1• Mostre, utilizando a definição, que as seguintes sucessões são limitadas:

a) $\left(\dfrac{2n}{3n+16}\right)_{n\geq 1}$ b) $\left(\dfrac{4n-50}{5n-3}\right)_{n \geq 2}$

c) $\left(\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n \dfrac{4n(-1)^n-8}{5n-3}\right)_{n \geq 2}$ d) $\left(\dfrac{100}{n}+2(-1)^n\right)_{n \geq 1}$

e) $\left(\dfrac{4n(-1)^n-8}{5n-3}\right)_{n \geq 2}$ f) $\left(\dfrac{1-n\,\mathrm{sen}(n+327)}{4n-4}\right)_{n \geq 2}$

2• Mostre, utilizando a definição, que as seguintes sucessões são limitadas superiormente mas não inferiormente:

a) $(-50n)_{n \geq 2}$ b) $\left(\dfrac{2n^2}{23-3n}\right)_{n \geq 1}$

3• Dê dois exemplos de sucessões limitadas inferiormente mas não superiormente.

4• Mostre, utilizando a definição de <u>sucessão não limitada</u>, que as seguintes sucessões são limitadas:

a) $\left(\dfrac{2}{n}\right)_{n \geq 1}$ b) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$

5• Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões que tendem para $+\infty$ e 0 respectivamente. Mostra que, escolhendo convenientemente as sucessões (u_n) e (v_n) , se

$a_n = u_n \times v_n \ , \forall\, n \in N$

podemos ter as seguintes situações:

a) $\lim a_n = +\infty$ b) $\lim a_n = -\infty$

c) $\lim a_n = 27$ d) $\lim a_n = -27$

e) (a_n) divergente sem tender nem para $+\infty$ nem para $-\infty$.

6• Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões que tendem para $+\infty$ e 0 respectivamente. Mostre que, escolhendo convenientemente as sucessões (u_n) e (v_n) , se

$$a_n = u_n^{\ v_n} \quad , \forall\, n \in N$$

podemos ter as seguintes situações:

a) $\lim a_n = +\infty$ b) $\lim a_n = 0$ c) $\lim a_n = 27$

d) (a_n) divergente sem tender nem para $+\infty$ nem para $-\infty$.

7• Mostre que se $\lim u_n = a$ então $\lim |u_n| = |a|$. O inverso é verdadeiro?

8• Considere a sucessão de números reais (x_n) de termo geral

a) $x_n = \sqrt[n]{7}$ b) $x_n = \sqrt[n]{5}$ c) $x_n = \sqrt[n]{n}$

d) $x_n = \sqrt[2n]{n}$ e) $x_n = \sqrt[n]{\ln n}$

Calculando os primeiros termos da sucessão, com o auxílio de uma calculadora, tente adivinhar a monotonia e limites de (x_n).

9• Calcule:

a) $\lim \left[\dfrac{3n^2+3n}{n-1} + \dfrac{-3n^2+n}{n+1} - \dfrac{2n-3}{n^2-1} \right]$

b) $\lim \left(\sqrt{n(n+1)} - n \right)$ c) $\lim \dfrac{\ln(3n+1)}{n}$ d) $\lim \dfrac{\ln(2n+1)}{\ln n}$

e) $\lim \sqrt[n]{\ln(n+5)}$ f) $\lim \sqrt[n]{2^{n+(-1)^n}}$ g) $\lim \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

h) $\lim \left[\dfrac{n^5+2n+3}{n+4} \operatorname{sen}\dfrac{1}{2n} \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n} \ln(1-\dfrac{5}{n}) \right]$

10• Uma porção de uma certa população de insectos das Berlengas morre todos os anos. A população do ano seguinte nasce dos ovos fertilizados pela população morta no ano anterior. O número inicialmente presente é N_0, e N_k é o número presente na geração k. O número N_m de insectos que morrem na geração k, e o número N_j de jovens que nascem, satisfazem

$$N_m = A + aN_k,\ N_j = B + bN_{k-1},$$

onde A, B são constantes, **a** é a taxa de mortalidade e **b** a taxa de natalidade.

