« Tal como a tecnologia requer as técnicas da matemática aplicada, também a matemática aplicada requer as teorias do núcleo central da matemática pura. Da lógica matemática à topologia algébrica, da teoria de números à análise harmónica, as estruturas abstractas da matemática pura são usadas extensamente pelos matemáticos aplicados contemporâneos. Poucos especialistas de matemática pura são imunes às solicitações das aplicações. Os problemas e as conjecturas enraizadas na ciência e na tecnologia criam áreas teóricas em acelerado crescimento que se tornam rapidamente quase impenetráveis. Através da paisagem da matemática contemporânea novas espécies se criam com crescimento antigo, criando recursos vivos variados e vigorosos para a resolução de problemas e a compreensão da estrutura. »

[in "**A Matemática hoje**", **Lynn Arthur Steen** (1978)]

X.0 Sucessões de números reais[1]

Uma **sucessão** de números reais é uma aplicação de N em R. Pode assim representar-se por

$$\begin{aligned} u:\ N &\longmapsto R \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

[1] Este parágrafo foi escrito em colaboração com o Dr. Manuel Rolão Candeias.

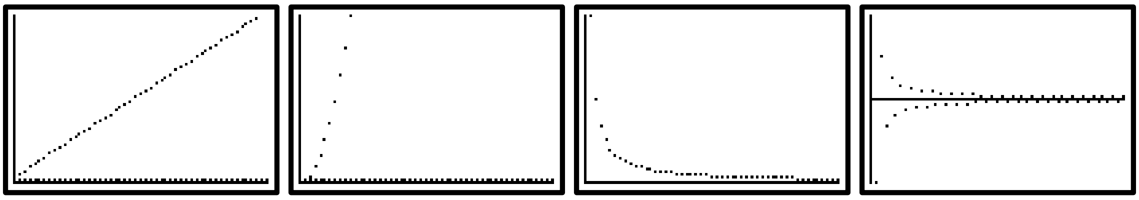
Usualmente representa-se u(n) por u_n e a sucessão designa-se simplesmente por (u_n). Os elementos do contradomínio chama-se **termos** da sucessão; u_n é o termo de ordem n ou termo de índice n e diz-se **termo geral** ou termo gerador da sucessão.

Alguns exemplos são:

$$u: \begin{array}{rcl} N & \longmapsto & R \\ n & \longmapsto & 2n+3 \end{array} \qquad u: \begin{array}{rcl} N & \longmapsto & R \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array}$$

$$u: \begin{array}{rcl} N & \longmapsto & R \\ n & \longmapsto & \dfrac{1}{n} \end{array} \qquad u: \begin{array}{rcl} N & \longmapsto & R \\ n & \longmapsto & (-1)^n \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Podemos representá-las graficamente num referencial ortogonal dimétrico:



$2n+3$ $\qquad$ n^2 $\qquad$ $\dfrac{1}{n}$ $\qquad$ $(-1)^n \dfrac{1}{n}$

No primeiro exemplo apresentado a expressão designatória “2n+3” é o termo geral da sucessão ou termo gerador pois para cada concretização da variável n no universo N obtém-se um termo da sucessão. Assim, sendo, por exemplo, n = 1, obtém-se o primeiro termo $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$; sendo n = 2, obtém-se o segundo termo $u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$. Continuando este processo obtemos os sucessivos termos da sucessão

$$5, 7, 9, 11, 13, \ldots, 2n + 3, \ldots$$

Importa fazer a distinção entre a sucessão (aplicação de domínio N) e o conjunto dos seus termos (contradomínio da aplicação). A notação $\{u_n\}$ designará o contradomínio de (u_n), e representa assim o conjunto dos termos da sucessão (u_n).

Diremos que uma sucessão é **crescente** se e só se, para todo o índice n, u_n for inferior ou igual a u_{n+1}. Ou seja, os termos de (u_n) crescem com os índices. Simbolicamente

$$\underset{n \in \mathrm{N}}{\forall} \quad u_n \leq u_{n+1}$$

Uma sucessão é **decrescente** se e só se, para todo o índice n, u_n será superior ou igual a u_{n+1}. Ou seja, os termos de (u_n) decrescem com os índices. Simbolicamente

$$\underset{n \in \mathrm{N}}{\forall} \quad u_n \geq u_{n+1}$$

Diremos que a sucessão é **estritamente crescente** ou **estritamente decrescente** quando a desigualdade lata for substituída pela desigualdades estrita[1]. As sucessões crescentes ou decrescentes dizem-se **monótonas** e as estritamente crescentes ou estritamente decrescentes dizem-se **estritamente monótonas**.

