Densidades Definidas Positivas

Dinis Duarte PESTANA – `dinis.pestana@fc.ul.pt`
Departamento de Estatística e Investigação Operacional, FCUL

Resumo: A função característica de uma variável gaussiana padrão é, a menos de uma constante multiplicativa, a sua função densidade de probabilidade. Tal como a gaussiana, outras funções características são "auto-recíprocas".

Dizemos que o par de funções densidade de probabilidade $\left(f_X, f_{\tilde{X}}\right)$ é um par recíproco sse $f_{\tilde{X}}$ for, a menos de uma constante normalizadora, a função característica correspondente a f_X. Um exemplo bem conhecido: as funções densidade de probabilidade da variável de Laplace da variável de Cauchy, constituem um par recíproco, $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}, \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\right)$.

No caso de $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} \tilde{X}$, dizemos que é uma variável aleatória auto-recíproca, ou que a correspondente função característica, ou função densidade de probabilidade, é auto-recíproca. De facto, se uma função característica for positiva e integrável, a correspondente função densidade de probabilidade f_X é positiva definida, e considerando o par recíproco $\left(f_X, f_{\tilde{X}}\right)$, constata-se imediatamente que

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{f_{\tilde{X}}(0)}}{\sqrt{f_X(0)}+\sqrt{f_{\tilde{X}}(0)}}\, f_X(x) + \frac{\sqrt{f_X(0)}}{\sqrt{f_X(0)}+\sqrt{f_{\tilde{X}}(0)}}\, f_{\tilde{X}}(x)$$

é uma função densidade de probabilidade auto-recíproca. Do par recíproco $\left(\frac{a}{2}\,\mathrm{e}^{-a|x|}, \frac{1}{a\,\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$, obtemos a função densidade de probabilidade auto-recíproca $f_Y(x) = \frac{a}{a\sqrt{2\pi}+2}\,\mathrm{e}^{-a|x|} + \frac{1}{a\,\pi+\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Assim, a forma analítica das funções auto-recíprocas é em geral uma combinação convexa de parcelas analiticamente muito diversas, embora sejam conhecidas excepções para além da gaussiana, por exemplo $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,x$.

Exploramos a auto-reciprocidade, usando a relação de Parseval, para estabelecer diversas propriedades fulcrais das funções características: teorema da unicidade, fórmula de inversão no caso de funções características de L^1, teorema da continuidade de Lévy-Cramér.

Funções características auto-recíprocas e pares recíprocos foram investigados por Lévy (1967), Teugels (1975), Pestana (1983) e Pestana *el al.* (2001), onde podem ser encontradas referências complementares, nomeadamente devido às suas relações com divisibilidade infinita, estabilidade e unimodalidade. Lévy (1967) foi o primeiro a observar que o conjunto de funções características positivas constitui um cone convexo, e Teugels (1971) procurou determinar os pontos extremos que permitiriam uma representação integral de Choquet.

Caracterizamos as variáveis aleatórias auto-recíprocas através de uma equação funcional envolvendo funções características de produtos, e discutimos a sua repre-

sentação como valor médio de uma variável suportada pelo conjunto dos pontos extremos do conjunto convexo que constituem. Estabelecem-se também resultados sobre leis estáveis e leis infinitamente divisíveis.

[1] P . Lévy, *Fonctions caractéristiques positives*, C. R. Acad. Sci. Paris 265A (1967) 249-252.

[2] D. Pestana,*On self-reciprocal probability density functions*, Publ. Inst. Statist. Un. Paris 28 (1983) 81-92.

[3] D. Pestana, F. Sequeira e S. Velosa, *Parseval's relation and self-reciprocal probability density functions*, Rev. Estat. 11 (2001) 315-316.

[4] J. Teugels, *Probability density functions which are their own characteristic functions*, Bull. Soc. Math. Belg. 23 (1971) 236-262.

Trabalho conjunto com: Fernando Sequeira (Departamento de Estatística e Investigação Operacional, FCUL) e Sílvio Filipe Velosa (Departamento de Matemática, Universidade da Madeira).