sin(x + y)$;

(c) $\sin(x - y)$; (d) $\text{tg}(x + y)$.

13. Tendo em conta os resultados do exercício anterior, deduza as fórmulas de

(a) $\cos(2x)$; (b) $\text{sen}(2x)$; (c) $\cos^2 x$;

(d) $\text{sen}^2 x$; (e) $\text{tg}(2x)$.

14. Demonstre as seguintes igualdades.

(a) $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{arc tg}\left(\frac{1}{3}\right)$;

(b) $\frac{\pi}{4} = 4\,\text{arc tg}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{arc tg}\left(\frac{1}{239}\right)$;

15. Após um aumento de 20%, o peso de um animal é de 60Kg. Qual o seu peso inicial?

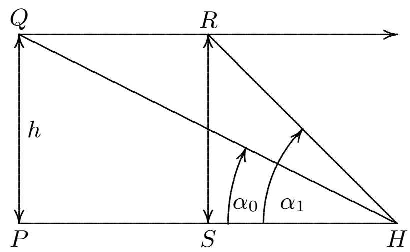
16. Uma bola é atirada para o ar do topo de um edifício a 32m de altura. A altura h a que a bola se encontra do solo num dado instante t é dada pela fórmula

$$h = -4t^2 + 4t + 32\,.$$

Durante quanto tempo esteve a bola a mais de 4m do solo?

17. Para conseguir um *Bom* numa disciplina a média de um estudante deve ser superior ou igual a 80%, e inferior a 90%. Nos primeiros três testes os resultados do estudante foram 78%, 90% e 92%. Determine quais as classificações do quarto teste que lhe garantem um *Bom*.

18. Um avião aproxima-se de uma zona H a uma velocidade $v = 550$Km/h e altitude h constante. A um dado instante o ângulo de elevação do avião é $\alpha_0 = 16^o$ e passado 1 minuto o ângulo de elevação é $\alpha_1 = 57^o$. Determine a altura h a que se desloca o avião.



19. O geólogo C. F. Richter definiu magnitude de um terramoto como sendo $\log_{10}(I/S)$, onde I é a intensidade do terramoto (medida por um sismógrafo a 100Km do epicentro) e S é a intensidade de um terramoto "padrão".

O terramoto de S. Francisco, em 1989, atingiu uma magnitude de 6.9 na escala de Richter. Sabendo que o terramoto de 1906 foi 25 vezes mais intenso que o de 1989, calcule a sua magnitude na escala de Richter.

20. A quantidade Q, em gramas, de uma substância radioactiva decresce exponencialmente de acordo com a seguinte fórmula:

$$Q(t) = Q_0 e^{-0.09t},$$

onde Q_0 denota a quantidade inicial e, t o tempo em anos. Sabe-se que ao fim de 11 anos restavam cerca de 8.51 gramas dessa substância. Qual era a quantidade inicial.

21. Um tecido atacado por vírus é exposto a Raios X. O número de células virais sobreviventes depende da quantidade de radiação x, de acordo com a fórmula

$$N(x) = N_0 e^{-0.2x}.$$

onde N_0 é o número inicial de células virais.

(a) Qual o valor de x que corresponde a 95% de células virais destruídas?

(b) Parece não ser possível exterminar todos os vírus por este processo. Porquê?

Limites, Continuidade e Derivadas

22. Calcule, caso exista, o valor de cada um dos limites das seguintes funções reais:

(a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{x+1}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}$;

(d) $\lim\limits_{x\longrightarrow \pi/2} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$; (e) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; (f) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{-4x^3+3}{x^4+x+1}$;

(g) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; (h) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$; (i) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x}$;

(j) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$; (k) $\lim\limits_{x\longrightarrow e} (\log x)^{1/(\log x-1)}$; (l) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$;

(m) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} xe^{-x}$; (n) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{\log(\sin 3x)}{\log(\sin x)}$; (o) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

(p) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,sin} x}{x-1}$; (q) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\pi-2\operatorname{arc\,cos} x}{\operatorname{tg} x}$; (r) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$;

(s) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x-1}{x^3}$; (t) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left|\dfrac{x-1}{x^3}\right|$; (u) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

(v) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\operatorname{arg\,ch} x}{x^2-1}$; (w) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; (x) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{3x}$.

