José Anastácio da Cunha
Um Matemático a Recordar, 200 Anos Depois[1]

João Filipe Queiró
Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, n.º 29, Setembro 1994, 1-18

Entre 1782 e 1790, foi publicado em Portugal um tratado de Matemática em que aparecem, com precisão e rigor extraordinários, alguns importantes conceitos e resultados geralmente atribuídos a matemáticos do século XIX, nomeadamente Augustin-Louis Cauchy. O papel deste último na fundamentação rigorosa da Análise não pode, evidentemente, ser negado, até pela influência que teve. Mas não é descabido prestar alguma atenção à referida obra, que ainda hoje permanece em relativa obscuridade.

O seu autor, José Anastácio da Cunha, morreu em Lisboa em 1 de Janeiro de 1787, com 42 anos. Era, na altura, professor de matemática na Real Casa Pia de Lisboa, uma escola recentemente fundada para crianças pobres. Morreu cheio de amargura, profissionalmente frustrado, depois de uma vida marcada por episódios dramáticos. Deixo aqui um esboço da sua biografia.

Nascido em Lisboa em 11 de Maio de 1744, de pais humildes, Cunha foi educado pelos padres da Congregação do Oratório na Casa das Necessidades (onde hoje está instalado o Ministério dos Negócios Estrangeiros). Aí se desenvolvia uma notável e inovadora acção pedagógica, por lá tendo passado vultos dos mais ilustres da cultura setecentista portuguesa, como os padres Joaquim de Fóios e Teodoro de Almeida, ambos professores de Anastácio da Cunha. Este declarou, anos mais tarde, que "estudou Gramática, Retórica e Lógica" nessa Casa "e Física e Matemática por sua curiosidade e sem mestre" [16].

Em 1762, perto do fim da Guerra dos Sete Anos, a Espanha e a França aliadas invadiram Portugal, seguindo-se um breve conflito. Mais ou menos por essa época, Cunha aceitou um lugar de tenente no Regimento de Artilharia do Porto, aquartelado em Valença do Minho.

Estava então encarregado da reorganização do Exército Português o Conde alemão de Schaumburg-Lippe, a quem foi dado o posto de marechal-general. Com ele se passou um incidente que viria a provocar uma mudança decisiva na vida de Anastácio da Cunha. Escreveu este, muitos anos mais tarde [13]:

[1]Este texto reproduz, com algumas alterações, o publicado na revista brasileira **Matemática Universitária**, nº 14, 1992, p. 15-27, que por sua vez era uma versão refundida do artigo *José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner*, publicado em **The Mathematical Intelligencer**, vol. 10, 1988, p. 38-43. O texto original foi escrito quando da passagem dos 200 anos sobre a morte de José Anastácio da Cunha. A presente publicação faz-se para assinalar o 250º aniversário do seu nascimento.

> (...) Pediu-me o capitão de mineiros do meu regimento a minha opinião sobre o que vários autores tinham publicado acerca das minas: dei-lha por escrito muito sem segunda tenção, que nem deixei em meu poder cópia. Entre outras coisas mostrei alguns erros de Mr. Dulacq, autor que o marechal tinha recomendado aos artilheiros e engenheiros, o que nem eu nem talvez pessoa alguma do meu regimento então sabia. Depois passando o marechal por Almeida, aonde eu estava, houve quem inocentemente e cuidando que me fazia um grande bem, ofereceu a minha dissertação ao conde de Lippe, que naturalmente se julgou insultado. Apesar de partir então para Buckemburg ainda duvidoso da minha inocência, deixou recomendado que se me dobrasse o soldo e me adiantassem.

O manuscrito do trabalho a que Cunha se refere só recentemente foi descoberto e publicado [7]. Por essa razão, durante algum tempo pensou-se que na origem do incidente com Lippe estivera uma interessante memória sobre balística, escrita em 1769 [8].

Portugal e o seu imenso império eram então governados com mão de ferro pelo Marquês de Pombal, ministro do Rei D. José. Um dos expoentes do despotismo iluminado europeu, Pombal tinha consolidado o seu poder eliminando grande parte da alta nobreza e combatendo a influência dos Jesuítas na sociedade portuguesa (o Papa Clemente XIV suprimiu a Ordem em 1773 em larga medida por pressão dele). Os poderes da Inquisição foram também reduzidos.

Uma das mais importantes reformas levadas a cabo pelo Marquês de Pombal foi a da Universidade de Coimbra. Os velhos estatutos foram substituídos por novos em 1772, e foram criadas duas novas faculdades: filosofia (isto é, ciências naturais) e matemática. Esta última tinha, de início, três professores. Dois, Michele Ciera e Michele Franzini, eram italianos, e tinham sido professores no Colégio Real de Nobres de Lisboa. O terceiro era português: era o padre ex-jesuíta José Monteiro da Rocha, que vivera largos anos no Brasil, na Baía, e fora um dos autores da notável parte científica dos novos estatutos da Universidade.

Em 5 de Outubro de 1773, Pombal escreve ao Reitor da Universidade, D. Francisco de Lemos, indicando o nome do Tenente de Artilharia José Anastácio da Cunha para a cadeira de Geometria. Diz Pombal [1]:

> As incomodidades, que há sete semanas me tiveram impedido, não permitiram que eu desse a Vossa Excelência completa noção do Professor José Anastácio da Cunha, que até agora serviu de Tenente na Companhia de Bombeiros do Regimento da Praça de Valença do Minho. O dito militar é tão eminente na Ciência Matemática, que tendo-o eu destinado a ir à Alemanha aperfeiçoar-se com o Marechal General, que me tinha pedido dois, ou três moços Portugueses para os fazer completos, me requereu o Tenente General Francisco Maclean, que não o mandasse, porque ele sabia mais que a maior parte dos Marechais dos Exércitos de França, de Inglaterra, e da Alemanha; e que é um daqueles homens raros, que nas Nações cultas costumam aparecer.

Anastácio da Cunha vem para Coimbra e ocupa a cátedra de Geometria (a primeira do curso) na recém-criada faculdade de Matemática.

Em 1777, morreu D. José, sucedendo-lhe sua filha, D. Maria. O Marquês de Pombal caiu imediatamente em desgraça, e os sectores sociais e políticos que ele tinha reprimido tão violentamente depressa foram reabilitados, num processo depois conhecido por "Viradeira". Ora Anastácio da Cunha tinha reputação de livre-pensador, que lhe vinha sobretudo do convívio com oficiais estrangeiros do seu regimento e também por escrever e traduzir poemas considerados inconvenientes pela Inquisição entretanto reactivada.

