II.0 Limites de funções

No Ensino Secundário foi dada uma definição de limite de função recorrendo aos limites de sucessões. É costume designá-la por **definição de limite segundo Heine**, em homenagem ao matemático alemão Heinrich Eduard Heine (1821-1881). Recordemo-la. Seja *f* uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto *a*, podendo não estar definida no ponto *a*, e seja *b* um número real. Diz-se que o limite de *f*(*x*) quando *x* tende para *a* é *b* e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se e só se, para toda a sucessão (x_n) que tenda para *a* por valores diferentes de *a*, a sucessão $\left(f(x_n)\right)$ tende para *b*. Simbolicamente

$$\underset{(x_n)}{\forall}\left[(x_n) \to a \wedge x_n \neq a\right] \Rightarrow \left(f(x_n)\right) \to b$$

Notemos que esta definição é muito geral, abrangendo também todos os casos de limites infinitos. Além do mais, a partir desta definição é fácil provar teoremas sobre o limite de uma soma, um produto, um quociente ou uma raiz. Contudo, para demonstrar outros resultados de que precisaremos, é mais conveniente introduzir outra definição.

Definição II.0.1 (segundo Cauchy)

Seja *f* uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto *a*, podendo não estar definida no ponto *a*. Seja *b* um número real. Diz-se que <u>o limite de *f*(*x*) quando *x* tende para *a* é *b*</u> , se e só se, para todo o ε > 0 podemos encontrar um número δ > 0 tal que, para todo o *x* do domínio de *f*, se *x* é tal que $0<|x-a|<\delta$ então $|f(x)-b|<\varepsilon$. Simbolicamente

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ :\ \underset{x\in D_f}{\forall}\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

Pode-se provar (não o faremos aqui) que as duas definições são equivalentes.

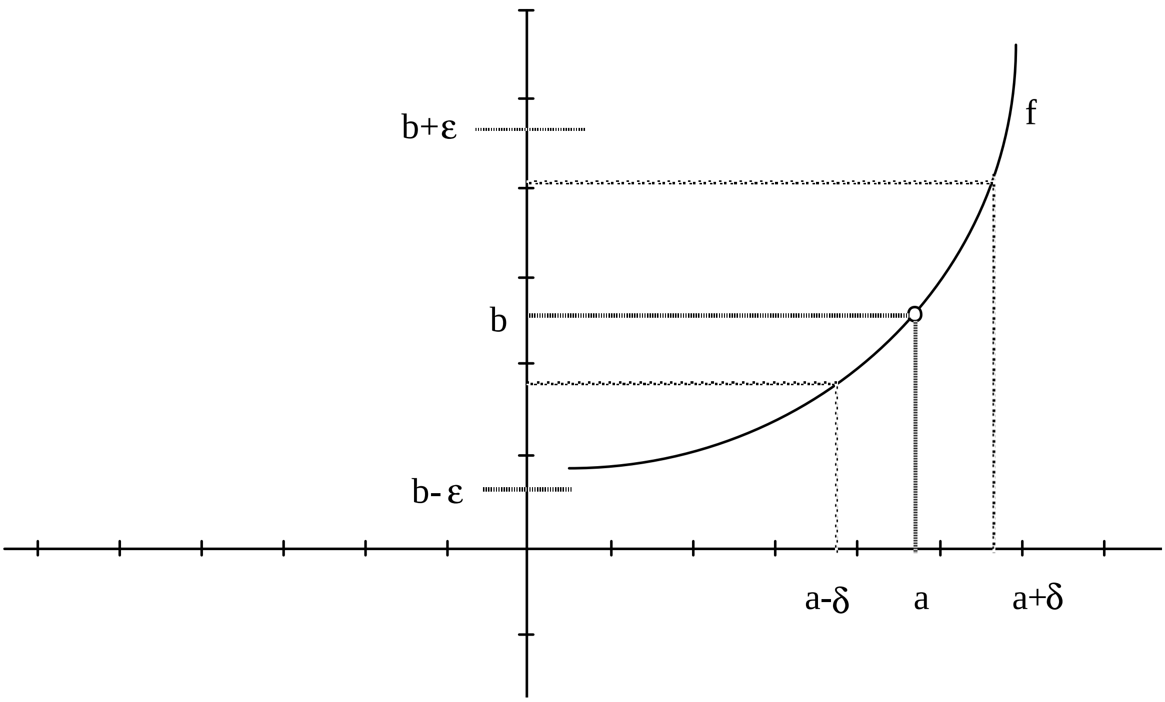
O matemático inglês G. H. Hardy, um apaixonado pelo criquete, o desporto nacional britânico, dizia que, para se entender bem a noção de limite, é preciso pensar numa competição entre um herói e um bandido. O herói tenta provar que $\lim_{x\to a} f(x)=b$ enquanto que o bandido tenta provar o contrário. O bandido escolhe *épsilons* à sua vontade enquanto o herói tenta encontrar *deltas* de modo que para todo o *x* tal que $0<|x-a|<\delta$ ele consiga ter que $|f(x)-b|<\varepsilon$. O herói ganhará o jogo (e provará assim que $\lim_{x\to a} f(x)=b$) quando, para qualquer ε escolhido pelo bandido, conseguir encontrar *sempre* um δ nas condições pretendidas. O bandido ganhará, pelo contrário, quando conseguir encontrar um ε para o qual o herói não consiga encontrar um δ que satisfaça o pretendido.

