



Canguru Matemático sem Fronteiras 2014

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Estudante
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

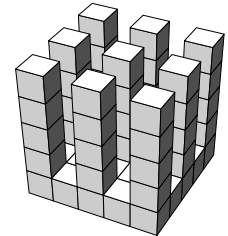
Duração: 1h 30min

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. Um cubo era constituído por $125 = 5^3$ cubos menores, todos com arestas de 1 cm. Alguns desses cubos menores foram retirados de modo a obter o sólido representado na figura. Este sólido é constituído por colunas cada uma com 1 cm ou 5 cm de altura. Quantos cubos dos mais pequenos foram retirados?



- (A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80

2. A Carla, a Emília e a Liliana fazem hoje anos e a soma das suas idades é 44. Qual será a soma das suas idades da próxima vez que essa soma for um número de dois algarismos iguais?

- (A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99

3. Se $a^b = \frac{1}{2}$ então a^{-3b} é igual a

- (A) -8 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6 (E) 8

4. Dentro de três cestos de tamanhos distintos (grande, médio e pequeno) estão 48 bolas. Em conjunto, os cestos grande e pequeno têm o dobro das bolas do cesto médio. O número de bolas que estão no cesto pequeno é metade do número de bolas que estão no cesto médio. Quantas bolas estão no cesto grande?

- (A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 32

5. O valor de $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$ é igual a

- (A) 1 (B) 2 (C) 2^{2011} (D) 2^{2012} (E) 2^{2013}

6. Qual dos polinómios seguintes não é divisível por $x + 1$?
- (A) $2x + 2$ (B) $x^2 - 1$ (C) $x^2 + x$ (D) $-1 - x$ (E) $x^2 + 1$
7. Quantos algarismos tem o número natural representado pela expressão $(2^{22})^5 \times (5^{55})^2$?
- (A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111
8. O Júlio tem uma conta secreta de correio eletrónico, onde só recebe mensagens de 4 amigos. Hoje o Júlio recebeu 8 mensagens nessa conta. Qual das afirmações seguintes, feitas sobre essas 8 mensagens, é seguramente verdadeira?
- (A) O Júlio recebeu 2 mensagens de cada um dos 4 amigos
(B) O Júlio não pode ter recebido 8 mensagens de um dos seus amigos
(C) O Júlio recebeu, pelo menos, uma mensagem de cada um dos amigos
(D) O Júlio recebeu, pelo menos, 2 mensagens de um dos seus amigos
(E) O Júlio recebeu, pelo menos, 2 mensagens de 2 amigos diferentes
9. Dois cilindros têm a mesma altura e o perímetro da base de um é o dobro do perímetro da base do outro. O volume do cilindro maior é
- (A) o dobro do volume do outro (B) o triplo do volume do outro
(C) π vezes o volume do outro (D) o quádruplo do volume do outro
(E) 8 vezes o volume do outro
10. Os algarismos do número 2014 são todos diferentes e o algarismo das unidades é maior do que a soma dos restantes. Quantos anos passaram desde que isto ocorreu, pela última vez, antes de 2014?
- (A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 395 (E) 485

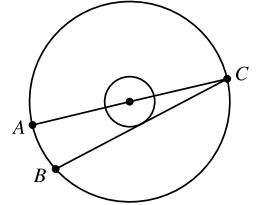
Problemas de 4 pontos

11. As medidas da altura, da largura e da profundidade de uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular são, respetivamente, a , b e c , com $a < b < c$. Aumentando uma destas medidas pela adição de uma quantidade positiva x , o volume da caixa aumenta. Em qual dos casos é que esse aumento é maior?
- (A) Se se aumentar a
(B) Se se aumentar b
(C) Se se aumentar c
(D) O aumento do volume é o mesmo quer se aumente a , b ou c
(E) Depende dos valores de a , b e c

12. Num torneio de futebol participaram 4 equipas: A , B , C e D . Cada uma das equipas jogou 3 jogos, um jogo contra cada uma das outras 3 equipas. Foram atribuídos 3 pontos por cada vitória, 1 por cada empate e 0 por cada derrota. No final do torneio a equipa A tinha 7 pontos e as equipas B e C tinham 4 pontos cada uma. Quantos pontos tinha a equipa D ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

13. As circunferências representadas na figura têm o mesmo centro e o raio da maior é o triplo do raio da menor. Além disso, $[AC]$ é um diâmetro da circunferência maior, $[BC]$ é uma corda dessa circunferência que é tangente à outra e $\overline{AB} = 12$. Qual é o raio da circunferência maior?



- (A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

14. Quantos ternos ordenados de números inteiros (a, b, c) , com $a > b > c > 1$, verificam a desigualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

- (A) Nenhum (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Uma infinidade

15. Os números reais a , b e c são não nulos, n é um número natural e sabe-se que os números

$$(-2)^{2n+3} a^{2n+2} b^{2n-1} c^{3n+2} \quad \text{e} \quad (-3)^{2n+2} a^{4n+1} b^{2n+5} c^{3n-4}$$

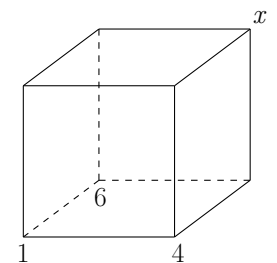
têm o mesmo sinal. Qual das afirmações seguintes é seguramente verdadeira?