a) Supondo que $N_m = N_j$ (o número de mortes e nascimentos é igual), deduza a **<u>equação às diferenças</u>**

$$N_k = \frac{b}{a} N_{k-1} + \overline{N}$$

onde $\overline{N} = \dfrac{B-A}{a}$.

b) Resolva a equação da alínea anterior mostrando que

$$N_k = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^k}{1-\frac{b}{a}} \overline{N} + \left(\frac{b}{a}\right)^k N_0 \ .$$

c) Na prática, b < 0, a > 0. Mostre que, para |b| < |a|,

$$\lim N_k = \frac{\overline{N}}{1-\frac{b}{a}}$$

e interprete o resultado em termos biológicos.

d) Suponha agora que $\frac{b}{a}$ = -1 (e portanto estamos no caso |b| = |a|). Verifique que o tamanho da população ou se mantém igual a $\frac{\overline{N}}{2}$ ou oscila à volta do tamanho óptimo $\frac{\overline{N}}{2}$. Explique porque é que $\lim N_k$ não existe e interprete o resultado em termos biológicos.

11• Diga se se obtém uma definição equivalente a

$$\lim a_n = 0$$

em cada um dos seguintes casos:

(a) $\forall\, \delta > 0,\ \{ n \in N : |a_n| > \delta \}$ é finito;

(b) $\forall\, \delta > 0,\ \{ n \in N : |a_n| < \delta \}$ é infinito;

(c) $\forall\, \delta > 0,\ \forall\, n_0 \in N,\ \exists\, n > n_0 : |a_n| < \delta$;

(d) $\forall\, \delta > 0,\ \exists\, k \in R : \forall\, n > k,\ |a_n| < \delta$.

12• Traduza simbolicamente as seguintes propriedades:

(a) A sucessão (a_n) não converge para $a \in R$;

(b) A sucessão (a_n) não tende para $+\infty$;

(c) A sucessão (a_n) não é crescente.

13• Demonstre, utilizando a definição, que:

a) $\lim \dfrac{2n-7}{\pi - n} = -2$ b) $\lim \dfrac{2\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}+1} = 2$

14• Considere a sucessão de termo geral x_n = sen n; Calculando os primeiros termos da sucessão, com o auxílio de uma calculadora, tente adivinhar as propriedades de (x_n).

15• Mostre que **a sucessão (sen n) é divergente** através dos seguintes passos:

a) Supondo que é convergente, mostre que então deverá ter-se

$$\lim \big(\text{sen}(n+2) - \text{sen } n\big) = 0$$

b) Conclua da alínea anterior que

$$\lim \big(\cos (n+1)\big) = 0$$

c) Conclua da alínea anterior que

$\lim (\text{sen } n) = 0$

d) Conclua da alínea b) que

$\lim (\cos n) = 0$

e) Conclua que se chegou a um absurdo ao supor que (sen n) era convergente, e portanto que a sucessão (sen n) só pode ser divergente.

16• Mostre que a sucessão (u_n) é convergente para **a** se e só se existe uma sucessão (a_n) convergente para zero tal que

$$u_n = a + a_n$$

17• Mostre, utilizando a definição, que a sucessão $(n - n^2)_{n \geq 1}$ tende para $-\infty$.

18• Mostre que, se a sucessão de termo geral u_n tende para $-\infty$ e se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > n_0 \Rightarrow u_n \geq v_n$$

então a sucessão de termo geral v_n tende para $-\infty$.

19• Mostre, utilizando a definição, que a sucessão $\left(\frac{2}{n}\right)_{n \geq 1}$ não converge para:

a) 1 b) -3

20• Mostre que a sucessão de números reais (a_n) de termo geral

a) $\dfrac{3n+8}{n}$ b) $\dfrac{6n^2+20n-3}{2n^2-1}$ c) $-7\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^3$

satisfaz

i) $\lim a_n \geq 3$ ii) 3 iii) $\lim a_n \leq -7$

respectivamente, <u>sem calcular o limite</u>.