23. Usando o teorema do limite das funções enquadradas, mostre que:

(a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$; (b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}}=0$; (c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^4\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$;

(d) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \operatorname{arc\,sin} x\left(\operatorname{th}\dfrac{1}{x}\right)=0$; (e) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \operatorname{th} x \operatorname{arc\,cos}\dfrac{1}{x}=0$; (f) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \operatorname{sh} x \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}=0$;

(g) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^2 f(x)=0$, sendo f uma função tal que $f(x)\in[0,c]$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (c constante positiva).

24. Suponha que $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=0^+$ e que $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x)=+\infty$ (respectivamente $-\infty$).

Mostre que, então $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)^{g(x)}=0^+$ (respectivamente $+\infty$).

25. Suponha que $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=+\infty$ e que $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x)=+\infty$ (respectivamente $-\infty$).

Mostre que, então $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)^{g(x)}=+\infty$ (respectivamente 0).

26. Determine, utilizando as regras de derivação, as derivadas das seguintes funções:

(a) $2x^3 - 7x + 2$; (b) $\dfrac{2}{3x-1}$; (c) $\log(3x-1)$; (d) $\sin(2x^2 - 3)$;

(e) $\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; (f) $e^{x\cos x}$; (g) $\text{arc sin}^2(\log(x^2))$; (h) $\log \text{tg}\, x^5$;

(i) $\text{arc tg}\, \dfrac{2x}{1-x^2}$; (j) $(x^x)^x$; (k) $(\cos x)^{\sin x}$; (l) $\dfrac{\text{sh}\,(e^x - 1)}{\text{arg ch}\, x}$.

27. Determine os domínios e as expressões das derivadas das funções f definidas por:

(a) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)$; (b)$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \log\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$;

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; (d) $f(x) = \log\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$;

(e) $f(x) = \text{arc cos}\,(\log x)$; (f) $f(x) = \text{arc sin}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$;

(g) $f(x) = \sqrt{\text{ch}\, x - 3}$; (h) $f(x) = \log\left(\dfrac{\text{sh}\,(x+1)}{1-x}\right)$.

28. Calcule, se possível, as derivadas das funções nos pontos indicados:

(a) $f(x) = \log\dfrac{\sqrt{x+4}\cos x}{\text{arc tg}\,(x+1)}$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -4$;

(b) $f(x) = \dfrac{x\, \text{arc sin}\, x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\sqrt{1-x^2}$, $x = 0$, $x = 1$.

29. Determine a equação da tangente à curva de equação:

(a) $y = \log(x^2+1)$, no ponto de abcissa 0;

(b) $y = e^{x^2-1}$, no ponto em que $y = 1$;

(c) $y^2 + x^2 = 1$, no ponto em que seja paralela ao eixo dos xx's;

(d) $yx^3 + y^2x^2 = 2$, no ponto $(1, 1)$;

(e) $y = \dfrac{(x-2)^2\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^{2/3}}$, no ponto de abcissa 0;

(f) $y = \text{arc tg}\left(\log\dfrac{x^2}{e}\right)$, no ponto de abcissa e;

(g) $y = \text{ch}\,(x+3) - 1$, no ponto de abcissa 0;

(h) $y = \text{arg sh}\,(x^2-1)$, no ponto de abcissa 1;

(i) $y = \dfrac{\text{sh}\,(x^2-3)+1}{x+3}$, no ponto de abcissa 0.

30. Mostre que:

(a) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ satisfaz $xy' = (1-x^2)y$; (b) $y = \dfrac{1}{1+x+\log x}$ satisfaz $xy' = y(y\log x - 1)$;

(c) $y = \text{arc tg}\, \dfrac{1}{x}$ satisfaz $\sin^2(\text{arc tg}\, x) + x^2y' = 0$.