Podemos ainda enunciar esta definição de outros modos equivalentes:

i) para cada ε > 0 podemos encontrar pelo menos um número δ > 0 tal que, para todo o *x* do domínio de *f*, se *x* é tal que $a-\delta < x < a+\delta$ (e *x* é diferente de *a*) então $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$;

ii) para qualquer ε > 0 podemos encontrar algum número δ > 0 tal que, para todo o x do domínio de f, se x pertence ao intervalo $]a-\mathrm{d}, a+\mathrm{d}[$ (e x é diferente de a) então $f(x)$ pertence ao intervalo $]b-\mathrm{e}, b+\mathrm{e}[$.

Graficamente, diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é b se e só se, qualquer que seja o intervalo $]b-\mathrm{e}, b+\mathrm{e}[$ traçado no eixo dos YY, podemos encontrar algum intervalo $]a-\mathrm{d}, a+\mathrm{d}[$ no eixo dos XX, tal que os x desse intervalo (excepto o ponto a) são transformados por meio de f em pontos que caem dentro do intervalo $]b-\mathrm{e}, b+\mathrm{e}[$.



Dito de outro modo: por mais pequeno que seja o intervalo $]b-\mathrm{e}, b+\mathrm{e}[$ traçado no eixo dos YY, podemos sempre encontrar algum intervalo $]a-\mathrm{d}, a+\mathrm{d}[$ no eixo dos XX, tal que os x desse intervalo (excepto o ponto a) são transformados por meio de f em pontos que caem dentro do intervalo $]b-\mathrm{e}, b+\mathrm{e}[$.

Observemos que não podemos simplesmente dizer que $f(x)$ se aproxima de b quando x se aproxima de a. Por exemplo