21• Demonstre o **<u>critério da majoração</u>**:

" Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões tais que

i) $\lim b_n = 0$

ii) $|a_n| \leq b_n$,

Então $\lim a_n = 0$. "

22• Aplique o critério da majoração à determinação do limite da sucessão de termo geral

$$a_n = \frac{2n\cos\theta + (-1)^{n+1}}{n^2+1}$$

em que θ é um valor arbitrário do intervalo $[0, \pi]$.

23• Seja (u_n) uma sucessão tal que

$$|u_n| \geq |u_{n+1}|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que (u_n^2) é convergente.

24• Justifique porque é que os símbolos seguintes **não** representam indeterminações:

a) $\infty \times \infty$ b) ∞^{∞} c) 0^{∞} d) $\frac{\infty}{0}$ e) $\frac{0}{\infty}$

25• Estude quanto à limitação, monotonia e convergência as sucessões de termo geral

a) $u_n = \begin{cases} \dfrac{1-n}{n} & \text{se n é par} \\ \dfrac{2}{n} & \text{se n é ímpar} \end{cases}$ b) $u_n = \begin{cases} \dfrac{\ln n}{n} & \text{se n é par} \\ \dfrac{2n+1}{(n+1)^2} & \text{se n é ímpar} \end{cases}$

26• A sucessão de números reais (x_n) é definida por recorrência: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}$. Calculando os primeiros termos da sucessão, com o auxílio de uma calculadora, tente adivinhar as propriedades de (x_n).

27• Considere as sucessões de números reais (x_n) definidas por recorrência:

a)	$x_1 = \sqrt{a}$	$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$	(para $a > 1$)
b)	$x_1 = \sqrt{a}$	$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$	(para $a < 1$)
c)	$x_1 = a < 1$ $(a > 0)$	$x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n + 1$	
d)	$x_1 = a < 1$ $(a > 0)$	$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$	

(sugestão: $x_n < 1$)

Mostre que são convergentes, utilizando o critério de convergência das sucessões monótonas, e determine o seu limite.

28• Mostre que uma sucessão (x_n) não possui qualquer subsucessão convergente se e só se $\lim|x_n| = +\infty$.

29• **PROBLEMA EM ABERTO**. Considere a sucessão de primeiro termo u_1 qualquer e de termo geral definido por recorrência por meio de

$$u_{n+1} = \begin{cases} 3u_n + 1 & \text{se } u_n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{1}{2}u_n & \text{se } u_n \text{ é par} \end{cases}$$

Usando uma calculadora ou um computador observe se se chega sempre à sucessão 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... Não se sabe ainda se isto acontece sempre (ninguém ainda conseguiu demonstrar se é verdadeiro ou falso, ou até encontrar um contra-exemplo (se você conseguir encontrar um contra-exemplo até poderá ficar famoso, mas olhe que os números baixos já foram todos experimentados...).

30• Seja (u_n) uma sucessão tal que

$$\lim |u_n| = +\infty .$$

Determine que condições deve satisfazer a sucessão (v_n) de modo que se tenha obrigatoriamente

$$\lim |u_n v_n| = +\infty .$$

31• Seja (u_n) uma sucessão tal que

$$\lim u_n = +\infty .$$

Determine que condições deve satisfazer a sucessão (v_n) de modo que se tenha obrigatoriamente

$$\lim (u_n + v_n) = +\infty .$$

32• Das seguintes afirmações indique quais são verdadeiras:

a) Nenhuma sucessão divergente é limitada;
b) Nenhuma sucessão monótona é limitada;
c) Se $\lim |u_n| = |a|$ então $\lim u_n = a$;
d) Nenhuma sucessão limitada é divergente;
e) Nenhuma sucessão limitada superiormente é divergente;
f) Nenhuma sucessão limitada superiormente é limitada inferiormente;
g) Nenhuma sucessão limitada inferiormente é limitada superiormente;
h) Nenhuma sucessão limitada é limitada superiormente;
i) Se $\lim |u_n| = +\infty$ então (u_n) não é limitada ;
j) Se (u_n) não é limitada então $\lim |u_n| = +\infty$;
l) Se $\lim u_n = +\infty$ então (u_n) é crescente a partir de certa ordem;

m) Se lim $u_n = -\infty$ então (u_n) tem todos os termos negativos a partir de certa ordem;

n) Uma sucessão limitada superiormente não tem subsucessões divergentes;

o) Uma sucessão limitada inferiormente tem subsucessões divergentes;

p) Se lim $u_n = -\infty$ então (u_n) não tem nenhuma subsucessão convergente;

q) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n} = 1$;

r) $-1 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{sen} n \leq 1$;

s) $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} |\cos n| \leq 1$;