31. Estude a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x + 1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \in [0, 2] \\ \sin x & \text{se } x > 2 \end{cases}$; (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;

(c) $f(x) = \log |x|$; (d) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$;

(e) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$; (f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sin} x}{x}$;

(g) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{x-1}$; (h) $f(x) = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$;

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\log x)}{1+\cos x} & \text{se } x \in]0, \pi[\\ -\frac{\pi}{4} & \text{se } x = 0 \\ \frac{-\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x+2} & \text{se } x \in [-1, 0[\end{cases}$; (j) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arc\,tg}(1+x)}{e^x-1} & \text{se } x \in]0, 2] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \left|\frac{e^{\cos x}}{\operatorname{arc\,sin} x}\right| & \text{se } x \in [-1, 0[\end{cases}$.

32. Considere a família de funções definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \neq 1 \\ K & \text{se } x = 1 \end{cases} .$$

Determine K de modo a que f seja contínua em $x = 1$.

33. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x < 2 \\ K & \text{se } x = 2 \\ -2x + 7 & \text{se } x > 2 \end{cases} .$$

Determine, se possível, K de modo a que f seja contínua em $x = 2$.

34. Seja $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$. Verifique que $f(-1)f(3) < 0$. Poderá concluir que existe $c \in]-1, 3[$ para o qual se tenha $f(c) = 0$?

35. Mostre que a equação $x^3 - 9x^2 + 7 = 0$ tem três raízes, uma em cada um dos intervalos abertos $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e $]6, 9[$. Melhore o resultado aproximando-as até às centésimas.

36. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$. Embora $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ e $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$, não existe nenhum x no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ tal que $f(x) = 0$. Será que este facto contraria o Teorema dos Valores Intermédios? Justifique.

37. Seja f uma função contínua em $[0,1]$ e $0 \leq f(x) \leq 1$, para todos os valores de $x \in [0,1]$. Mostre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

38. Calcule a derivada em todos os pontos do domínio, caso existam, das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^{1/3}$;

(b) $f(x) = |x|$;

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ x+5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$;

(e) $f(x) = \log |x^2 - x|$;

(f) $f(x) = |\operatorname{arc\,tg}(x^2 - x)|$;

(g) $f(x) = |\arcsin(2x-1)|$;

(h) $f(x) = \operatorname{arg\,ch} x$;

(i) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

(j) $f(x) = |\operatorname{arg\,th}(x-1)|$.

39. Use o Teorema de Rolle para mostrar que a equação $\operatorname{tg} x = 1 - x$ tem uma solução em $]0,1[$.
(Sugestão: Considere $f(x) = (x-1)\sin x$ e calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f'(x)$.)

40. Sendo $f(x) = 5 + 3(x-1)^{2/3}$, mostre que $f(0) = f(2)$ e que f' nunca se anula em $]0,2[$. No entanto, o Teorema de Rolle diz-nos que deveria existir um ponto em $]0,2[$ no qual f' se anulasse. O que é que não está correcto neste raciocínio?

41. Segundo Galileu, o espaço (em metros) percorrido por um objecto em queda livre, partindo de um estado de repouso, durante t segundos é dado por

$$s(t) = 4.9t^2.$$

(Observação: É desprezada a resistência do ar.)
Supondo que um objecto é largado do topo de um edifício, de uma altura de 490m, determine:

(a) o tempo que o objecto demora a atingir o solo.
(b) a velocidade média do objecto, durante todo o percurso.
(c) a velocidade instantânea no momento em que atinge o solo.
(d) o ponto em que a velocidade instantânea é igual à velocidade média do percurso.

42. O número de habitantes P de uma pequena cidade, previsto para daqui a t anos, é dada pela fórmula

$$P = 25000 + \frac{12000t}{(t+2)^2}.$$

Determine:

(a) P daqui a 12 anos,
(b) P num futuro muito afastado ($\lim_{t \longrightarrow +\infty} P$).