A sua poesia é hoje associada aos inícios do romantismo, e mereceu de autores ilustres comentários como os seguintes: "De José Anastácio da Cunha, que das matemáticas puras deu o melhor curso que há em toda a Europa, desse infeliz engenho (que talento houve já feliz em Portugal?) a quem não impediam as rectas de Euclides, nem as curvas de Arquimedes, de cultivar também as musas (...), que direi eu senão o muito que me pesa a raridade das suas poesias?" (Almeida Garrett [23]). "O esquecido José Anastácio da Cunha (poeta superior ao exageradamente apreciado e insuportável Bocage) (...) representa o primeiro lampejo da alvorada no horizonte da literatura portuguesa (...)" (Fernando Pessoa [33]). Entre os autores que Cunha traduziu (alguns dos quais pela primeira vez para português) contam-se Anacreonte, Horácio, Milton, Shakespeare, Racine, Voltaire, Pope.

Denunciado por vários antigos colegas e conhecidos, Anastácio da Cunha foi preso pela Inquisição em 1 de Julho de 1778, sob acusação de opiniões e comportamento heterodoxos. No longo processo (que foi recentemente publicado [16]), é também repetidas vezes mencionado o seu envolvimento amoroso com uma mulher de Ponte da Barca. A sentença foi lida em público num auto de fé realizado em Lisboa em 11 de Outubro do mesmo ano, e em que participaram vários outros oficiais do Regimento de Valença. Anastácio da Cunha foi condenado a três anos de reclusão (na mesma Casa das Necessidades da Congregação do Oratório em que tinha recebido a sua educação) seguidos de quatro anos de degredo em Évora. Foi também proibido de voltar a entrar em Coimbra e Valença. Em 23 de Janeiro de 1781, a seu rogo, foi-lhe perdoado o resto da pena. Foi nesta altura que foi convidado para organizar os estudos matemáticos na Casa Pia e para ser director de um dos seus colégios.

Os *Principios Mathematicos*

Na parte final do primeiro depoimento de José Anastácio da Cunha na Inquisição, prestado logo no dia da sua prisão, lê-se [16]:

> Disse [o acusado] (...) que espera merecer a misericórdia e a piedade, e ser reconciliado com a Igreja, (...) para que ainda possa chorar os seus erros e fazer deles penitência na Congregação do Oratório de Lisboa, aonde deseja

> ser recolhido, e o espera conseguir quando for restituído à sua liberdade, não só para este principal fim mas ainda para naquela casa poder ser útil ao público e ao Estado, dando à luz uma obra, que é a base de toda a Matemática, em que trabalha há doze anos com a mais assídua e incansável aplicação, e que já tinha completa ao tempo da sua prisão e só lhe faltava pôr em limpo (...).

O livro a que Anastácio da Cunha se refere, os *Principios Mathematicos* [9], começou a ser impresso por fascículos em Lisboa em 1782, para uso dos seus alunos da Casa Pia, e veio a ser publicado como um volume completo em 1790, três anos depois da morte do seu autor. (Uma versão preliminar circulou, ainda antes da prisão de Anastácio da Cunha, em Coimbra e Lisboa, com o título *Aritmética Universal*.) É esta obra que, em minha opinião, merece ser melhor conhecida.

As 302 páginas dos *Principios*, divididas em 21 "livros", ou capítulos, contêm uma parte substancial da Matemática conhecida na época, desde as primeiras noções de geometria, aritmética e álgebra até questões sofisticadas de geometria diferencial, integração, equações diferenciais e cálculo das variações. A obra consiste de uma sóbria sequência de axiomas-definições-proposições-demonstrações, com insistência no rigor em todos os raciocínios. Este tipo de exposição, também usado por Anastácio da Cunha em outros trabalhos (na introdução a [8], ele fala em "evitar (...) o tédio da prolixidade, que naturalmente detesto"), faz-nos pensar em qual seria o seu objectivo ao escrever este tratado. Cunha tinha ideias muito marcadas sobre a Matemática e a sua exposição (como veremos adiante) e criticava com frequência a falta de clareza dos textos de outros autores. O livro — ou uma versão preliminar dele — foi provavelmente usado por Cunha no seu ensino em Coimbra, e mais tarde também na Casa Pia, embora aqui ele nunca tenha passado dos primeiros capítulos.

Por iniciativa de João Manuel de Abreu, um amigo e discípulo de Anastácio da Cunha (e também sentenciado no auto de fé de 1778), foi publicada uma tradução francesa dos *Principios Mathematicos* [10] muitos anos mais tarde (Bordéus, 1811; segunda edição, Paris, 1816), mas não é fácil ter uma ideia da difusão e da influência que o livro teve, mesmo em Portugal (sobre este assunto, veja-se [20]). A tradução de Abreu é cuidadosa, embora nem sempre literal. Com excepção de alguns pontos — infelizmente importantes, como se verá —, não encontrei distorções sérias em relação à exposição original. A edição francesa inclui um interessante *Avertissement* do tradutor.

São conhecidas várias recensões de [10] na altura da sua publicação: uma, muito elogiosa, no *Moniteur Universel* de 8 de Agosto de 1811, escrita por Anastácio Joaquim Rodrigues, como J. M. Abreu amigo e discípulo de Anastácio da Cunha; outra de Johann Tobias Mayer, nos *Göttingische gelehrte Anzeigen* de 14 de Novembro de 1811; uma terceira, bastante pormenorizada, do matemático escocês J. Playfair, na *Edinburgh Review* de Novembro de 1812, em que globalmente se elogia a obra, se fazem críticas de pormenor, e se termina considerando os *Principios* inferiores ao tratado de La Caille. Tanto J. M. Abreu como A. J. Rodrigues escreveram artigos de resposta à recensão de

Playfair. Adiante terei ocasião de citar alguns destes textos (todos reproduzidos em [18]).

Em Portugal, uma rigorosa análise do Livro IX dos *Principios* (sobre séries infinitas e potências) foi levada a cabo em 1940 por J. Vicente Gonçalves, então Professor da Universidade de Coimbra [25]. Já me referirei a ela.

Nos anos 70, o historiador A. P. Youschkevitch, do Instituto de História das Ciências e das Técnicas de Moscovo, publicou dois importantes artigos sobre a obra de Anastácio da Cunha [41,42]. Nestes trabalhos ele analisa com profundidade os livros IX e XV dos *Principios Mathematicos*, localizando-os no seu contexto histórico e chamando a atenção para o notável rigor e a novidade das teorias apresentadas, incluindo os elementos básicos do cálculo diferencial e integral.

