Exercícios

1• Sejam f e g duas funções tais que

$$\lim_{x \to a} \mathrm{f}(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} \mathrm{g}(x) = 0$$

Mostre que, escolhendo convenientemente as funções f e g, definindo h = f $\times$ g, podemos ter as seguintes situações:

a) $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \to a} h(x) = -27$

d) $\lim_{x \to a} h(x) = 27$ e) $\lim_{x \to a} h(x)$ não existe sem ser +• nem -• .

2• Sejam f e g duas funções tais que f > 0 ,

$$\lim_{x \to a} \mathrm{f}(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} \mathrm{g}(x) = 0$$

Mostre que, escolhendo convenientemente as funções f e g, definindo h = f^{g} , podemos ter as seguintes situações:

a) $\lim_{x \to a} h(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \to a} h(x) = 0$ c) $\lim_{x \to a} h(x) = 27$

d) $\lim_{x \to a} h(x)$ não existe sem ser +• nem -• .

3• Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = 0^+$ e que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (respectivamente -•) mostre que então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0^+$ (respectivamente +•) .

4• Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ (respectivamente -•) mostre que então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$ (respectivamente 0)

5• Mostre que todas as formas indeterminadas 0^0, $1^{\bullet}$ e $\bullet^{0}$ se podem reduzir tanto à forma $\frac{0}{0}$ como à forma $\frac{\infty}{\infty}$.

6• Mostre que

i) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x} + \cos^2 x + 3^{1-x}\right] = +\infty$

ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = 1$

iii) $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{|x|-2}\right] = +\infty$

iv) $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt[4]{x^4+6} - \sqrt[6]{x^2+10}\right] = +\infty$

v) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}$

7• a) Mostre que para todo o A real positivo e para todo o número natural n

$$\lim_{x\to 0^+} (Ax)^{x^n} = 1$$

b) Parece poder concluir-se da alínea anterior e de outros exercícios semelhantes que a forma indeterminada (0^0) conduz sempre ao resultado 1. Verifique que tal conjectura é falsa, provando que:

i) $\lim_{x\to 0^+} x^{-R/\log x} = e^{-R}$ ii) $\lim_{x\to 0^+} x^{-R/\sqrt{-\log x}} = +\infty$

onde R é um número real positivo.

8• Calcule os limites seguintes, utilizando o teorema do limite de uma função composta:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} \right)^{1/x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\operatorname{sen}\left(\pi \dfrac{x+1}{4x+5} \right) \right)^{1/\log(-\log x)}$ c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{\operatorname{tg}(\pi x/2)}{x} \right]^{1/x}$

9• Sejam f e g duas funções definidas no intervalo]x_0-´,x_0+´[, com ´ dado. Sabemos que se f e g são contínuas em x_0 então fg é contínua em x_0. A implicação

$$\text{fg descontínua em } x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{f descontínua em } x_0 \\ \text{ou} \\ \text{g descontínua em } x_0 \end{cases}$$

será verdadeira? Porquê?

10• a) Seja F a função definida no intervalo [0,1] por

$$F(x) = \begin{cases} 6x^2 + x + 1 & se \;\; x \in [0, 1/6[\\ \dfrac{6x+3}{2x+5} & se \;\; x \in [1/6, 1] \end{cases}$$

Estude a continuidade de F em 1/6.

b) Sejam G e H as funções definidas no intervalo [0,1] por

$$G(x) = \cos(3 \cdot x)$$
$$H(x) = \cos(4 \cdot x)$$

Estude a continuidade das funções produto FG e FH no ponto 1/6.

c) A implicação

$$\text{fg contínua em } x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{f contínua em } x_0 \\ \text{e} \\ \text{g contínua em } x_0 \end{cases}$$

é verdadeira quaisquer que sejam as funções f e g definidas num intervalo]x_0-´,x_0+´[, com ´ dado?

d) Mesma questão para a implicação

$$\text{fg contínua em } x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{f contínua em } x_0 \\ \text{ou} \\ \text{g contínua em } x_0 \end{cases}$$

11• Das seguintes afirmações indique quais são verdadeiras e falsas, e neste último caso explique porquê (se for falsa em vez de dar uma justificação detalhada, poderá indicar um contra-exemplo):

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} = \dfrac{\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sen} t}{\lim\limits_{t\to 0}(1-\cos t)}$ c) $-1 \le \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \le 1$

d) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe então $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$ também não existe;

e) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não existe então $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$ também não existe;

f) Se $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então f > g ;

g) Se $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)] = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$;

h) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\times g(x)] = +\infty$;

i) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = +\infty$.

12• a) Prove que

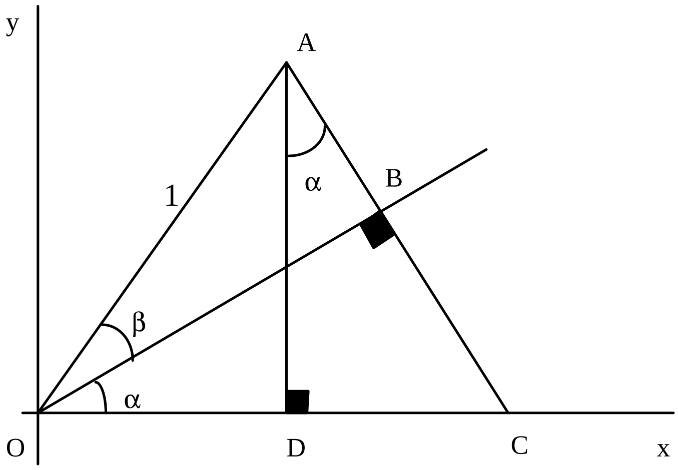
$$\cos[(n+1)\theta] = 2\cos\theta\cos[n\theta] - \cos[(n-1)\theta]$$

b) Deduza da igualdade anterior que existe um polinómio $p(x)$, de primeiro coeficiente igual a 1, tal que

$$2\cos[n\theta] = p(2\cos\theta)$$

c) Prove que, se $\cos[n\theta]$ é um inteiro então $\cos\theta$ ou é igual a 0, ±1/2 ou ±1 ou então é necessariamente <u>irracional</u>.

13• Considere a figura



a) Prove que

$$\overline{AB} = \operatorname{sen}\beta$$

$$\overline{OB} = \cos\beta$$

$$\overline{AD} = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\overline{BC} = \cos\beta \tan\alpha$$

b) Usando a alínea anterior deduza que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

a partir do cálculo de $\cos(\angle DAC)$.

14• a) Prove que, qualquer que seja ε positivo, existe

$$\alpha = \operatorname{arcsen}\varepsilon$$

tal que

$$|x| < \alpha \Rightarrow |\operatorname{sen} x| < \varepsilon$$

b) Que pode concluir da alínea anterior?