Diremos que a sucessão é **limitada** se e só se o seu contradomínio está contido nalgum intervalo de extremidades reais, isto é, se existem números reais A e B tais que

$$\{u_n\} \subset [A, B]$$

É fácil ver que esta definição é equivalente a dizer que existe um número real M

[1] Alguns autores dizem crescente em sentido lato onde nós dizemos crescente, e dizem crescente quando nós dizemos estritamente crescente.

tal que $|u_n| \leq M$ para todo o índice n. É indiferente usar intervalos abertos ou fechados (e portanto usar $|u_n| \leq M$ ou $|u_n| < M$).

Dos quatro exemplos antes apresentados, os dois primeiros não são sucessões limitadas e os dois últimos são sucessões limitadas.

Dizemos que uma sucessão (u_n) de números reais **converge** (ou tende) para um número real L (que se diz **limite** da sucessão) e se e só se qualquer que seja o número real (ε), existir uma ordem p depois da qual a distância entre qualquer termo da sucessão e L é menor do que ε, isto é,

$$\underset{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}{\forall} \quad \underset{p \in \mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad n > p \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$$

Ou seja, o número real L é limite da sucessão (u_n) se os termos da sucessão se forem aproximando de L tanto quanto se arbitrar previamente, ou ainda, se para todo o número real previamente escolhido (ε) existir uma altura na sucessão (uma ordem p) a partir da qual todos os termos u_n estão próximos de L a menos de ε.[1]

É fácil ver que uma sucessão cujo termo geral seja constante é convergente e o limite é a própria constante. Dos quatro exemplos antes apresentados, os dois primeiros não são sucessões convergentes e os dois últimos são relativos a sucessões convergentes para zero.

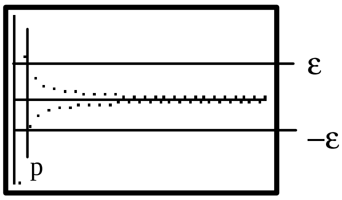
Uma sucessão que não é convergente chama-se **divergente**. Uma sucessão que é convergente para zero chama-se um **infinitésimo**.

Como se pode ver a convergência geometricamente? Temos que $|u_n - L| < \varepsilon$ é equivalente a $L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$, pelo que, a partir da ordem p, todos os termos estão entre as rectas y = L - ε e y = L + ε.

---

[1] a expressão "todos os termos u_n estão próximos de L a menos de ε" significa o mesmo que "a distância entre qualquer termo da sucessão e L é menor do que ε".

No caso da sucessão de termo geral $(-1)^n \frac{1}{n}$



qualquer seja o ε escolhido existirá sempre uma ordem p a partir da qual todos os termos estão entre as rectas $y = -\varepsilon$ e $y = \varepsilon$.

Tal como na definição de sucessão limitada também na definição de sucessão convergente é indiferente escrever < ou ≤ [1].

O limite de uma sucessão convergente será único?

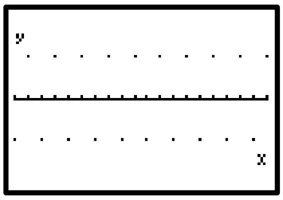
Intuitivamente, para que dois números reais L e M pudessem ser limites da sucessão (u_n) era preciso que os termos da sucessão se fossem aproximando tanto de L como de M tanto quanto se arbitrasse previamente; ora se se arbitrasse uma quantidade inferior a metade da distância de L a M, nunca os termos da sucessão poderiam estar a uma distância tanto de L como de M inferior a $\frac{L+M}{2}$. Logo só pode ser L igual a M. Temos assim provado o teorema:

Teorema X.0.1 (da unicidade do limite)
O limite de uma sucessão convergente é único.

Note-se que uma sucessão ser limitada não significa que tenha limite. Um exemplo é a sucessão $((-1)^n)$.

---

[1] em particular a “ordem” p a partir da qual se verifica a desigualdade com os termos da sucessão pode ser logo incluída (ou seja podemos dizer que a desigualdade se verifica para $n \geq p$).