O Livro IX dos *Principios Mathematicos*

Youschkevitch discorda de Vicente Gonçalves num ponto fulcral. Vale a pena proceder a um exame desta discordância. O Livro IX dos *Principios* começa com a definição de série convergente:

> **Definição I.** Série convergente chamam os Matemáticos àquela, cujos termos são semelhantemente determinados, cada um pelo número dos termos precedentes, de sorte que sempre a série se possa continuar, e finalmente venha a ser indiferente o continuá-la ou não, por se poder desprezar sem erro notável a soma de quantos termos se quisesse ajuntar aos já escritos ou indicados: e estes últimos indicam-se escrevendo &c. depois dos primeiros dois, ou três, ou quantos se quiser: é porém necessário que os termos escritos mostrem como se poderia continuar a série, ou que isto se saiba por outra via.

Para Vicente Gonçalves, isto significa que a série

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

é convergente se existir um termo, digamos o de ordem n, a partir do qual é indiferente continuar a série ou não, porque se pode desprezar sem erro notável a soma

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$$

para qualquer p. E isto é exactamente o que nós hoje chamamos a condição necessária e suficiente de convergência de Cauchy.

Youschkevitch, que leu o artigo de Vicente Gonçalves, diz que esta interpretação, embora tentadora, lhe parece duvidosa, pois a definição pressupõe que se sabe calcular a soma de uma outra série infinita (o resto de ordem n, na nossa linguagem), e é portanto uma definição *idem per idem* [41, pp. 11-12].

O que é interessante a respeito disto é que ambos os autores têm razão! A explicação é a seguinte: Para o seu comentário, Youschkevitch serve-se da tradução francesa de J. M. Abreu, pois não teve acesso à edição original dos *Principios* [41, p. 4, nota 1]. Gonçalves só reproduz parte da definição em português (omite o trecho a partir de "e estes últimos...") . E é fácil ver que a tradução está incorrecta, com o resultado de que a versão francesa da definição é de facto circular: onde Cunha fala em "desprezar sem erro notável a soma de quantos termos se quisesse ajuntar...", Abreu diz "desprezar os outros sem erro notável".[2]

Vicente Gonçalves sustenta que o conceito de soma de uma série está implí cito na definição: se é indiferente continuar ou não a série, porque se pode desprezar sem erro notável a soma de quantos termos se quisesse ajuntar, isto acontece porque os termos já indicados dão a soma da série sem erro notável. Isto é crucial: a notação

$$u_1 + u_2 + u_3 + \&c.$$

designa sempre um número finito de termos. O sinal de igualdade entre isto e um número, a soma da série, significa: sem erro notável,[3] tendo o erro notável, o nosso ε, sido arbitrariamente fixado antes. (Também neste ponto delicado a tradução de Abreu falha e induz em erro. Escreve ele: "... designa-se a soma dos que se desprezam por um &c. colocado a seguir aos primeiros termos.")

Este tipo de atitude, que traduz uma concepção potencial de quantidades infinitas e infinitésimas, ocorre várias vezes nos *Principios*, começando logo nas primeiras definições do Livro I (de ponto, linha e superfície).

Uma análise interessante e subtil das semelhanças e diferenças entre a definição de Cunha e o critério de Cauchy é devida a Enrico Giusti, da Universidade de Florença [24]. Para este matemático e historiador, a distinção entre os dois enunciados é sobretudo de ordem filosófica, e não tem consequências operativas sobre os desenvolvimentos matemáticos subsequentes.

Para melhor nos apercebermos do alcance da definição de José Anastácio da Cunha, vejamos como ele a usa numa demonstração.

A Proposição I do Livro IX afirma que se $c < 1$ e A é arbitrário, então a série geométrica

$$A + Ac + Acc + Accc + \cdots$$

é convergente.[4] A demonstração é impecável, e infelizmente Youschkevitch, que a ana-

[2] Em carta que dele recebi em 1987, Youschkevitch confirmou que as suas críticas a Anastácio da Cunha se deveram em larga medida ao facto de, quando escreveu o seu artigo, apenas dispor da tradução francesa dos *Principios*.

[3] É o próprio Anastácio da Cunha a dizê-lo, no Livro IV, ao referir-se à escrita decimal dos números: "Assim, a expressão $\frac{4}{9} = 0,44444\,\&c.$ não significa em rigor senão que, proposto qualquer número $< \frac{4}{9}$, pode o decimal $0,44444\,\&c.$ (continuado quanto for necessário) denotar número maior que o proposto, ainda que também $< \frac{4}{9}$. Esta é a significação do sinal = em semelhantes expressões". Observe-se a limpidez disto que é afinal a definição de limite de uma sucessão.

[4] Youschkevitch afirma que Cunha, como outros matemáticos no século XVIII, muitas vezes não fazia distinção entre um número e o seu valor absoluto, o que é confirmado pelas convenções sobre números feitas no Livro VIII; seja como for, durante a demonstração $c < 1$ deve ser entendido como significando $0 < c < 1$, embora mais tarde o resultado seja suposto válido para $-1 < c < 1$.

lisa [41, pp. 12-13], é de novo induzido em erro por uma tradução incorrecta. O argumento original (em versão resumida) é assim: Seja O um número que se possa desprezar sem erro notável. Usando o que nós hoje chamamos o axioma de Eudoxo-Arquimedes (Axioma I do Livro III), Cunha mostra que na sucessão 1, $1/c$, $1/cc$, $1/ccc$, ... se pode encontrar um termo, seja ele d, maior do que $\frac{A}{O(1-c)}$. Ele faz isto representando d como 1 mais uma soma de diferenças de termos consecutivos na sucessão, e depois substituindo cada uma destas diferenças pela primeira (que é a menor). Em seguida prova que, por mais que se continue a série geométrica original a partir do termo $\frac{A}{d}$, a soma obtida será sempre menor do que $\frac{A}{d(1-c)}$,[5] ou seja, pela escolha de d, será sempre menor do que O.

Num Corolário, Anastácio da Cunha afirma que a série

$$1 + a + \frac{aa}{2} + \frac{aaa}{2 \times 3} + \frac{aaaa}{2 \times 3 \times 4} + \cdots$$

é convergente para qualquer a. Demonstra isto mediante a comparação termo a termo de uma série resto da série dada com uma série geométrica convergente. De novo, o raciocínio é feito para $a > 0$ mas, como sublinhado em [25], não há restrições na validade do resultado (o que se está de facto provando é a convergência absoluta): quando as há, Cunha explicita-as no enunciado das proposições.