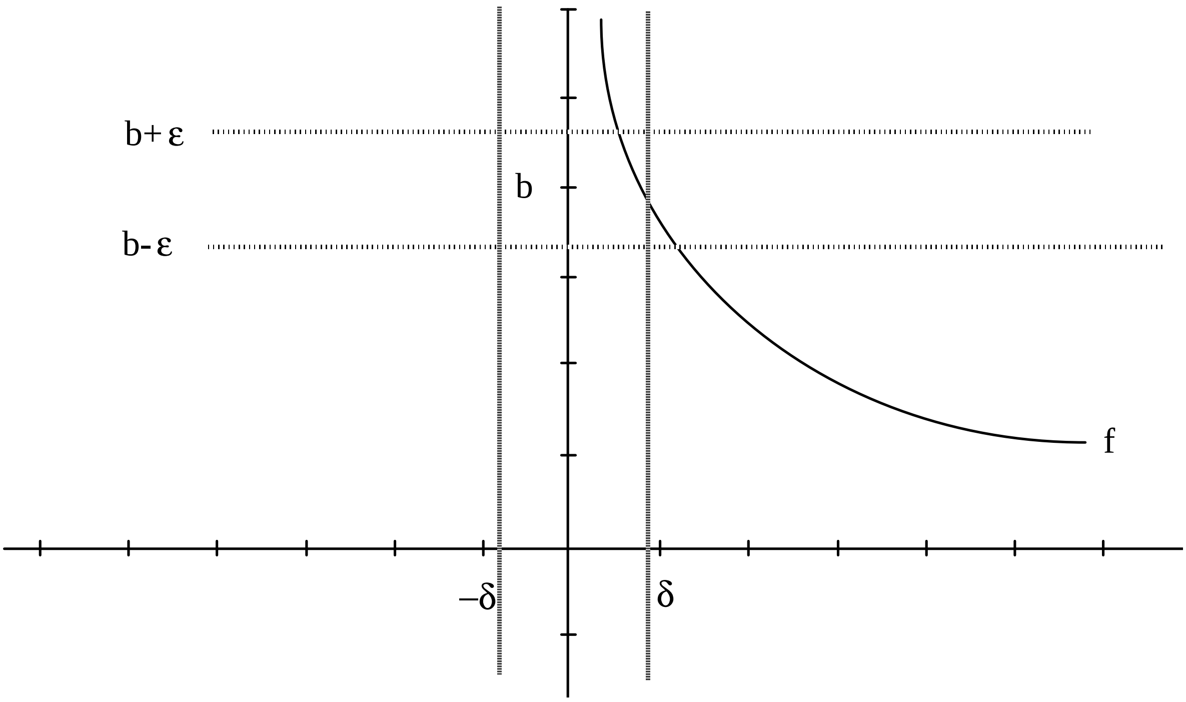
$$f(x) = 10 - 5x$$

aproxima-se de 20 à medida que x se aproxima de zero, e no entanto não parece ter sentido dizer que o limite é 20 (porque então podíamos pôr 50 ou 100 ou outro número superior a 10 no lugar de 20, e a função teria uma infinidade de limites o que não parece ser interessante). É preciso assim escolher uma definição que permita ver que $f(x)$ se aproxima de b de uma forma que não deixa margem para dúvidas (com uma aproximação, ε, tão pequena quanto se queira).

Vejamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

não existe. Se por acaso existisse um número real b limite de $1/x$ quando x tende para zero, então dado um intervalo $]b - \mathrm{e}, b + \mathrm{e}[$ deverá ser sempre possível encontrar um intervalo $]-\mathrm{d}, \mathrm{d}[$ tal que f transforma os pontos do intervalo $]-\mathrm{d}, \mathrm{d}[$ (excluído o ponto zero) em pontos do intervalo $]b - \mathrm{e}, b + \mathrm{e}[$.



Contudo, por mais apertado que seja o intervalo $]-\delta,\delta[$ que escolhamos, os seus pontos são transformados em pontos que nunca cabem no intervalo $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ porque a função $1/x$ assume valores incontrolavelmente grandes.

Logo não pode existir o limite procurado.

Vejamos algumas propriedades dos limites de funções reais de variável real. Consideraremos sempre que as funções estão definidas em intervalos ou uniões finitas de intervalos.

Teorema II.0.2

O limite de uma função, se existir, é único.

Teorema II.0.3

Suponhamos que existem os limites

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

Se p e q forem números reais quaisquer, então

i) $\lim_{x\to a}[pf(x)+qg(x)] = p\lim_{x\to a} f(x) + q\lim_{x\to a} g(x)$

ii) $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$

Se s for um número real não nulo e $f(x) > 0$ para todo o x do domínio de f, então

iii) $\lim_{x\to a}\left[f(x)^s\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$

Se s for um número real positivo, então

iv) $\lim_{x\to a} s^{g(x)} = s^{\lim_{x\to a} g(x)}$

Se $g(x)$ • 0 para todo o x num intervalo aberto contendo o ponto a, então

v) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Se $f(x) > 0$ para todo o x num intervalo aberto contendo o ponto a, e se os dois limites não forem simultaneamente nulos, então

vi) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$

Se, em vi), os dois limites forem simultaneamente nulos, nada se pode dizer a priori sobre o comportamento do limite. Neste caso dizemos que estamos em presença de uma **indeterminação** porque, dependendo das funções particulares f e g envolvidas, assim obteremos diferentes valores para o limite. No caso presente, diz-se que se trata de uma **indeterminação do tipo 0^0**. Essa indeterminação desaparecerá quando for possível determinar o valor do limite (quando exista) por outros meios. Um modo de reduzir esta indeterminação a outras conhecidas será estudado no parágrafo VIII.6.

Além das propriedades elementares anteriores, precisamos ainda de mais algumas.

Teorema II.0.4 (do limite da função composta)

Se f e g estão definidas em intervalos adequados,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad , \qquad \lim_{y \to b} g(y) = c$$

e *g* é uma função contínua no ponto *b*, então

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$$

Teorema II.0.5

Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

e L é um número real tal que

$$f(x) > \mathrm{L}$$

para todo o *x* num intervalo aberto contendo o ponto *a*, excepto no ponto *a*, então

$$b \bullet \mathrm{L}$$

O recíproco deste teorema não é verdadeiro. O limite pode ser superior ou igual a um dado valor mas a função não o ser. Por exemplo, se

$$f(x) = 5 + \frac{2}{x}$$

então

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 6 \geq 6$$

Mas

$$x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 5 + \frac{2}{x} < 5 + \frac{2}{2} = 6$$

Contudo, se o limite for estritamente superior a um dado valor, já a função será superior a esse valor nalgum intervalo aberto contendo o ponto *a* (podendo não estar definida no ponto *a*).