43. Para determinar $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{3x^2 - 1}{x - 1}$ pela regra de L'Hôpital, derivamos o numerador e o denominador e obtemos $\dfrac{6x}{1}$, e depois substitúimos x por 0, obtendo 0. Contudo, se olharmos para a função dada, vemos de imediato que quando x tende para 0 a função tende para 1. Qual a razão da discrepância nas respostas?

44. Considere a função definida por
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}.$$
Mostre que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$ e que a regra de L'Hôpital não pode ser usada para o calcular.

45. Mostre que:

(a) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$, para todo $x \in [-1, 1]$;

(b) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, para todo $x \geq 0$;

(c) $\log(1 + x) \leq x$, para todo $x \geq 0$;

(d) $\log(1 + x^2) \geq \log 2 + (x - 1)$, para todo x tal que $|x| \leq 1$;

(e) $\operatorname{arc\,tg}(x + 1) \leq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}x$, para todo $x \geq 0$.

46. Mostre que se f é um polinómio de grau 3 então tem no máximo 3 raízes reais.

47. Mostre que o polinǿ mio $x^3 + 3x + 2$ tem exactamente uma raiz real.

48. Mostre que
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\log^n x}{x} = 0\,,$$
para qualquer número natural $n \in \mathbb{N}$.

49. Determine os máximos e mínimos das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$;

(b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$;

(c) $f(x) = |x|$;

(d) $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sh} x| & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

(e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\log(x + 1)}$;

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

(g) $f(x) = xe^{-x}$;

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$;

(i) $f(x) = \left|\dfrac{x + 1}{x}\right|$;

(j) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ x + 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

50. Determine a monotonia das seguintes funções.

    (a) $\operatorname{arc\,tg}(xe^{-x})$; (b) $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$.

51. Um projéctil, segue uma trajectória definida por $y = \operatorname{tg}(\alpha)x + \sin(x)$, onde $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ é a medida do ângulo de elevação. Determine α por forma a que a trajectória tenha sempre sentido ascendente.

52. (a) Determine os valores de a para os quais a função
$$f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$
tem um extremo para $x = \dfrac{\pi}{3}$, indicando se se trata de um máximo ou de um mínimo.

    (b) Encontre os valores de a e b para os quais a função
$$f(x) = a\log x + bx^2 + x$$
tem extremos para os pontos $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Mostre que, para os valores encontrados, f tem um mínimo para x_1 e um máximo para x_2.

53. (a) Decomponha o número 8 em duas parcelas tais que a soma dos seus cubos seja mínima.

    (b) Decomponha o número 36 em dois factores de modo que a soma dos seus cubos seja mínima.

54. Dos triângulos rectângulos em que a soma dos comprimentos da hipotenusa e de um cateto é constante, qual é o de área máxima?

55. Qual o rectângulo de perímetro máximo inscrito numa semi-circunferência de raio r?

56. De entre os rectângulos de perímetro constante, qual o de área máxima?

57. Determine a altura do cilindro de volume máximo, inscrito numa esfera de raio r.

58. Determine entre todos os rectângulos inscritos numa circunferência de raio r, aquele que tem área máxima.

59. Uma pista de atletismo com comprimento de 400 metros, é constituída por duas semi-circunferências iguais unidas por dois segmentos de recta iguais.

    Quais são as dimensões da pista (isto é, comprimento dos segmentos de recta e raio das semi-circunferências) que compreendem a área máxima?

60. Um campo petrolífero tem 8 poços que produzem um total de 1600 barris de petróleo por dia. Para cada poço adicional perfurado, a produção média por poço decresce de 10 barris diários. Quantos poços adicionais devem ser abertos para maximizar a produção?

61. Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a um circuito de resistência variável R. Pela lei de Ohm, a corrente I no circuito é dada por $I = \dfrac{V}{R+r}$. Se a força resultante é dada por $P = I^2R$, mostre que a força máxima ocorre se $R = r$.

Primitivas

62. Calcule as primitivas das seguintes funções reais de variável real:

(a) $x^3 - 3x + \dfrac{1}{2}$; (b) $\dfrac{x^3+x+2}{\sqrt{x}}$; (c) $\dfrac{1}{x} - \sin x$; (d) $\dfrac{1}{x}\log x$;

(e) $e^{x/7} - e^{-x/7}$; (f) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; (g) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$; (h) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$;

(i) $\dfrac{1}{16+x^2}$; (j) $\dfrac{1}{1+4x^2}$; (k) $\dfrac{2a}{\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} - 3k\sqrt[3]{x^2}$; (l) $e^x\sqrt{1+e^x}$;

(m) $\dfrac{1}{x\log x}$; (n) $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; (o) $\dfrac{3x+5}{x^2+1}$; (p) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}$;

(q) $\dfrac{x^3}{9-x^4}$; (r) $\dfrac{x}{9+x^4}$; (s) $\dfrac{x^3}{\sqrt{9-x^4}}$; (t) $\dfrac{x}{\sqrt{9-x^4}}$;

(u) $\dfrac{\text{arc tg}\, x}{1+x^2}$; (v) $\dfrac{\text{arc sin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$; (w) $\dfrac{e^{\text{arc tg}\, x}}{1+x^2}$; (x) $\dfrac{1}{(4+x^2)\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2}}$;

(y) $\dfrac{e^{4x}+e^{2x}}{2+e^{4x}}$; (z) $a^x\sin(a^x)$; (aa) $x^2 7^{x^3}$; (ab) $\dfrac{1}{x(1+\log^2 x)}$;

(ac) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$; (ad) $\dfrac{\text{ch}\,(\log x)}{x}$; (ae) $\dfrac{\text{sh}\, x}{1-\text{ch}^2 x}$; (af) $\text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x$;

(ag) $\dfrac{\text{sh}\, x}{4+\text{ch}^2 x}$; (ah) $\dfrac{e^x\,\text{arg sh}\,(e^x)}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; (ai) $\dfrac{\text{arg th}^2 x}{1-x^2}$; (aj) $\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

63. Calcule as primitivas das seguintes funções reais de variável real:

(a) $x^2\log x$; (b) $\log x$; (c) $\log^2 x$; (d) $x\cos x$;

(e) $e^x\cos x$; (f) $\cos(\log x)$; (g) $\cos^2 x\sin x\, e^{\cos x}$; (h) $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

(i) $\cos(5x)\sin(2x)$; (j) $\text{arc cos}\,(6x)$; (k) $\dfrac{\text{arc tg}\,(3x)}{1+9x^2}e^{\text{arc tg}\,(3x)}$; (l) $\text{arc tg}\,\dfrac{1}{x}$;

(m) $x^2\cos x\sin x$; (n) $\dfrac{\log^2 x}{x^3}$; (o) $\dfrac{1}{x}2^{\log x}\log x$; (p) $x\sin^2 x$;

(q) $(1-x)e^{1+2x}$; (r) $e^{-x}\cos(\pi x)$; (s) $3^x\sin(2x)$; (t) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\text{arc sin}\, x$;

(u) $\dfrac{\text{arc tg}\, x}{(x-1)^2}$; (v) $\dfrac{\log(x-1)}{x^2}$; (w) $\dfrac{\log x + 1}{(x-1)^2}$; (x) $\text{arg sh}\, x$;

(y) $e^x\,\text{ch}\, x$; (z) $x\,\text{arg th}\, x$; (aa) $x\,\text{sh}\, x$; (ab) $\text{sh}\, x\log(1+\text{sh}\, x)$.