Num segundo Corolário afirma-se, sem demonstração, que a série

$$a + \frac{1}{3}aaa + \frac{1}{5}aaaaa + \cdots$$

é convergente para $a < 1$ (o que, de acordo com o dito antes, deverá entender-se $-1 < a < 1$).

A seguir vem outro ponto alto deste capítulo:

> **Definição II.** Representem a e b dois números quaisquer, e seja c o número que faz $1 + c + \frac{cc}{2} + \frac{ccc}{2\times3} + \frac{cccc}{2\times3\times4} + \&c. = a$: a expressão a^b significará um número $= 1 + bc + \frac{bbcc}{2} + \frac{bbbccc}{2\times3} + \frac{bbbbcccc}{2\times3\times4} + \&c.$; (...)

Imediatamente a seguir a esta definição (que significa definir a^b por $e^{b \log a}$), Cunha demonstra, na Proposição II, que para todo o a positivo (condição explícita no enunciado) existe c satisfazendo a primeira igualdade da definição: c é dado pelo bem conhecido desenvolvimento

$$2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\,\frac{a-1}{a+1}\,\frac{a-1}{a+1}\,\frac{a-1}{a+1} + \cdots\right)$$

que, pelo Corolário 2, é convergente para $-1 < \frac{a-1}{a+1} < 1$, isto é, para $a > 0$. (Que esta série tem por soma $\log(a)$ tinha sido observado já no século XVII.)

[5] Embora a formulação de Cunha não deixe margem para dúvidas, poderíamos confirmar neste ponto que ele soma apenas um número *finito* de termos, pois no limite se teria igualdade.

Na Proposição IV demonstra-se, usando a Definição II, que, sendo a positivo e b e c quaisquer, se tem $a^b a^c = a^{b+c}$. E o Livro IX continua com a apresentação de várias propriedades das potências e logaritmos, todas demonstradas — embora com um tratamento informal das operações com séries — usando a definição de potência acima transcrita. No Livro XVI esta é ainda usada, sem mais comentários, também para expoentes complexos, ao estabelecer-se a fórmula de Euler $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Na Proposição VII do Livro IX estuda-se a série binomial, com as condições correctas de convergência. O enunciado da proposição é assim: "Denote A o termo precedente: será $(1+Q)^n = 1 + nQ + \frac{n-1}{2}AQ + \frac{n-2}{3}AQ + \frac{n-3}{4}AQ + \&c.$, contanto que, quando n não for número inteiro positivo, seja $Q < 1$."

O que encontramos neste livro é uma abordagem perfeitamente rigorosa e "moderna" das potências e logaritmos, provavelmente a primeira vez que o assunto foi correctamente apresentado desta maneira (v. [25], onde se faz a história do assunto). A fim de melhor nos apercebermos da "audácia" (para citar Gomes Teixeira [40]) do ponto de vista de Anastácio da Cunha, e das incompreensões que suscitou — mesmo três décadas mais tarde —, vale a pena transcrever algumas frases das recensões de J. T. Mayer e J. Playfair acima referidas. Lê-se na primeira:

> IX. Sobre as potências e o primeiro teorema binomial. A maneira como o autor trata estes assuntos é nova e singular. Duvidamos que venha a encontrar aplauso. O teorema tão fácil de demonstrar $a^m a^n = a^{m+n}$ ocupa aqui toda uma página, e é derivado da consideração de certas séries infinitas. Aqui temos de fazer o reparo de que o autor se afasta por completo do conceito habitual de potência, provavelmente por causa da dificuldade que os expoentes fraccionários e negativos parecem ter.

E na segunda:

> A aritmética das potências, como apresentada no livro nono, é uma das grandes peculiaridades do método do nosso autor (...). Esta definição de potência, concordar-se-á, é bem singular; e não podemos aceitar que os inconvenientes de seguir o método habitual sejam tantos que justifiquem uma inovação tão grande.

A seguir, Playfair define as potências de expoente natural e racional positivo. E continua:

> Assim, a ideia de potência na sua forma mais geral é deduzida do simples processo aritmético da multiplicação. A ideia que o nosso autor propõe em vez desta, embora se consiga, depois de muitos raciocínios, mostrar que é a mesma, é infinitamente mais complicada à partida.

E a crítica prossegue no mesmo tom. Deve notar-se que estas recensões se referem à tradução francesa dos *Principios*, e que aqui a tradução de Abreu é fiel ao original.

O trabalho de Anastácio da Cunha sobre as potências e logaritmos foi apreciado nem mais nem menos que por C. F. Gauss, que, numa carta a Bessel em 21 de Novembro de 1811, escreve [42]:

> (...) todos os paradoxos que alguns matemáticos *descobriram* nos logaritmos desaparecem sozinhos, quando não se parte da definição habitual base $^{\text{logar.}}$ = número, que no fundo só serve quando o expoente é um número inteiro, e não faz qualquer sentido quando o expoente é imaginário – mas se chama logaritmo de A a uma grandeza tal que, quando se substitui x por ela na série $1+x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x^3+$ etc., esta fica com o valor A; vejo com prazer que o português Cunha escolheu de facto esta definição – e por isso foi censurado numa má recensão das nossas *Gelehrten Anzeigen* (...).

Também Anastácio Joaquim Rodrigues e João Manuel de Abreu, nas já mencionadas respostas à recensão de Playfair, fazem sobre este ponto uma defesa vigorosa do seu mestre, em frases que impressionam pela lucidez e modernidade.

Voltando aos *Principios*, refira-se que o estudo dos logaritmos é retomado no Livro XXI, desta vez partindo-se da equação funcional $la + lb = l(ab)$.

Façamos aqui um breve comentário de ordem histórica. No século XVIII eram largamente usadas noções intuitivas de limite e de soma de uma série. Vários autores (nomeadamente d'Alembert, cuja obra Anastácio da Cunha conhecia e admirava, mas também, por exemplo, Maclaurin) deram definições razoáveis de limite, usando expressões como "aproximar-se cada vez mais [ou: tanto quanto se quiser] de uma dada quantidade" ou "continuando até ao infinito". Mas, para todos os historiadores da Matemática, ninguém até ao século XIX explicitou uma definição satisfatória de convergência de uma série arbitrária para depois trabalhar com ela de uma forma rigorosa. A intervenção decisiva, claro, foi de Cauchy, no seu *Cours d'Analyse* de 1821. Sabe-se hoje que, num opúsculo publicado em Praga em 1817 [4], Bernard Bolzano tinha, entre outras contribuições fundamentais, enunciado como condição suficiente de convergência precisamente a condição que aparece no hoje chamado critério de Bolzano-Cauchy. Adaptando ligeiramente as notações, o que Bolzano diz é (sendo S_n a sucessão das somas parciais de uma série):

> Se [a sucessão S_n] tem a propriedade de que a diferença entre o termo S_n e todo o termo posterior S_{n+r}, por mais longe que esteja daquele, permanece menor do que qualquer quantidade dada se n for tomado suficientemente grande, então existe sempre uma certa quantidade constante, e certamente só uma, de que os termos desta sucessão se aproximam, e da qual se podem aproximar tanto quanto se queira, se se prolongar suficientemente a sucessão.