Teorema II.0.6

Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

e

$$b > 0$$

então, existe um intervalo aberto contendo o ponto *a*, onde se tem

$$f(x) > 0$$

excepto possivelmente para $x = a$.

Demonstração

Por definição, dado um ε positivo arbitrário é sempre possível encontrar um δ tal que, para todo o *x* do domínio que verifique $0 < |x - a| < \delta$, se tem

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

isto é

$$-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon$$

ou ainda

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$$

Tomemos um ε conveniente de modo a conseguir o pretendido na tese do teorema. Pode ser, por exemplo $\varepsilon = b/2$, pois, nesse caso, $b - \varepsilon = b/2 > 0$. Assim, escolhido este ε, temos a certeza que existe algum δ tal que, para todo o x do domínio que verifique $0 < |x - a| < \delta$, se tem

$$\frac{b}{2} < f(x)$$

e então, nalgum intervalo aberto contendo o ponto a (excepto possivelmente no ponto a, pois a função pode nem sequer estar definida em a, porque apenas se exige que $0 < |x - a|$),

$$0 < f(x)$$ n

Corolário II.0.7

Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

e

$$b > \mathrm{L}$$

então, existe um intervalo aberto contendo o ponto a, onde se tem

$$f(x) > \mathrm{L}$$

excepto possivelmente para $x = a$.

Teorema II.0.8 (da sanduíche)

Se

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

num intervalo aberto contendo o ponto a (excepto possivelmente para $x = a$) e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$$

então

$$\lim_{x \to a} h(x) = b$$

Os limites laterais definem-se, segundo Cauchy, de modo semelhante, e as diversas propriedades mantêm-se com as adaptações necessárias.

u

Como generalizar a definição segundo Cauchy aos limites infinitos?

Definição II.0.9 (segundo Cauchy)

Seja *f* uma função definida num intervalo $]c,+\infty[$. Seja *b* um número real. Diz-se que <u>o limite de *f*(*x*) quando *x* tende para mais infinito é *b*</u> , e escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

se e só se, para todo o ε > 0 podemos encontrar um número M > 0 tal que, para todo o *x* do domínio de *f*, se *x* é superior a M então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Simbolicamente

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{M > 0}{\exists} : \underset{x \in D_f}{\forall} \; x > \mathrm{M} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

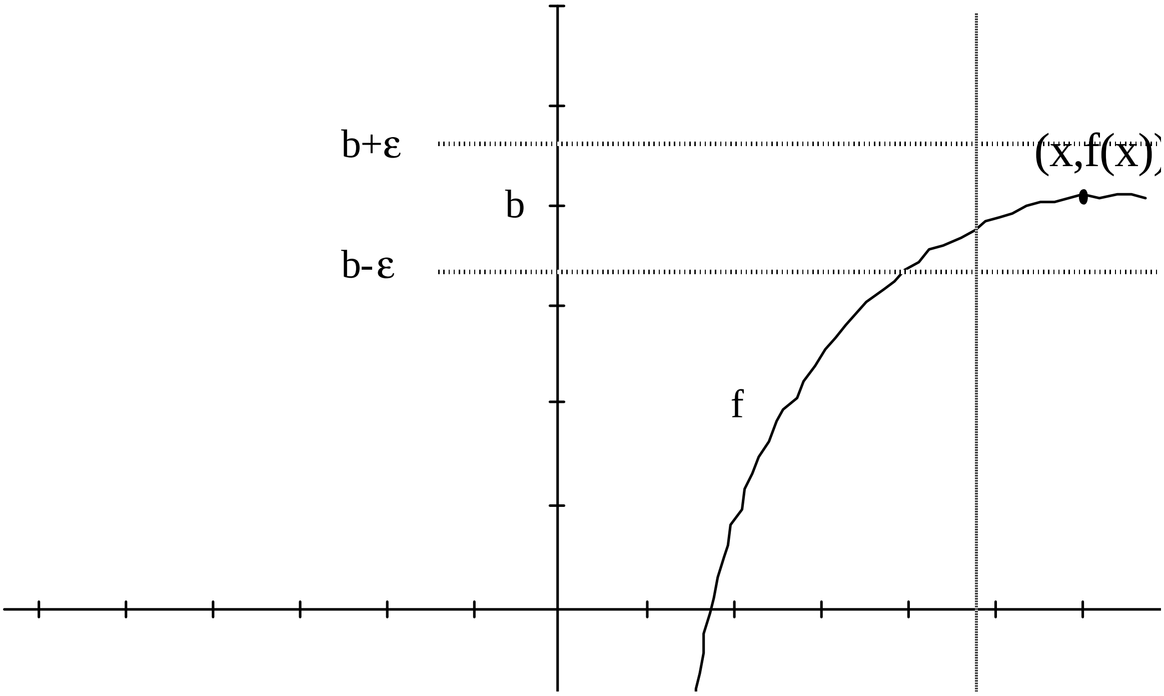
Pode-se provar (não o faremos aqui) que as definições segundo Heine e segundo Cauchy são equivalentes também neste caso.