$(-1)^n$

Basta olhar para o gráfico para perceber que nenhum número real L pode ser limite da sucessão ($(-1)^n$) pois para isso era preciso que os termos da sucessão se fossem aproximando de L tanto quanto se arbitrasse previamente e isso não se verifica com L=1, L=-1 ou com qualquer outro número real.

Por outro lado a sucessão é limitada pois $\{(-1)^n\} \subset [-1,1]$.

Observamos assim que ($(-1)^n$) é uma sucessão <u>limitada</u> e divergente, isto é, <u>sem limite</u>.

Uma sucessão que tem uma infinidade de termos que se aproxima de dois ou mais valores diz-se **oscilante**.

Contudo, uma sucessão convergente é obrigatoriamente limitada.

Teorema X.0.2

Toda a sucessão convergente é limitada.

Com efeito, supondo que o número real *L* é o limite da sucessão (u_n), então qualquer que seja o número real ε, existe uma ordem *p* depois da qual a distância entre qualquer termo da sucessão (u_n) e *L* é menor do que ε. Fixemos então o ε que nos aprouver; fixado esse ε existe assim uma certa ordem *p* tal que todos os termos da sucessão verificam

$$L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$$

para n superior a p; ou seja, a partir de $n = p+1$, os termos da sucessão estão todos no intervalo $[L - \mathrm{e}, L + \mathrm{e}]$

$$\{u_n | n > p\} \subset [L - \mathrm{e}, L + \mathrm{e}]$$

Podemos então dizer que todos os termos estão contidos no intervalo anterior reunido com o conjunto dos primeiros termos

$$\{u_n\} \subset [L - \mathrm{e}, L + \mathrm{e}] \cup \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{p-1}, u_p\}$$

e assim, se A e B forem tais que

$$A = \min\{L - \mathrm{e}, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{p-1}, u_p\}$$
$$B = \max\{L + \mathrm{e}, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{p-1}, u_p\}$$

podemos dizer que

$$\{u_n\} \subset [A, B]$$

e concluímos que a sucessão (u_n) é limitada.

c.q.d.

Dada uma sucessão (u_n) chamaremos **subsucessão** de (u_n) a qualquer sucessão (v_n) que resulte da primeira por supressão de termos. É evidente que se uma sucessão (u_n) converge para L então qualquer subsucessão (v_n) também converge para L.

Por exemplo: são subsucessões de (u_n) as sucessões $(u_1,u_3,u_5,u_7,\ldots,u_{2n-1},u_{2n+1},\ldots)$, $(u_1,u_2,u_5,u_6,\ldots,u_{2n-1},u_{2n},u_{2n-3},u_{2n+4},\ldots)$, ou $(u_2,u_4,u_6,u_8,\ldots,u_{2n-2},u_{2n},\ldots)$, . As subsucessões que é mais comum utilizar são a primeira e a terceira, que é costume designar por (u_{2n-1}) e (u_{2n}), respectivamente.

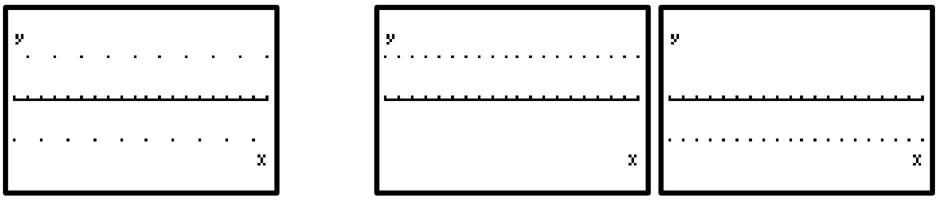
A relação entre as sucessões e as subsucessões permite esclarecer muitas situações. Algumas dessas situações são evidentes nas seguintes propriedades:

$\boxed{a}$ Dada uma sucessão (u_n) se dela for possível obter duas subsucessões convergentes para números reais diferentes, então (u_n) é divergente.

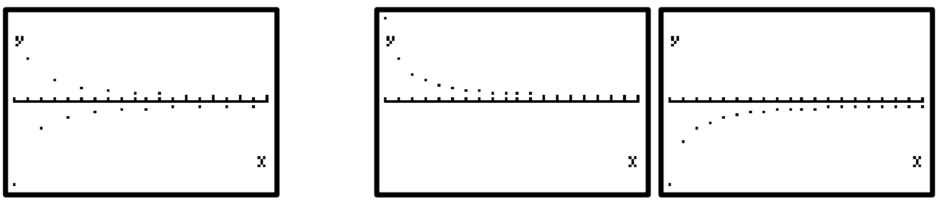
$\boxed{b}$ Se a sucessão (u_{2n-1}) converge para L e a sucessão (u_{2n}) converge para L então a sucessão (u_n) converge para L.