Em Cauchy, a linguagem é já praticamente a nossa: a soma de uma série como limite da sucessão das somas parciais, depois a condição necessária e suficiente de convergência.

O que Vicente Gonçalves afirma, e aqui se apoia, é que, mais de três décadas antes, José Anastácio da Cunha apresentou aquele critério como *definição* de convergência, e o aplicou correctamente às séries geométricas, continuando depois com um trabalho notável sobre potências, logaritmos e a série binomial.

Não quero terminar esta apreciação das concepções de Anastácio da Cunha sobre as séries sem uma referência a Leonhard Euler.

O grande matemático suíço foi o maior *virtuose* na manipulação das séries do século XVIII (quando não de todos os tempos). Parte considerável da sua obra é dedicada às séries, que utilizou para os mais diversos fins, e sobre as quais obteve notáveis resultados, em particular o cálculo explícito da soma de várias importantes séries. Euler foi o expoente máximo do que alguns chamaram o "período formal" do desenvolvimento da teoria das séries, uma época exaltante de descobertas numerosas, levadas a cabo por vezes mediante geniais artifícios de cálculo sem preocupações com a convergência. O à-vontade com que nesta altura se usavam os processos infinitários levantou controvérsias, que conduziram ao "período crítico" geralmente associado aos nomes de Gauss e, sobretudo, Cauchy, e que veio a culminar na rigorosa escola de Weierstrass. De Gauss e Cauchy se disse por vezes que tinham "horror ao infinito", e ambos foram de facto críticos em relação aos excessos setecentistas. Significativa é também a seguinte frase de Abel, em 1828: "As séries divergentes são invenção do diabo, e é uma vergonha basear nelas qualquer demonstração."

Mas Euler era um génio, e não é prudente atribuir-lhe erros grosseiros. Mais correcto será afirmar que o seu interesse era a descoberta, não a revisão crítica, o seu objectivo a resolução de problemas, não o exame dos fundamentos. Não é difícil aceitar que para ele a distinção entre séries convergentes e divergentes fosse uma trivialidade; mas ele (bem no espí rito do século) nunca sentiu necessidade de cristalizar essa distinção numa definição a que depois se remetesse com regularidade.

Por exemplo, num artigo de 1760 [22], Euler por várias vezes chama convergentes às séries cujos termos decrescem para zero. Isto 20 anos depois de ter escrito [21] que isso não chega para assegurar a convergência, citando explicitamente o exemplo da série harmónica! É precisamente em [21], a seguir a essa observação, que Euler apresenta o critério de convergência mais frequentemente citado pelos seus comentadores:

> Ainda que, nestas séries, os termos decresçam sempre, a soma de uma tal série continuada até ao infinito é sempre infinita. Para demonstrar isto não é necessário um método para somar estas séries; pelo contrário, a verdade facilmente brilhará a partir do seguinte princípio: uma série que, continuada até ao infinito, tem uma soma finita, mesmo que se continue outro tanto não sofrerá qualquer aumento; antes aquilo que, depois do infinito, se acrescentar ao conhecido será na realidade infinitamente pequeno. Com efeito, se assim não fosse, a soma da série, apesar de continuada até ao infinito, não seria determinada e portanto não seria finita. Donde se segue que, mesmo no caso de aquilo que resulta da continuação para além do termo infinitésimo ser de grandeza finita, a soma da série tem que ser necessariamente infinita.

> A partir deste princípio poderemos, pois, decidir se a soma de cada série proposta é infinita ou finita.[6]

Em linguagem moderna, isto significa que Σu_n é convergente se e só se $u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots$ for infinitésimo para N infinito. O emprego e a manipulação de números infinitos e infinitésimos é típico de Euler, e por isso ele é tão popular hoje em dia entre os adeptos da análise não-standard (ver por exemplo [28,29]), cujas técnicas permitem de facto reconstruir muito do que formalmente se fez em Análise no passado. Outra abordagem no mesmo sentido, aliás muito anterior à da análise não-standard, levou ao desenvolvimento da teoria da somabilidade das séries (ver, por todos, [27]).

Não vale a pena entrar em controvérsias, mas creio poder argumentar-se que as próprias teorias "reconstrutivas" não seriam viáveis sem um esforço prévio de organização e fundamentação segura da Matemática, e da Análise em particular. É aos primórdios desse esforço que se deve associar o nome de José Anastácio da Cunha.[7]

O Livro XV dos *Principios Mathematicos*

Como já referido, o Livro XV dos *Principios* trata, no mesmo estilo conciso, dos elementos do cálculo diferencial e integral. A Definição II contém a noção de infinitésimo à maneira de d'Alembert ("a variável que puder sempre admitir valor menor que qualquer grandeza que se proponha"). A Definição III diz: "Se o valor de uma expressão A depender de outra expressão B, chamar-se-á A função de B; e B raiz de A." A Definição IV apresenta, na velha linguagem das fluxões, o que Youschkevitch [41, p. 19] considera ser a primeira definição analítica rigorosa de diferencial. Está assim redigida (sendo Γ uma função, implicitamente suposta diferenciável):

> **Definição IV.** Escolhida qualquer grandeza, homogénea a uma raiz x, para se chamar fluxão dessa raiz, e denotada assim dx; chamar-se-á fluxão de Γx, e se denotará assim, $d\Gamma x$, a grandeza que faria $\frac{d\Gamma x}{dx}$ constante, e $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$ infinitésimo ou cifra [zero], se dx fosse infinitésimo, e constante tudo o que não depende de dx.

Jean Mawhin, da Universidade de Lovaina, concorda com Youschkevitch: "(...) parece-me fiel à definição IV de Cunha afirmar que esta corresponde à definição moderna de diferencial de f em x como função linear $h \to Ah$ tal que $f(x+h) - f(x) - Ah = hB(h)$ onde $B(h) \to 0$ quando $h \to 0$." [31]

Detlef Spalt, de Göttingen, tem uma posição crítica sobre este trecho dos *Principios*, afirmando nomeadamente que Anastácio da Cunha não faz distinção rigorosa entre uma expressão e os valores que ela toma [39].