É fundamental observar que o símbolo mais infinito <u>não</u> representa um número real; é utilizado apenas para indicar que *x* cresce além de qualquer número real.

Vejamos qual o significado geométrico desta definição. Tracemos as rectas horizontais

$$y = b + \varepsilon \qquad , \qquad y = b - \varepsilon$$

O limite de *f*(*x*) quando *x* tende para mais infinito é b se e só se, quaisquer que sejam essas rectas horizontais, for possível encontrar o valor M tal que, para todo o *x* superior a M, todos os pontos $(x, f(x))$ estão entre as rectas dadas



As propriedades anteriores são ainda válidas para este caso, com as adaptações convenientes.

u

A generalização ao caso do limite quando *x* tende para menos infinito é semelhante à anterior.

Definição II.0.10 (segundo Cauchy)

Seja *f* uma função definida num intervalo $]-\infty, c[$. Seja *b* um número real. Diz-se que <u>o limite de *f*(*x*) quando *x* tende para menos infinito é *b*</u> , e escreve-se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

se e só se, para todo o ε > 0 podemos encontrar um número M < 0 tal que, para todo o *x* do domínio de *f*, se *x* é inferior a M então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Simbolicamente

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{M<0}{\exists} : \underset{x \in D_f}{\forall} \ x < M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

u

Vejamos outra generalização da definição segundo Cauchy aos outros casos de limites infinitos.

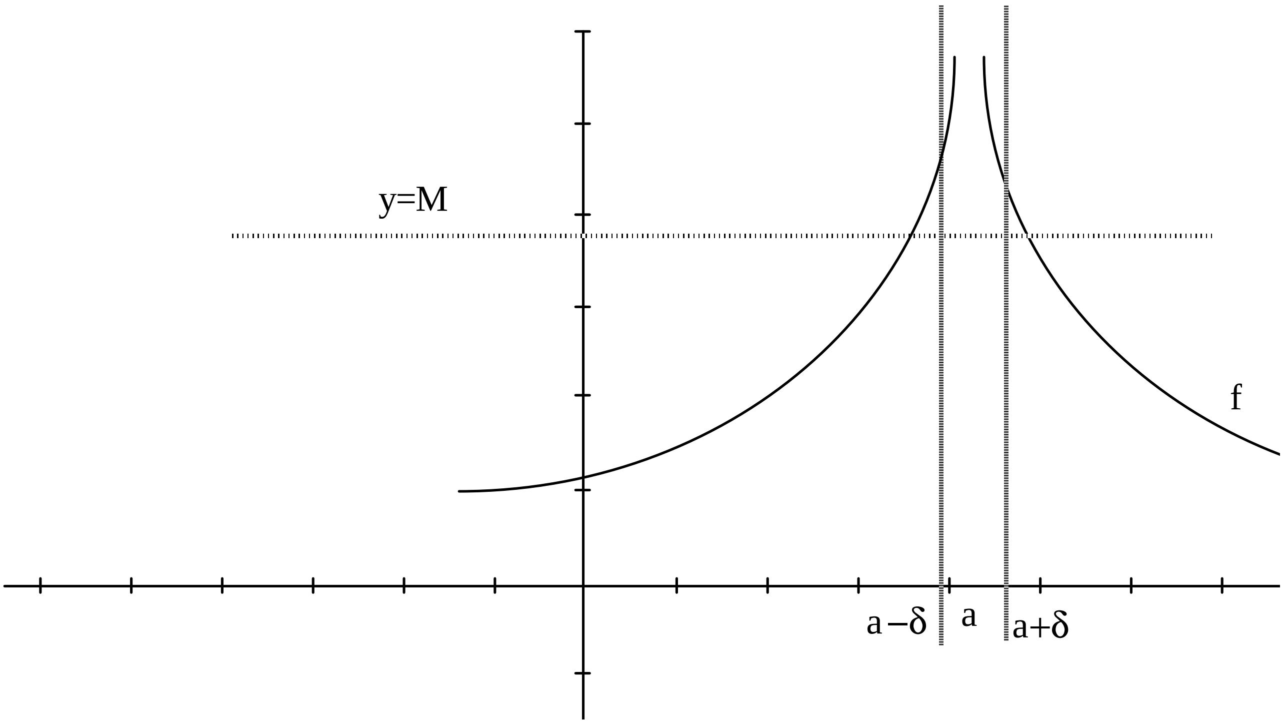
Definição II.0.11 (segundo Cauchy)