<u>Exemplo X.0.1</u>

A sucessão (u_n) = ($(-1)^n$) é divergente pois as subsucessões (u_{2n}) = (1) e (u_{2n-1}) = (-1) são convergentes para limites diferentes.



A sucessão (u_n) = ($(-1)^n \frac{1}{n}$) é divergente pois as subsucessões (u_{2n}) = ($\frac{1}{n}$) e (u_{2n-1}) = ($-\frac{1}{n}$) são convergentes para o mesmo limite L = 0.



Vejamos outras propriedades das sucessões de números reais.

Teorema X.0.3 (do sanduíche ou das sucessões enquadradas)

Se (u_n) e (u_n) são sucessões convergentes para o mesmo número real L e são tais que, a partir de certa ordem p,

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

então a sucessão (w_n) também converge para L.

Teorema X.0.4 (da convergência das sucessões monótonas)

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Observe-se que uma sucessão crescente e limitada é convergente para o supremo do conjunto dos termos da sucessão (ou seja, convergente para o menor dos majorantes dos termos da sucessão)[1].

Como uma sucessão é uma função, as propriedades do teorema II.0.3 são ainda válidas para limites de sucessões[2].

Teorema X.0.5

Suponhamos que (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes.

Se p e q forem números reais quaisquer, então

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[pu_n + qv_n\right] = p\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + q\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[u_n \times v_n\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Se s for um número real positivo e $u_n > 0$, então

[1] E uma sucessão decrescente e limitada é convergente para o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão (ou seja, convergente para o maior dos minorantes dos termos da sucessão).

[2] Partimos do princípio que as propriedades dos limites de funções foram provadas usando a definição de limite de função segundo Cauchy. Também se podem primeiro provar para sucessões e depois fazer a extensão para as funções através da definição de limite segundo Heine.

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[u_n^{\,s}\right]=\left[\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\right]$

Se *s* for um número real positivo, então

iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} s^{u_n} = s^{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$

Se v_n • 0 para todo o *n*, e se $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, então

v) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n}$

Se $u_n > 0$ para todo o *n* e se os dois limites não forem simultaneamente nulos, então

vi) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{\,v_n} = \left[\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right]^{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$

Se, em vi), os dois limites forem simultaneamente nulos, nada se pode dizer a priori sobre o comportamento do limite. Neste caso dizemos que estamos em presença de uma **indeterminação** porque, dependendo das sucessões particulares (u_n) e (v_n) envolvidas, assim obteremos diferentes valores para o limite. No caso presente, diz-se que se trata de uma **indeterminação do tipo 0^0**. Essa indeterminação desaparecerá quando for possível determinar o valor do limite (quando exista) por outros meios.

$\longleftrightarrow$

Vejamos algumas propriedades dos infinitésimos.

Teorema X.0.6

Se uma sucessão (u_n) converge para L então a sucessão (w_n), definida por $w_n = u_n - L$, é um infinitésimo.

Basta observar que a definição de "(u_n) converge para L" e a definição de "(w_n) converge para 0" são iguais.

Do Teorema X.0.5 decorre que a soma e o produto de dois infinitésimos é ainda um infinitésimo e que o produto de um infinitésimo por uma constante é ainda um infinitésimo.

Teorema X.0.7

Se a sucessão (u_n) é um infinitésimo e se a sucessão (w_n) é limitada então a sucessão (t_n), definida por $t_n = u_n\, w_n$, é um infinitésimo.

Se (u_n) é um infinitésimo, então qualquer que seja o número real ε, existe uma ordem *p* depois da qual temos

$$|u_n| < e$$

Se (w_n) é limitada, então existe um número real M tal que

$$|w_n| < M$$

Sendo assim podemos dizer que qualquer que seja o número real ε, existe uma ordem *p* depois da qual temos

$$|u_n\, w_n| < e\,M$$

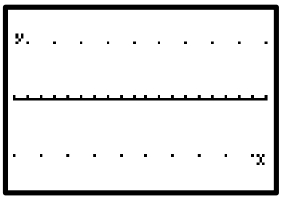
isto é

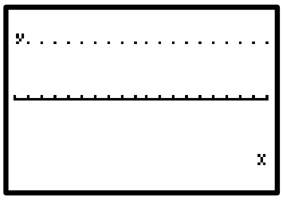
$$|t_n| < e\,M$$

Como εM é também um número real positivo qualquer o teorema X.0.7 fica demonstrado.