[6] Agradeço ao Prof. Sebastião Tavares de Pinho, da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra, a tradução desta passagem do latim.

[7] Neste ponto, discordo de Franco de Oliveira, quando em [32] sugere a possibilidade de uma leitura não-standard da Definição I do Livro IX. Se a influência euleriana se faz sentir nalgumas passagens dos *Principios*, tal não acontece seguramente na definição de convergência.

Muito interessante, na minha opinião, é a demonstração da Proposição I, que afirma que um polinómio em x com termo independente nulo é infinitésimo se x o for. Cunha apresenta um argumento $\varepsilon - \delta$ perfeito: Seja $Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots$ o polinómio; denote-se por n o número dos seus coeficientes, e seja P uma qualquer grandeza maior [implícito: em valor absoluto] que cada um dos coeficientes. Seja Q uma qualquer grandeza proposta, e tome-se $x < \frac{Q}{nP}$ e < 1. Então tem-se $\frac{1}{n}Q > Px^k$ para todos os k até n, de onde claramente $Q > Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots$ Q.E.D. Tal como no capítulo sobre séries, vemos aqui Anastácio da Cunha demonstrando afirmações sobre limites (embora ele não use esta palavra) mediante uma manipulação algébrica de desigualdades envolvendo quantidades finitas e bem determinadas.

A Proposição I é usada para provar que $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ (Proposição II). A Proposição VI (de novo supondo implicitamente a diferenciabilidade da função Γ) afirma: "dx infinitésimo, e o que de dx não depende constante, fazem $\Gamma(x+dx) - \Gamma x$ infinitésimo." Na nossa linguagem, isto traduz que a diferenciabilidade implica a continuidade, mas Anastácio da Cunha não explicita o conceito de função contínua.

Na Proposição XI obtém-se o desenvolvimento de Taylor, sem pôr o problema da sua existência e sem dar atenção ao domínio de convergência da série (embora mais tarde, no Livro XVI, a propósito do desenvolvimento do seno, se refira que há convergência para todos os valores da variável).

A Proposição XII contém, para derivadas de qualquer ordem de funções de qualquer número de variáveis, o que hoje chamamos Teorema de Schwarz, relativo à igualdade de derivadas mistas. A demonstração usa desenvolvimentos em série. Diz o historiador I. Grattan-Guinness: "... é digno de nota que ele tenha considerado necessário demonstrar um resultado que muitos contemporâneos davam como evidente." [26]

Para outros comentários sobre o Livro XV, veja-se [19,26,41].

Nota final sobre os *Principios Mathematicos*

Muito mais se poderia dizer sobre os *Principios Mathematicos*, uma obra maduramente pensada e escrita com rigor e precisão de linguagem. Anastácio da Cunha faz um esforço para evitar lacunas nos seus raciocínios, como por exemplo no Livro XVII (que trata da geometria diferencial das curvas), onde sente a necessidade de escrever: "A experiência tem mostrado aos Geómetras, que toda a variável, entre cujos valores há diferenças infinitésimas, ao passar de positiva para negativa, se acha igual, ou a 0, ou a $\frac{1}{0}$." A mim parece-me muito razoável que, sem uma construção dos números reais e uma noção de continuidade, se invoque a "experiência" para justificar este tipo de afirmação (hoje associada aos nomes de Bolzano e Cauchy). O mesmo tipo de recurso à "experiência" ocorre noutros trechos dos *Principios*, como no Livro VIII (sobre números positivos e negativos, operações e regras diversas), que acaba assim: "Axioma. A experiência tem mostrado que estas praxes são seguras", e no Livro X (sobre equações), onde a propósito das raízes quadradas de números negativos se diz: "... os Matemáticos modernos quando encontram semelhantes expressões, nem por isso deixam de continuar o cálculo: e mostra a experiência que este sai certo contanto que se observem certas cautelas". Este tipo de formulações valeu-lhe mais tarde uma crítica violenta de Monteiro da Rocha ("... não recebe as regras ordinárias do cálculo, senão porque a experiência mostra que são certas..." [13]). E. Giusti [24] filia-as nas próprias concepções filosóficas de Anastácio da Cunha.

Uma característica dos *Principios Mathematicos* é a total ausência de referências: nenhum autor ou obra é citado. Isto dificulta a identificação das fontes do autor, bem como das suas possíveis contribuições originais. (O livro, ao contrário do que então era habitual, não tem prólogo, o que pode dever-se a só ter sido publicado muito depois da morte do autor.) Sabe-se que Anastácio da Cunha tinha especial admiração e predilecção por Newton e d'Alembert, e que antipatizava com Euler, embora conhecesse bem a sua obra. (Em [13] pode ler-se, a determinado passo, sobre Euler: "Não sei se alguma vez lhe contei, que este autor, quando se via perplexo entre verdades manifestas, e a Álgebra, que as contradiz, fechava os olhos, e exclamava como fiel algebrista: *Quidquid sit, calculo potius, quam judicio nostro, est fidendum!* [Seja como for, devemos acreditar mais no cálculo do que no nosso próprio julgamento]"). Em [24] encontra-se uma análise pormenorizada sobre as possíveis fontes da obra de Anastácio da Cunha, começando pelo exame da sua biblioteca matemática, inventariada pela Inquisição quando do processo de 1778.

Em todo o caso, a minha impressão é que Cunha não foi um grande *descobridor* de novos teoremas e identidades. Ele foi sobretudo um organizador lúcido da Matemática conhecida na sua época, procurando transformá-la num corpo sistemático governado por axiomas e definições cuidadosamente escolhidos. É esta intenção que permite compreender o rigor e a originalidade das suas abordagens às séries, às potências e ao cálculo diferencial, que o tornam um pioneiro no esforço para colocar a Matemática, e especialmente a Análise, sobre bases logicamente sólidas.

Outras obras de José Anastácio da Cunha

Para além dos trabalhos já citados, José Anastácio da Cunha deixou vários outros manuscritos sobre assuntos de matemática, em especial questões de fundamentos ([10], *Avertissement du traducteur*; veja-se [41] para alguns dos títulos). Um artigo biográfico do século XIX lista quinze títulos. Todos parecem ter-se perdido, com excepção de um breve *Ensaio sobre os Principios de Mechanica* [11], publicado em 1807 em Londres por um amigo (Domingos de Sousa Coutinho, Marquês do Funchal, então embaixador de Portugal em Inglaterra), em que Cunha adopta uma abordagem axiomática à mecânica racional. Não resisto a transcrever algumas frases da notável introdução a este ensaio.