Soluções dos exercícios

3• Por exemplo (n) e (n^2)

5• Por exemplo: a) $u_n = n^2$ e $v_n = 1/n$ b) $u_n = -n^2$ e $v_n = 1/n$ c) $u_n = 27n$ e $v_n = 1/n$ d) $u_n = -27n$ e $v_n = 1/n$ e) $u_n = 27n$ e $v_n = (-1)^n/n$

6• Por exemplo: a) $u_n = e^n$ e $v_n = 1/\sqrt{n}$ b) $u_n = e^n$ e $v_n = 1/n^2$ c) $u_n = e^n$ e $v_n = (\ln 27)/n$ d) $u_n = e^n$ e $v_n = (-1)^n/n$

7• Não, basta tomar, por exemplo, $u_n = 1 + 1/n$ e $a = -1$.

8• a) Parece ser decrescente e de limite 1. b) Parece ser decrescente e de limite 1. c) Parece ser decrescente a partir de $n = 3$ e de limite 1. d) Parece ser decrescente a partir de $n = 3$ e de limite 1. e) é crescente até $n = 24$ e depois começa a decrescer lentamente, não sendo possível retirar mais conclusões da experimentação numérica.

9• a) 10 b) $+\infty$ c) 0 d) 1 e) 1 f) 2 g) 1/3 h) $-5\pi^2/8$

11• a) V b) F c) F d) V

12• a) $\underset{\varepsilon}{\exists}\underset{p}{\forall}\underset{n}{\exists}\left(n > p \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon\right)$ b) $\underset{L}{\exists}\underset{p}{\forall}\underset{n}{\exists}\left(n > p \wedge a_n \leq L\right)$ c) $\underset{n}{\exists}\left(a_n > a_{n+1}\right)$

14• Apenas se consegue ver uma nuvem "exótica" de pontos, nada se podendo concluir (o que nos leva a desconfiar que será divergente).

22• 0

24• a) Pela propriedade $\boxed{\text{d}}$ o produto de dois infinitamente grandes é ainda um infinitamente grande, pelo que o limite representado por $\infty \times \infty$ não é uma indeterminação, é um infinitamente grande.

b) Se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = +\infty$ então $\lim u_n^{v_n} = +\infty$ como é fácil provar; outros casos são tratados de modo semelhante excepto quando se tratar de infinitamente grandes sem sinal determinado.

c) Se $\lim u_n = 0$ e $\lim v_n = +\infty$ então $\lim u_n^{v_n} = 0$ como é fácil provar; outros casos são tratados de modo semelhante excepto quando se tratar de infinitamente grandes sem sinal determinado.

d) temos sempre $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$, $-\infty$ ou ∞, conforme o sinal do quociente.

e) temos sempre $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

25• a) limitada, não monótona, divergente.

b) limitada, não monótona, convergente.

26• Parece ser crescente e convergir rapidamente para 2,791287847....

27• a) $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ c) 3/2 d) 1

30• (v_n) deve ser uma sucessão tal que

$$\underset{\delta \in \mathbb{R}^+}{\exists} \quad \underset{p \in \mathbb{N}}{\exists} : \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; n > p \Rightarrow |v_n| > \delta \; .$$

31• (v_n) deve ser uma sucessão tal que

$$\underset{\delta \in \mathbb{R}^+}{\exists} : \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; v_n > -\delta \; .$$

32• Verdadeiras: i), m), p) (Sugestão: encontre contra-exemplos para as restantes alíneas, excepto para q), r) e s) onde deverá argumentar directamente)