$\longleftrightarrow$

É fácil ver que se (u_n) converge para L então ($|u_n|$) converge para $|L|$. Contudo, o contrário pode não ser verdadeiro quando $L \neq 0$. Por exemplo





(u_n) não é convergente ($|u_n|$) é convergente

Se L = 0 vale o seguinte teorema:

Teorema X.0.8 (critério da majoração)

Se uma sucessão (u_n) converge para 0 (é um **i**nfinitésimo) e se (v_n) é uma sucessão tal que, a partir de uma certa ordem p,

$$|v_n| \leq |u_n|$$

então a sucessão (v_n) também converge para 0.

Uma consequência imediata deste critério é que uma sucessão converge para zero se e somente se o seu módulo converge para zero. Como vimos esta conclusão não é válida para uma sucessão que convirja para um valor diferente de zero.

$\longleftrightarrow$

Teorema X.0.9

Se uma sucessão (u_n) converge para L e $L \neq 0$, então só um número finito de termos da sucessão podem ser nulos.

Com efeito, se a sucessão tivesse uma infinidade de termos nulos, teria uma subsucessão constituída por esses termos nulos que convergiria para zero; mas se a sucessão (u_n) converge para L então qualquer subsucessão (v_n) também converge para L e só poderia ser L = 0 o que não se verifica por hipótese.

Pode-se ir ainda mais longe na relação entre o sinal dos termos de uma sucessão e o sinal do limite:

Teorema X.0.10 (da permanência de sinal)

Se uma sucessão (u_n) converge para L e $L \neq 0$, então existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são todos do mesmo sinal do limite (todos positivos se L > 0 e todos negativos se L < 0).

Este teorema é consequência imediata de

Teorema X.0.11 (da permanência de sinal)

Se uma sucessão (u_n) converge para L e $L \neq 0$, então existe uma ordem a partir da qual se tem

$$u_n > \frac{L}{2} \quad \text{no caso em que } L > 0$$
$$u_n < \frac{L}{2} \quad \text{no caso em que } L < 0$$

Da definição de sucessão convergente para L concluímos que dado um ε positivo qualquer se tem, a partir de certa ordem,

$$|u_n - L| < \varepsilon$$

ou seja

$$-e < u_n - L < e$$

ou ainda

$$L - e < u_n < L + e$$

Como ε é qualquer podemos tomar (e já se vai ver porquê) ε = $\frac{L}{2}$. Então vem

$$L - \frac{L}{2} < u_n < L + \frac{L}{2}$$

ou seja

$$\frac{L}{2} < u_n < \frac{3L}{2}$$

No caso em que L é positivo o teorema fica então provado (porque é que no caso em que L é negativo esta desigualdade não é válida?). No caso em que L é negativo tomamos um outro ε (qual?) e obtemos facilmente a conclusão pretendida.

Teorema X.0.12

Se uma sucessão (u_n) converge para L e se a partir de uma certa ordem se tem $u_n \bullet 0$ então $L \geq 0$.

Se fosse L < 0 então, como (u_n) converge para L, pelo teorema X.0.10 teria de existir uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão seriam do mesmo sinal do limite isto é, todos negativos, o que não se verifica por hipótese; assim só poderá ser $L \geq 0$.

$$\longleftrightarrow$$

Diremos que uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande positivo** quando, para todo o número positivo L, existe uma ordem *p*, de modo para todo o *n* superior a *p* se tenha

$$u_n > L$$

isto é, qualquer que seja o número positivo L, é sempre possível encontrar uma ordem *p*, de modo que, a partir dessa ordem, se tenha

$$u_n > L$$

Simbolicamente

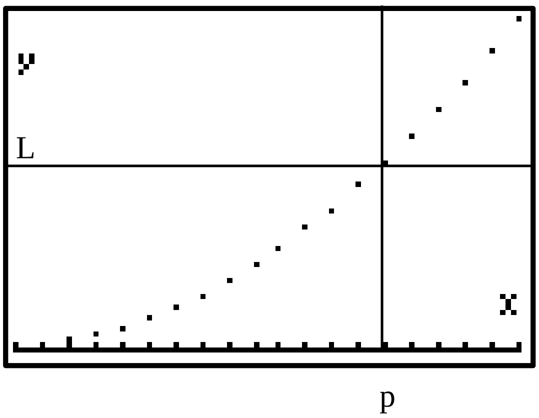
$$\underset{L\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists} : \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ n > p \Rightarrow u_n > L$$