Depois de distinguir cuidadosamente entre a *Mecânica Matemática* (onde a verdade consiste apenas na correcção com que os resultados são deduzidos das definições, postulados e axiomas, não estando estes sujeitos a qualquer lei) e a *Mecânica Física* (onde simplesmente se interpreta e comenta a natureza e as suas leis tal como investigadas e confirmadas pela experiência), Cunha escreve:

> Como autor de uma novela se pode, por outra parte, considerar quem compõe um tratado puramente matemático. Goza dos mesmos privilégios que se concedem *pictoribus atque poetis*. Posso, v. g., inventar uma nova curva e demonstrar várias das suas propriedades. Posso escrever um tratado de óptica, em que tome como hipótese, que a luz se propaga não em linha recta, mas em linha circular, ou em qualquer outra linha. Posso compor uma mecânica, supondo as leis do movimento que eu muito quiser. E se os meus teoremas e as minhas soluções dos problemas forem legitimamente derivadas dos principios que estabeleci, ninguém me poderá arguir de erro.
>
> Poderão sim censurar-me de ter indignamente abusado do precioso tempo, se essas bem ajustadas e talvez elegantes teorias se não puderem aplicar à filosofia natural; se delas não puder tirar o género humano utilidade: e esta só consideração é que pode e deve pôr limites à imaginação do inventor. Por isso o geómetra, que não quiser incorrer na censura de *inútil*, deve tomar, por principios ou hipóteses, noções comuns, verdades de facto, que a natureza, que a experiência ensinam: então o físico mostrando que os corpos naturais são (ou exacta ou proximamente) dotados daquelas mesmas propriedades, que o geómetra supôs nos corpos matemáticos, poderá fazer uma feliz aplicação da teórica puramente matemática a alguns assuntos físicos.

E Anastácio da Cunha prossegue identificando vários princípios da mecânica que devem ser considerados como *hipóteses*, e não como proposições exigindo demonstração matemática, dirigindo ao mesmo tempo severas críticas à confusão reinante sobre este assunto. (Para uma análise mais pormenorizada deste *Ensaio* de Cunha ver [3,36,37,38].)

Sobre a matemática e o seu ensino podem encontrar-se opiniões interessantes de Anastácio da Cunha numa polémica em 1785-1786 com um professor de Coimbra, Monteiro da Rocha [13]. Numa das cartas de Cunha encontra-se uma definição correcta de um integral impróprio, já usando a palavra *limite*: "Aprenda que esse valor exacto, que atribui a um espaço fantástico, é o limite dos espaços reais, finitos, que podem corresponder à abcissa x enquanto esta é < 1." Adiante, na mesma carta, Cunha resume as suas opiniões pedagógicas:

> O meu *modo de ensinar* era o que a minha consciência e inteligência (...) me ditavam. Expunha o objecto das proposições, a sua conexão e dependência (...). Não me demorava em ler ou repetir literalmente (como os meus companheiros costumavam) as proposições que por fáceis nem carecem de explicação, nem a admitem, só para poder empregar tempo suficiente em indicar ao estudantes as verdadeiras dificuldades da lição (...). Porém queria que também os estudantes trabalhassem, e os obrigava a resolver problemas.

As cartas reunidas em [13] são um documento fascinante, e proporcionam- nos um contacto revelador com a personalidade de Anastácio da Cunha.

Como poeta e homem de cultura, José Anastácio da Cunha não é totalmente desconhecido em Portugal, tendo a sua vida e obra despertado o interesse de alguns dos grandes nomes da intelectualidade portuguesa. Aquilino Ribeiro dedicou-lhe mesmo uma biografia, mas sem pormenores de natureza matemática [34].

A mim parece-me muito interessante que, durante a sua vida, Anastácio da Cunha tenha estado sucessivamente em contacto com três dos principais factores que desempenharam um papel na introdução em Portugal das “ideias modernas” do século: os métodos pedagógicos dos Oratorianos, que, pondo grande ênfase no valor da experiência, contrastavam com os métodos tradicionais dos Jesuítas; as forças armadas do Conde de Lippe, com os seus numerosos oficiais estrangeiros, muitos deles mações; e finalmente a Universidade de Coimbra reformada pelo Marquês de Pombal.

Anastácio da Cunha teve vários amigos e discípulos dedicados e admiradores, que muitos anos depois da sua morte ainda defendiam a sua memória, mas como intelectual, e como matemático, a sua influência não parece ter sido muita. (Veja-se porém [20] e, com interesse para o Brasil, [2,35]). Isto deveu-se sobretudo ao episódio triste da sua prisão pela Inquisição, que interrompeu o que parecia uma carreira promissora, e à sua morte prematura.

Nenhum livro seu foi publicado enquanto viveu. A sua obra poética foi editada em 1839 [14], e de novo em 1930 [15], agora com um longo estudo introdutório. (Voltou a ser analisada há poucos anos, em [5, 30].) Mais recentemente, em 1964, um interessantíssimo ensaio de Anastácio da Cunha sobre a história da cultura portuguesa foi encontrado no Arquivo Nacional do Rio de Janeiro [12]. Escrito em 1780, é uma análise melancólica da decadência portuguesa depois da era dos Descobrimentos, nos séculos XV e XVI. Jacinto do Prado Coelho vê nele um “impressionante documento dum espírito europeu que vê com desassombro e sente com amargura o atraso do seu país.” [6] Cito algumas passagens (da tradução do editor, já que o original está em francês):

> Antes desse tempo desditoso [o período iniciado em fins do século XVI], já tinhamos logrado alcançar, ainda que com o auxílio dos estrangeiros, e imitando-os, lugar honroso na república das letras. Os nossos sábios eram conhecidos, respeitados, solicitados pelo estrangeiro. (...) as universidades da Itália e da França recrutavam mestres portugueses (...). (...) no século XVI fomos alguma coisa, fomos aquilo a que os ingleses chamam *good scholars*, bons estudantes. (...) Porém, a partir desse século XVI até hoje, que é que temos feito? Ai de mim! Escasseia-me a coragem para dizê-lo. (...) Acabaram-se em Portugal a geometria, as línguas orientais, o grego.

O bicentenário da morte de José Anastácio da Cunha foi assinalado por várias iniciativas em Portugal. O Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra reeditou em facsimile as edições portuguesa e francesa dos *Principios Mathematicos*.