Seja *f* uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto *a*, podendo não estar definida no ponto *a*. Diz-se que o limite de *f*(*x*) quando *x* tende para *a* é mais infinito, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se e só se, para todo o M > 0 podemos encontrar um número δ > 0 tal que, para todo o *x* do domínio de *f*, se *x* é tal que $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > M$. Simbolicamente

$$\underset{M>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} : \underset{x \in D_f}{\forall} \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$



Vejamos qual o significado geométrico desta definição. Tracemos a recta horizontal $y = M$. O limite de *f*(*x*) quando *x* tende para a é mais infinito se e só se, qualquer que seja a recta horizontal traçada, podemos encontrar algum intervalo $]a - d, a + d[$ no eixo dos XX, tal que os *x* desse intervalo (excepto o ponto a) são transformados por meio de *f* em pontos que caem acima da recta dada.

u

A generalização aos restantes casos é semelhante às anteriores e todas as propriedades anteriores se mantém válidas com as adaptações convenientes. Em particular devem evitar-se as indeterminações $\mathbf{0}´\bullet$, $\bullet^{0}$ e $\mathbf{1}^{\bullet}$. Os seguintes teoremas são muito úteis:

Teorema II.0.12 (do limite da função composta para limites infinitos)

Se f e g estão definidas em intervalos adequados,

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{y \to +\infty} g(y) = c$$

então

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = c$$

O teorema é ainda válido para os restantes limites infinitos.

Vejamos que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0^+$$

usando o teorema do limite da função composta. Como

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{y \to -\infty} e^y = 0^+$$

podemos usar o teorema para concluir o pretendido.

Teorema II.0.13

a) Temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0 & se \;\; p > n \\ \dfrac{a_n}{b_n} & se \;\; p = n \\ \text{não existe} & se \;\; p < n \end{cases}$$

No caso em que $p < n$, podemos ainda dizer que o limite será $+\infty$ quando a_n e b_p são do mesmo sinal e o limite será $-\infty$ quando a_n e b_p são de sinais contrários.

b) O limite

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n}$$

não existe se *n* for ímpar.

u

Esta noção de limite demorou muito tempo a ser estabelecida na História da Matemática, aparecendo as primeiras definições aceitáveis apenas nos fins do século XVIII, princípios do século XIX. Entre os primeiros a apresentar uma definição satisfatória contam-se o português Anastácio da Cunha e o francês Augustin-Louis-Cauchy.

No livro "Principios Mathematicos" (1790), José Anastácio da Cunha afirma:

« I. Se uma expressão admitir mais de um valor, quando outra expressão admite um só, chamar-se-á esta constante, e aquela variável.

II. A variável que puder sempre admitir valor maior que qualquer grandeza que se proponha chamar-se-á infinita; e a variável que poder sempre admitir valor menor que qualquer grandeza que se proponha, chamar-se-á infinitésima. »

No livro "Cours D'Analyse de L' École Royale Polytechnique: I-Analyse Algébrique" (1821) de Augustin-Louis Cauchy pode ler-se:

« Chama-se quantidade *variável* aquela que se considera como devendo receber sucessivamente vários valores diferentes uns dos outros. Designa-se uma tal quantidade por uma letra tomada ordinariamente entre as últimas letras do alfabeto. Chama-se pelo contrário quantidade *constante*, e designa-se ordinariamente por uma das primeiras letras do alfabeto toda a quantidade que recebe um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a diferir dele tão pouco quanto se queira, este último chama-se o *limite* de todos os outros. »