Também se escreve

$$\lim\ u_n = +\infty$$

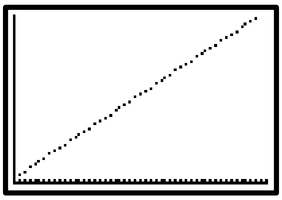
com o mesmo significado.

Geometricamente, para um infinitamente grande, dado um real L qualquer existe um ordem p tal que todos os pontos de coordenadas (n,u_n) que constituem o gráfico da sucessão (u_n) estão no canto superior direito da figura:

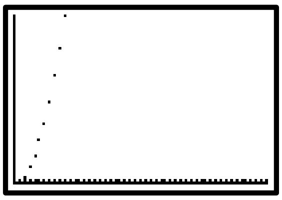


Ou seja, estão acima da recta y = L e à direita da recta x = p.

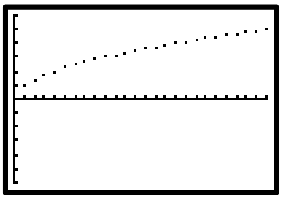
São exemplos de infinitamente grandes positivos:



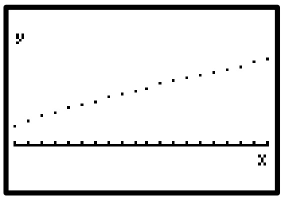
$2n+3$



n^2



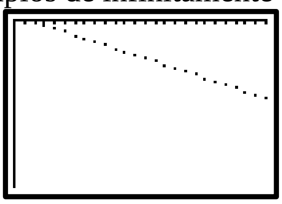
$\sqrt{n}$



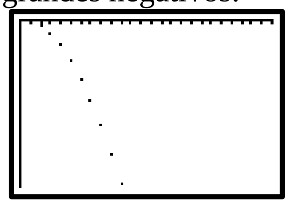
$\dfrac{n}{\ln(n+1)}$

Diremos que uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande negativo** quando a sucessão ($-u_n$) for um infinitamente grande positivo, e escreve-se $\lim\ u_n = -\infty$. Diremos que uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande em módulo** quando a sucessão ($|u_n|$) for um infinitamente grande positivo. Diremos que uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande sem sinal determinado** quando for um infinitamente grande em módulo mas não for infinitamente grande negativo nem positivo e escreve-se $\lim\ u_n = \infty$. Estas últimas sucessões são sempre oscilantes.

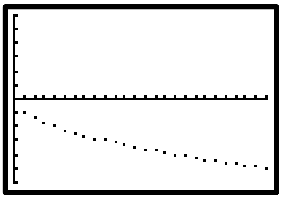
São exemplos de infinitamente grandes negativos:



$-2n+3$

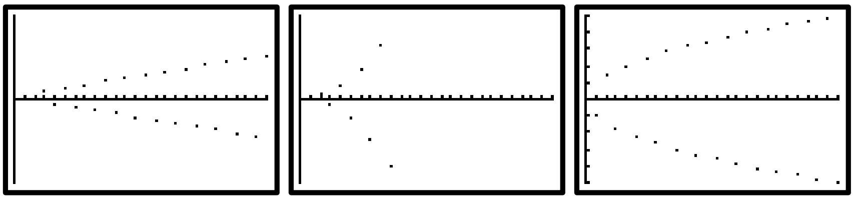


$1-n^2$



$-\sqrt{n}$

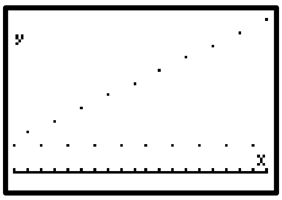
São exemplos de infinitamente grandes sem sinal determinado:



$-2(-1)^n n+3$ $\quad$ $1+(-1)^n n^2$ $\quad$ $(-1)^n \sqrt{n}$

Deve observar-se com toda a ênfase que $+\infty$, $-\infty$ e ∞ <u>não são números reais</u>. As sucessões (u_n) que são infinitamente grandes não são convergentes no conjunto dos números reais R. As notações $\lim\ u_n = +\infty$, $\lim\ u_n = -\infty$ e $\lim\ u_n = \infty$ servem apenas para dar informação adicional sobre o comportamento de certas sucessões (u_n) que são divergentes em R.