Realizaram-se colóquios em Coimbra, Lisboa e Évora, dos quais foram publicadas actas. O sentimento que presidiu a toda esta actividade foi o de que vale a pena estudar a obra do soldado, poeta e professor José Anastácio da Cunha, uma obra que honra os matemáticos de língua portuguesa.

Referências Bibliográficas

1. *Documentos da Reforma Pombalina*, ed. Manuel Lopes de Almeida, Coimbra (1937).

2. Ubiratan D'Ambrosio, *Influência da obra científica e literária de José Anastácio da Cunha no Brasil*, em [18].

3. A. N. Bogoliubov, *A Mecânica no pensamento de José Anastácio da Cunha* (russo), Istoriko-mat. Issled. 19 (1977), 177-187.

4. Bernard Bolzano, *Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation*, trad. S. B. Russ, Historia Mathematica 7 (1980), 156-185.

5. Aníbal Pinto de Castro, *José Anastácio da Cunha: heterodoxia e poesia*, em [17].

6. *Dicionário de Literatura Portuguesa, Brasileira e Galega*, dir. Jacinto do Prado Coelho, 3ª edição, Porto (1984).

7. José Anastácio da Cunha, *Ensaio sobre as Minas*, ed. Maria Fernanda Estrada, Arquivo Distrital de Braga / Universidade do Minho (1994).

8. José Anastácio da Cunha, *Carta Fisico-Mathematica sobre a Theorica da Polvora em Geral, e a Determinação do Melhor Comprimento das Peças em Particular - 1769*, ed. José Victorino Damasio e Diogo Kopke, Porto (1838). Reproduzido em [18].

9. José Anastácio da Cunha, *Principios Mathematicos*, Lisboa (1790). Reprodução facsimilada, Univ. Coimbra (1987).

10. José Anastácio da Cunha, *Principes Mathématiques*, trad. J. M. Abreu, Bordéus (1811). 2ª edição, Paris (1816). Reprodução facsimilada, Univ. Coimbra (1987).

11. José Anastácio da Cunha, *Ensaio sobre os Principios de Mechanica*, ed. Domingos de Sousa Coutinho, Londres (1807). Reproduzido em [18].

12. José Anastácio da Cunha, *Notícias Literárias de Portugal - 1780*, ed. Joel Serrão, Lisboa (1966).

13. *Questão entre José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha*, ed. António José Teixeira, O Instituto XXXVIII (1890-1891) e XXXIX (1891-1892), Coimbra. Reproduzido, sem as (extensas) notas, em [18].

14. *Composições Poéticas do Doctor Joseph Anastácio da Cunha*, ed. Inocêncio Francisco da Silva, Lisboa (1839).

15. *A Obra Poética do Dr. José Anastácio da Cunha*, ed. Hernâni Cidade, Coimbra (1930).

16. *O Processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra - 1778*, ed. João Pedro Ferro, Lisboa (1987).

17. *Em homenagem a José Anastácio da Cunha*, ed. J. A. F. Carvalho, M. P. Oliveira e J. F. Queiró, Coimbra (1989).

18. *Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta*, ed. M. L. Ferraz, J. F. Rodrigues e L. Saraiva, Lisboa (1990).

19. António Leal Duarte e Jaime Carvalho e Silva, *Algumas observações a propósito dos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha*, Actas das XII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática, Braga (1987).

20. António Leal Duarte e Jaime Carvalho e Silva, *Sobre a influência da obra matemática de José Anastácio da Cunha*, em [18].

21. Leonhard Euler, *De progressionibus harmonicis observationes*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1734/5), 1740, 150-161. Opera Omnia I 14, 87-100.

22. Leonhard Euler, *De seriebus divergentibus*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5 (1754/55), 1760, 19-23 e 205-237. Opera Omnia I 14, 585-617. Trad. E. J. Barbeau e P. J. Leah, Historia Mathematica 3 (1976), 141-160.

23. J. Almeida Garrett, *Bosquejo da história da Poesia portuguesa*, Lisboa (1826).

24. Enrico Giusti, *Quelques réflexions sur les Principios de da Cunha*, em [17] e [18].

25. J. Vicente Gonçalves, *Análise do Livro VIIII dos Principios Mathematicos de José Anastácio da Cunha*, Actas do Congresso do Mundo Português XII (1940), 123-140.

26. I. Grattan-Guinness, *Da Cunha's calculus in its time*, em [18].

27. G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford (1949).

28. Detlef Laugwitz, *Eulers Begründung der Analysis aus der Algebra*, Mathematische Semesterberichte 30 (1983), 171-193.

29. Detlef Laugwitz, *Rise, fall and resurrection of infinitesimals*, IMFUFA tekst nr. 88/84, Roskilde Universitetscenter (1984).

30. António Coimbra Martins, *O estrangeirado de Valença*, em [18].

31. Jean Mawhin, *Le concept de différentielle chez da Cunha et ses successeurs*, em [18].

32. A. J. Franco de Oliveira, *Anastácio da Cunha and the Concept of Convergent Series*, Archive for History of Exact Sciences, Vol. 39, nº 1 (1988), 1-12.

33. Fernando Pessoa, *Páginas de Estética e de Teoria e Crítica Literárias*, ed. Georg Rudolf Lind e Jacinto do Prado Coelho, Lisboa (1967).

34. Aquilino Ribeiro, *Anastácio da Cunha, o lente penitenciado*, Lisboa (1938).

35. Alice C. G. Rodrigues, *Os alunos brasileiros de José Anastácio da Cunha na Universidade de Coimbra. Sua importância sociopolítica*, em [18].

36. João Resina Rodrigues, *Comentários ao "Ensaio sobre os Principios de Mechanica"*, em [18].

37. José Francisco Rodrigues, *José Anastácio da Cunha, matemático em Portugal de setecentos*, Ciência, Tecnologia e Sociedade nº 2 (1987), 66-74.

38. José Francisco Rodrigues, *A obra matemática de José Anastácio da Cunha*, Colóquio/Ciências nº 1 (1988), 74-86.

39. Detlef Spalt, *Infinitely small quantities around 1800 – d'Alembert, da Cunha, Cauchy*, conferência no Colóquio Internacional de Matemática Não-Standard, Universidade de Aveiro, Julho 1994.

40. F. Gomes Teixeira, *Elogio histórico do Doutor José Anastácio da Cunha*, em *Panegíricos e Conferências*, Coimbra (1925).

41. A. P. Youschkevitch, *J. A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale*, Revue d'Histoire des Sciences XXVI (1973), 3-22.

42. A. P. Youschkevitch, *C. F. Gauss et J. A. da Cunha*, Revue d'Histoire des Sciences XXXI (1978), 327-332.