64. Primitive as fracções racionais definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\dfrac{2x}{(2+x)(x-3)}$; (b) $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; (c) $\dfrac{1-3x+4x^2}{(x-1)(x-2)}$; (d) $\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$;

(e) $\dfrac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}$; (f) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}$; (g) $\dfrac{x^2}{x^4-1}$; (h) $\dfrac{4x^2+6}{x^3+3x}$;

(i) $\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}$; (j) $\dfrac{2x^2+1}{4x^3-x}$; (k) $\dfrac{x+1}{x^3-x^2}$; (l) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

(m) $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2(x-2)^2}$; (n) $\dfrac{x+5}{(x-1)(x^2+4)}$; (o) $\dfrac{x+2}{x^2(x^4-1)}$; (p) $\dfrac{3x+2}{x^3+x^2-2x}$.

65. Calcule as primitivas das seguintes funções reais de variável real:

(a) $\sin^5 x$; (b) $\sin^2 x$; (c) $\cos^3 x$; (d) $\cos^4 x$;

(e) $\operatorname{tg}^5 x$; (f) $\dfrac{1}{\sin x}$; (g) $\dfrac{1}{\sin^6 x}$; (h) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$;

(i) $\sin^3(2x)\cos^3(2x)$; (j) $\sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}$; (k) $\dfrac{1}{\cos^4(3x)}$; (l) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^3 x}$;

(m) $\dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}$; (n) $\dfrac{1}{\sin^3(2x)\operatorname{tg}(2x)}$; (o) $\operatorname{ch}^2 x$; (p) $\dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch} x}$;

(q) $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^3(2x)}$; (r) $\dfrac{1}{\operatorname{th}^2 x}$; (s) $\operatorname{sh}^3 x\operatorname{ch}^2 x$; (t) $\dfrac{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^3 x}$.

66. Calcule as primitivas das seguintes funções reais de variável real:

(a) $\sqrt{4-x^2}$; (b) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-9}}$; (c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}$; (d) $\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$;

(e) $\dfrac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}}$; (f) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}$; (g) $\dfrac{\sin x-\sin^3 x}{\cos x+\cos^2 x}$; (h) $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

(i) $\dfrac{(\sin^3 x+1)\cos x}{1+\sin^2 x}$; (j) $\dfrac{(\operatorname{tg}^2 x+1)\operatorname{tg} x}{2+\operatorname{tg}^2 x}$; (k) $\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{16-x^2}}$; (l) $\dfrac{x^2-1}{(1+x)\sqrt{9-x^2}}$;

(m) $\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x-\cos x-2}$; (n) $\dfrac{1}{x\sqrt{16-x^2}}$; (o) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$; (p) $\dfrac{\operatorname{sh} x+\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^2 x+1}$;

(q) $\dfrac{\operatorname{ch} x}{4+3\operatorname{sh} x}$; (r) $\dfrac{\operatorname{th}^3 x}{1+\operatorname{th}^2 x}$; (s) $\dfrac{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x}$.

Integral Definido

67. Calcule as primitivas das seguintes funções reais de variável real:

(a) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-4\cos^2 x}}$; (b) $\sin x \log(\sin x+1)$; (c) $\dfrac{2x-\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$; (d) $x \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$;

(e) $\log\sqrt{1+4x^2}$; (f) $\dfrac{e^x-4}{e^{2x}+1}$; (g) $\dfrac{x^2}{x^6+9}$; (h) $x^2\log(x+1)$;

(i) $\dfrac{9x^2-35x+28}{x^3-4x^2+4x}$; (j) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$; (k) $\dfrac{1}{x^2}\log(x^3+x)$; (l) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$;

(m) $\dfrac{e^{6x}-e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$; (n) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; (o) $\dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$; (p) $\dfrac{x+e^{\operatorname{arc\,tg}(1/x)}}{x^2+1}$;

(q) $\dfrac{xe^{\operatorname{arc\,sin} x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$; (r) $x \operatorname{arc\,sin} x$; (s) $\dfrac{5^x}{5^{3x}+5^{-x}}$; (t) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$;

(u) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; (v) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[6]{x}+1)^2}$; (w) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$; (x) $\dfrac{e^{4x}-1}{e^{2x}+2}$;

(y) $\operatorname{sh}^3 x\log(\operatorname{ch} x)$; (z) $x \operatorname{arg\,th}\sqrt{1-x^2}$; (aa) $\dfrac{3x}{(x-1)^2(x^2+1)}$; (ab) $x^2 \operatorname{arg\,ch} x$.