Recomenda-se que o aluno verifique quais das noções de infinitamente grande implicam as outras, assim como a sua relação com as noções de convergência, monotonia e limitação, exibindo contra-exemplos quando adequado. Por exemplo, se a sucessão (u_n) for um infinitamente grande em módulo a sucessão não é limitada, mas uma sucessão não limitada não é necessariamente um infinitamente grande de algum tipo. Estude o exemplo $\left(9+n+(-1)^n n\right)$ para constatar que assim é.



Estas sucessões são sempre oscilantes.

Os seguintes teoremas fornecem propriedades interessantes, que deverá demonstrar a título de exercício:

$\boxed{a}$ Se a sucessão (u_n) é um infinitamente grande a sucessão $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ é um infinitésimo.

$\boxed{b}$ Se a sucessão (u_n) é um infinitésimo e todos os termos forem não nulos, a sucessão $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ é um infinitamente grande em módulo; se, a partir de certa ordem, for $u_n > 0$, o infinitamente grande é positivo e se, a partir de certa ordem, for $u_n < 0$, o infinitamente grande é negativo.

$\boxed{c}$ O produto de uma constante não nula por um infinitamente grande é ainda um infinitamente grande.

$\boxed{d}$ O produto de dois infinitamente grandes é ainda um infinitamente grande.

$\boxed{e}$ A soma de dois infinitamente grandes positivos é ainda um infinitamente grande positivo.

$\boxed{f}$ A soma de dois infinitamente grandes negativos é ainda um infinitamente grande negativo[1].

$\boxed{g}$ Uma sucessão monótona crescente e não limitada tem limite $+\infty$; Uma sucessão monótona decrescente e não limitada tem limite $-\infty$.

$\boxed{h}$ Se (u_n) tende para um limite diferente de zero e (v_n) é um infinitamente grande em módulo então $(u_n v_n)$ é um infinitamente grande em módulo.

$\boxed{i}$ Se (u_n) é um infinitamente grande positivo e (v_n) é limitada inferiormente, então (u_n+v_n) é um infinitamente grande positivo.

$\boxed{j}$ Se (u_n) é um infinitamente grande positivo e (v_n) é limitada inferiormente por um número estritamente positivo[2], então $(u_n v_n)$ é um infinitamente grande

---

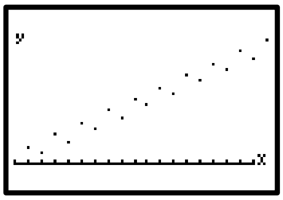
[1] A soma de dois infinitamente grandes não é necessariamente um infinitamente grande (pense num exemplo).

[2] isto é, existe um L positivo tal que, para todo o n, se tem $v_n > L$.

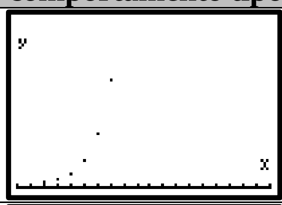
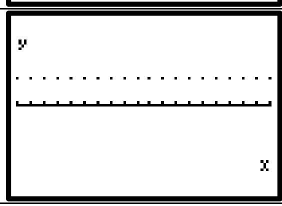
positivo.

$\boxed{l}$ Se (u_n) é um infinitamente grande negativo e (v_n) é limitada superiormente por um número estritamente negativo[1], então (u_nv_n) é um infinitamente grande positivo.