- (A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

16. Seis semanas têm $n!$ segundos. Qual é o valor de n ?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

17. Os vértices de um cubo estão numerados de 1 a 8 de tal modo que a soma dos quatro números colocados nos vértices de uma mesma face é igual para todas as faces. Os números 1, 4 e 6 estão colocados como se representa na figura. Qual é o valor de x ?



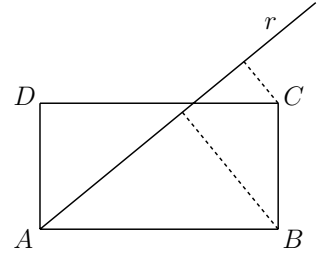
- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

18. No rótulo de uma embalagem de pasta de queijo pode ler-se “24% de gordura” e “64% de gordura no produto seco”. Qual é a percentagem de água nesta pasta de queijo?

- (A) 37,5% (B) 42% (C) 49% (D) 62,5% (E) 88%

19. Na figura estão representados um retângulo $[ABCD]$ e uma reta r que passa no ponto A . A distância de C à reta r é 2 e a distância de B à reta r é 6. Além disso, $\overline{AB} = 2\overline{AD}$. Então \overline{AB} é igual a

- (A) $4\sqrt{3}$ (B) 10
(C) 12 (D) 14
(E) 16



20. A função $f(x) = ax + b$ verifica $f(f(f(1))) = 29$ e $f(f(f(0))) = 2$. Qual é o valor de a ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

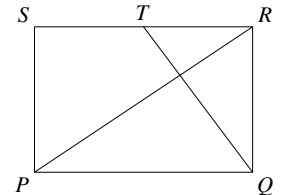
Problemas de 5 pontos

21. Num conjunto com dez números inteiros positivos exatamente cinco são divisíveis por 5 e exatamente sete são divisíveis por 7. O menor valor possível para o maior destes dez números inteiros é

- (A) 63 (B) 75 (C) 77
(D) 105 (E) Nenhum dos números indicados

22. O quadrilátero representado na figura é um retângulo, T é o ponto médio do segmento $[RS]$ e $[QT]$ é perpendicular a $[PR]$. A que é igual $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$?

- (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{3}{2}$
(D) $\sqrt{3}$ (E) 2

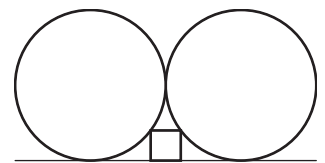


23. A família dos Cangurus Brilhantes tem 9 elementos, sendo cada um deles ou dourado ou prateado. Escolhendo, ao acaso, 3 elementos da família, a probabilidade de nenhum dos 3 ser prateado é $\frac{2}{3}$. Quantos elementos da família dos Cangurus Brilhantes são dourados?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

24. Na figura estão representados um quadrado, uma reta e duas circunferências de raio 1. As circunferências são tangentes entre si e tangentes à reta. Um dos lados do quadrado está sobre a reta e os 2 vértices opostos a esse lado pertencem, cada um, a uma das circunferências. Quanto mede o lado do quadrado?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



25. O Tomás quer escrever números inteiros positivos todos diferentes, não excedendo 100 e cujo produto não seja divisível por 54. No máximo, quantos números pode o Tomás escrever?

- (A) 8 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

26. Dois polígonos regulares, P_1 e P_2 , têm medida de lado 1 e estão em lados opostos do seu lado comum, $[AB]$. O polígono P_1 tem 15 lados e P_2 tem n lados. Além disso, a distância entre o vértice de P_1 adjacente a B e distinto de A e o vértice de P_2 adjacente a B e distinto de A é 1. Qual é o valor de n ?

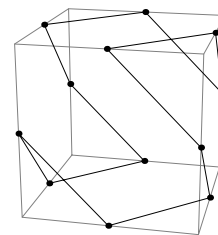
- (A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

27. Quantos ternos ordenados de números inteiros positivos (k, m, n) verificam as igualdades

$$k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1 ?$$

- (A) Nenhum (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Uma infinidade

28. Na figura está representada uma linha poligonal cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo. Em cada vértice da linha poligonal considera-se o menor ângulo formado pelas duas arestas da linha poligonal com esse vértice em comum. Qual é a soma das amplitudes destes ângulos?



- (A) 720 (B) 1080 (C) 1200 (D) 1440 (E) 1800

29. A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é tal que $f(4) = 6$ e $xf(x) = (x - 3)f(x + 1)$ para todo o inteiro x . A que é igual o produto $f(4)f(7)f(10) \cdots f(2011)f(2014)$?

- (A) 2013 (B) 2014 (C) 2013×2014
(D) 2013! (E) 2014!

30. Nas florestas de uma ilha mágica viviam apenas 3 tipos de animais: cabras, lobos e leões. Os leões comem lobos e cabras e os lobos comem cabras. Quando um lobo comia uma cabra transformava-se num leão, quando um leão comia um lobo transformava-se numa cabra e quando um leão comia uma cabra transformava-se num lobo. A dada altura viviam nesta ilha 17 cabras, 55 lobos e 6 leões. Atualmente nenhum dos animais restantes pode comer nenhum dos outros. No máximo, quantos animais vivem na ilha?

- (A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35