68. Calcule as áreas das regiões planas definidas pelas seguintes condições:

(a) $y^2 \le 2x$; $x^2 \le 3y$; (b) $x+y \ge 2y^2$; $y \ge x^2$; $x \ge 0$;

(c) $y^2 \le 6x$; $x^2+2y \le 0$; $y \ge -1$; (d) $y \le 4-x^2$; $y \ge x+2$; $x \ge 0$;

(e) $y^2+x^2 \le 1$; $y \le x$; $x \ge 0$; (f) $y \ge x^2$; $16x^2-\dfrac{y^2}{4} \ge 1$; $y \le 1$;

(g) $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \le 1$; $(x-2)^2+y^2 \le 1$; (h) $x^2+y^2 \le 1$; $y^2 \le \dfrac{1}{2}+x$; $y \ge x$;

(i) $x^2+y^2 \le 1$; $y \le x$; $y+x \ge 1$; (j) $y+2 \ge x^2$; $y-1 \le -x^2$;

(k) $(y-1)^2+x^2 \le 1$; $y+x \ge 1$; $y \le 2x$; (l) $y+1 \ge x^2$; $y^2 \le x+1$; $y \ge 0$; $x \ge 0$;

(m) $x^2+y^2 \le 1$; $(x-1)^2+y^2 \ge 1$; $y \ge 0$; (n) $1+y \ge x^2$; $1-y \le x^2$; $x+1 \ge 2y$.

69. (a) Mostre que se f é uma função contínua e ímpar em $[-a,a]$, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

(b) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin(x^3+x)}{\operatorname{arc\,tg}(1+x^2)}\,dx$.

70. Mostre que
$$0 < \int_0^1 e^x \left|\cos \frac{\pi}{x+1}\right| dx < e\,.$$

71. Mostre que a função
$$f:\ x \longrightarrow \int_1^x \frac{1}{2t^2+t+1}\,dt$$
é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

72. Considere a função
$$f:\ x \longrightarrow \int_0^x \frac{\operatorname{arc\ tg}(t-1)}{t+1}\,dt\,.$$
(a) Estude a monotonia de f em $[0,+\infty[$.
(b) Mostre que $|f(2)| \leq \frac{\pi}{2}$.

73. (a) Mostre que se f é uma função contínua em $[a,b]$, então
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$
(b) Mostre que
$$\left|\int_0^1 e^{-x}(\cos^3 x + \sin^5 x)\,dx\right| \leq 2\,.$$

74. Mostre que
$$x\int_0^x \frac{e^{\sin t}}{t^2+t+1}\,dt > 0\,,$$
para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

75. Calcule as derivadas das funções $f: x \to f(x)$, com $f(x)$ definidas, em $\mathbb{R}^+$, por:
(a) $\displaystyle\int_1^x \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\,dt$, $x>0$; (b) $\displaystyle\int_2^x \frac{\cos y}{y}\,dy$, $x>0$; (c) $\displaystyle\int_1^{\log x} \sin(y+e^y)\,dy$.

76. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2}\,dt)^2}{\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt}$.

77. Seja $f: x \to f(x)$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e considere a função definida por
$$g: x \to g(x) = \int_0^{e^x-1} f(t)dt.$$
(a) Mostre que g é contínua no seu domínio.
(b) Mostre se $a>0$, então existe $c \in]0,a[$ tal que $g(a) = ae^c f(e^c-1)$.

78. Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então existe pelo menos uma raíz da equação $f(x)=0$ em $[a,b]$.