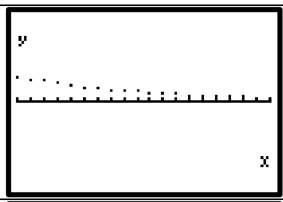
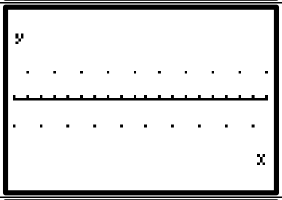
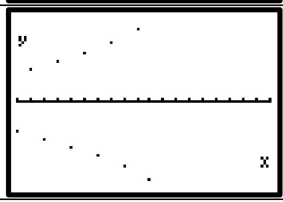
Observe-se que um infinitamente grande positivo não é necessariamente uma sucessão monótona crescente como o mostra o exemplo $\left(n+(-1)^n\right)$:



Uma sucessão particularmente importante é a **sucessão exponencial** (a^n). Temos:

Valor de a	**limite de (a^n)**	**comportamento tipo**
$a > 1$	$+\infty$	
$a = 1$	1	

[1] isto é, existe um L negativo tal que, para todo o n, se tem $v_n < L$.

-1 < a < 1	0	
a = -1	não existe , é oscilante (e não é inf. grande)	
a < -1	inf. grande sem sinal determinado	

Alguns limites notáveis são os seguintes:

Sucessão de Euler: $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

A exponencial de base superior a um cresce mais rapidamente para infinito do que qualquer potência do seu expoente:

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty, \text{ se } a > 1$$

ou, mais geralmente, se $\lim\ u_n = +\infty$,

$$\lim \frac{a^{u_n}}{(u_n)^k} = +\infty, \text{ se } a > 1$$

O logaritmo de base superior a um cresce mais lentamente para infinito do que qualquer potência positiva do seu argumento:

$$\lim \frac{\log_a n}{n^k} = 0, \text{ se } a > 1, k > 0$$

A exponencial de base superior a um cresce mais lentamente para infinito do que o factorial do seu expoente: $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\text{Se } b_0 \bullet 0,\ \lim \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n} = \begin{cases} a_0 / b_0 & \text{se } m = n \\ \infty & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

Muitos limites não podem ser calculados directamente usando estes limites básicos ou algum teorema sobre limites, por não ser possível prever a priori o resultado. Trata-se de uma situação de **indeterminação**. As principais indeterminações estão resumidas no seguinte quadro:

Caso	Se (u_n) tende para...	... e (v_n) tende para...	...nada se pode dizer, a priori, sobre:
$\infty - \infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\lim(u_n + v_n)$
$\dfrac{0}{0}$	0	0	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
$\dfrac{\infty}{\infty}$	$+\infty$ ou $-\infty$ ou ∞	$+\infty$ ou $-\infty$ ou ∞	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
$0 \times \infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ ou ∞	$\lim(u_n \times v_n)$
0^0	0^+	0	$\lim u_n^{v_n}$
∞^0	$+\infty$	0	$\lim u_n^{v_n}$
1^∞	1	$+\infty$ ou $-\infty$ ou ∞	$\lim u_n^{v_n}$

Estas indeterminação são normalmente levantadas usando manipulações algébricas; por exemplo, as três últimas indeterminações reduzem-se ao caso $0 \times \infty$ observando que

$$u_n^{v_n} = e^{v_n \log u_n}$$

Também é possível recorrer a alguns teoremas particulares, como os seguintes:

Teorema X.0.13

Se (u_n) é uma sucessão tal que

$$\lim (u_{n+1} - u_n) = a$$

então

$$\lim \frac{u_n}{n} = a$$

Teorema X.0.14

Se (u_n) é uma sucessão de termos positivos tal que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$$

então

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = a$$

Recomenda-se o uso de representações gráficas de sucessões (usando uma calculadora gráfica ou um computador) pois fornecem frequentemente imagens mentais muito sugestivas no auxílio da intuição de resultados sobre sucessões antes de os demonstrar.

É usada com certa frequência a expressão "a partir de certa ordem" ou "depois de certa ordem" ou ainda "para uma ordem suficientemente grande". Convém entender bem o que isto significa. Quando se pretende saber o que se passa "no limite", é óbvio que o que se passa "no início" não influi nada. Assim, todos os resultados sobre limites são válidos se as condições do enunciado se verificarem apenas "a partir de certa ordem".

Por exemplo, considere a sucessão de termo geral

$$\mathrm{u}_n = -n^2 + 300n + 1$$

Usando uma calculadora gráfica ou um computador trace um gráfico dos primeiros termos da sucessão (30, 50 ou 100 termos). Trace em seguida alguns termos a partir do termo de ordem 150. Que observa? O que é pode conjecturar que se passa "a partir de certa ordem"? Prove a sua conjectura!