Actividades Matemáticas

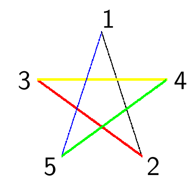
www.mat.uc.pt/actividades

Actividade 3 - 18.03.2006 - Grupo 13/15 anos

DIVISIBILIDADE

PROBLEMA 1

Se numerarmos de 1 a 5 os vértices da estrela indicada na figura e em seguida percorrermos a estrela no mesmo sentido, colocando o número 6 no vértice 1, o número 7 no vértice 2, o número 8 no vértice 3 e assim sucessivamente até ao número 2006, em que vértice fica este número?



PROBLEMA 2

Será que, para algum inteiro n, o número $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$ termina em exactamente 5 zeros?

PROBLEMA 3

Qual é o algarismo das unidades do número 7^{777}?

PROBLEMA 4

O médico receitou uma série de remédios a uma senhora doente:

- um descongestionante para tomar de duas em duas horas;
- um expectorante para tomar de três em três horas;
- um anti-pirético para tomar de quatro em quatro horas;
- um antibiótico para tomar de cinco em cinco horas.

Ela tomou-os todos juntos às 15 horas de 2ª feira e, a partir daí, seguiu rigorosamente a prescrição do médico. Descobre quando voltou a senhora a tomar os medicamentos todos juntos.

PROBLEMA 5

A Joana e o Joaquim lançam varetas de diversas cores sobre uma mesa. Depois, cada jogador tenta retirá-las uma a uma do monte, sem que as outras se mexam. Quando as varetas se mexem a partida é interrompida, dá-se a vez ao outro jogador, e a pontuação daquela jogada é o produto dos valores de cada vareta retirada.

A cada vareta corresponde uma pontuação, indicada em seguida:

(amarelo)	2 pontos	(verde)	5 pontos	(preto)	30 pontos
(vermelho)	3 pontos	(azul)	6 pontos		

(a) Numa jogada a Joana obteve 72 pontos tirando três varetas de cores diferentes. Que cores foram essas? Pode ter tirado mais de uma vareta com a mesma cor?

(b) Sabendo que o Joaquim teve 180 pontos numa jogada encontra pelo menos duas combinações possíveis de varetas que correspondam a esse número de pontos.

Actividade 3 - Soluções - 18.03.2006 - Grupo 13/15 anos

DIVISIBILIDADE

PROBLEMA 1

Como 2006 = 5 x 401 + 1, o número 2006 é colocado no vértice 1.

PROBLEMA 2

Um número termina em, exactamente, 5 zeros se for divisível por 10^5 mas não por 10^6. Como 10 = 2 x 5, esse número deve ser divisível por 2^5 e por 5^5. O número 1 x 2 $\cdots$ x 25 é o menor desta forma que é divisível por 5^5, porque é o menor que contém os múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20 e 25, como factores. Ora 1 x 2 $\cdots$ x 25 também é divisível por 2^5, pois contém 2, 4, 6 e 8 como factores, logo é o menor desta forma divisível por 10^5. Contudo, 25 = 5 x 5, logo 1 x 2 $\cdots$ x 25 também é divisível por 10^6 (mas não por 10^7). Assim, este número termina em, exactamente, 6 zeros e não existe nenhum n tal que $1 \times 2 \cdots \times (n-1) \times n$ termine em exactamente 5 zeros!

PROBLEMA 3

Observe-se que as primeiras potências de 7 são $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807, \ldots$ O algarismo das unidades de cada potência de 7 é obtido multiplicando o algarismo das unidades da potência anterior por 7. Logo, o algarismo das unidades de cada potência de 7 é 7, 9, 3 ou 1, repetindo-se sucessivamente por esta ordem, à medida que o expoente da potência aumenta. Como 777 = 194 x 4 + 1, então o algarismo das unidades de $7^{777} = 7^{194\times4+1}$ é o mesmo que o de 7^1, ou seja, 7.

PROBLEMA 4

A senhora vai tomar os remédios todos ao mesmo tempo após um número de horas que seja simultaneamente múltiplo de 2, 3, 4 e 5. Portanto, 60 horas (60=m.m.c.(2,3,4,5)) depois de ter tomado os remédios pela primeira vez, ou seja, às 3h da manhã da 5ª feira seguinte, tomá-los-á todos juntos novamente.

PROBLEMA 5

(a) Decompondo o número 72 obtém-se 72 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3, ou seja, a Joana pode ter retirado três varetas amarelas e duas encarnadas. Mas como a Joana retirou três cores diferentes, vai ter de trocar varetas para conseguir a terceira cor. A solução é tirar uma amarela e uma encarnada e substituí-las por uma azul. No final, ficam duas amarelas, uma encarnada e uma azul (2 x 2 x 6 x 3 = 72).

(b) Decompondo o número 180 obtém-se 180 = 2 x 2 x 3 x 3 x 5. Alguns exemplos: retirando uma preta e uma azul; retirando duas amarelas, duas encarnadas e uma verde; ou, ainda, retirando uma amarela, uma encarnada, uma azul e uma verde.