A Fronteira entre o Caos e a Ordem

Alberto PINTO – aapinto@fc.up.pt
Departamento de Matemática Aplicada, FCUP

Resumo: A transição da ordem para o caos através de sucessivas duplicações de período foi constatada para diversas famílias unimodais de tipo quadrático, e, em particular, para a família quadrática $f_\lambda(x) = -\lambda x^2 + \lambda - 1$, com $\lambda \in [0, 2]$. Um dos factos mais surpreendentes neste fenómeno foi a descoberta de quantidades universais que lhe estão associadas. Para explicar estes fenómeno passamos à descrição de aplicações unimodais classificando-as em p-ordenadas, p-cortadoras de queijos e p-tendas.

Aplicações p-ordenadas, p-cortadoras de queijos e p-tendas. Dizemos que $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ é uma *aplicação unimodal de tipo quadrático de classe* C^r, se $f(x) = \phi(x^2)$, onde $\phi : [0, 1] \to [-1, 1]$ é uma aplicação de classe C^r com derivada não nula e tal que $f(-1) = -1$. Definimos U^r como sendo o conjunto constituído por todas as aplicações unimodais de tipo quadrático de classe C^r.

Dizemos que uma aplicação unimodal de tipo quadrático $f \in U^r$ é *p-ordenada*, se contiver uma órbita periódica que atraia quase todos os pontos do intervalo $[-1, 1]$, com respeito à medida de Lebesgue. Dizemos que f é *p-super-estável*, se f for p-ordenado e o ponto crítico de f pertencer à órbita atractora de f.

Dizemos que uma aplicação unimodal de tipo quadrático $f \in U^r$ é um *p-cortador de queijos*, se contiver p intervalos $I_1, \ldots, I_{p-1}$ tais que: (i) f seja um homeomorfismo de I_i para I_{i+1}, para $1 \le i \le p$; (ii) I_p contenha o ponto crítico de f_Λ; (iii) existam dois intervalos fechados e disjuntos, J_0 e J_1, contidos em I_p, com as propriedades de não conterem o ponto crítico e cada um deles ter um extremo comum a I_p; (iv) as imagens das aplicações $f^p|J_0$ e $f^p|J_1$ coincidam com I_1. Segue do Teorema de Mañé, em [3], que existem $n \ge p$ e dois intervalos $J'_0 \subset J_0$ e $J'_1 \subset J_1$ tais que $f^n|J'_0 \cup J'_1$ é uma aplicação cortador de queijos caótica.

Dizemos que uma aplicação unimodal de tipo quadrático $f \in U^r$ é uma *p-tenda*, se contiver p intervalos $I_1, \ldots, I_{p-1}$ tais que: (i) $f \in U^r$ seja um homeomorfismo de I_i para I_{i+1}, para $1 \le i \le p$; (ii) I_p contenha o ponto crítico de $f \in U^r$ e a imagem da aplicação $f^p|I_1$ coincida com I_1. As aplicações p-tenda, com derivada de Schwarz negativa e tal que o ponto -1 seja um ponto fixo hiperbólico e expansivo, têm as seguintes propriedades (ver capítulos III e V em [4]): (i) Possuem propriedades caóticas, (ii) admitem uma medida invariante, ergódica e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, (iii) o expoente de Lyapunov em x está bem definido, é positivo e o seu valor não varia com x, para quase todo o ponto x em $[-1, 1]$.

Universalidade de Feigenbaum–Coullet–Tresser. Feigenbaum, em [2], e, independentemente, Coullet e Tresser, em [1], verificaram que existem valores $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ e $\beta_1 > \beta_2 > \ldots$ para a família quadrática f_λ tais que (i) f_{α_p} é 2^p-super-estável; (ii) f_α é 2^p-ordenada, para $\alpha_p \le \alpha < \alpha_{p+1}$; (iii) f_{β_p} é uma 2^p-tenda; (iv) f_β

é um 2^p-cortador de queijos, para $\beta_{p+1} > \beta \geq \beta_p$; (v) $\gamma = \lim_{p\to\infty} \alpha_p = \lim_{p\to\infty} \beta_p$; (vi)

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_{p+1} - \alpha_p} = \lim_{p\to\infty} \frac{\beta_p - \beta_{p-1}}{\beta_{p+1} - \beta_p} = 4.6692016091029\ldots$$

e

$$\lim_{p\to\infty} \frac{|f^{2^{n+1}}(0)|}{|f^{2^n}(0)|} = 0.3995\ldots\ .$$

Assim, as aplicações f_λ têm comportamento ordenado, para $0 \leq \lambda < \gamma$, e caótico em algum subconjunto de $[-1, 1]$, para $\gamma < \lambda \leq 2$, o que permite concluir que a aplicação f_γ se encontra na fronteira entre a ordem e o caos.

[1] P. Coullet e C. Tresser, *Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation* , J. Phys. C 539 (1978) C5–25.

[2] M. J. Feigenbaum, *Qualitative universality for a class of nonlinear transformations* , J. Statist. Phys. 19 (1978) 25–52.

[3] R. Mañé, *Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics* , Commun. Math. Phys. 100 (1985) 495–524 e Erratum, Commun. Math. Phys. 112 (1987) 721–724.

[4] W. de Melo e S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.