

## **PROGRAMA E RESUMOS**

Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2002

Universidade de Coimbra

5 a 8 de Fevereiro



É com grande prazer que aqui deixo umas palavras de boas vindas aos convidados e participantes deste que é o primeiro Encontro Nacional da SPM do novo milénio.

Sabemos, os números o demonstram, que a comunidade de matemáticos em Portugal é hoje razoavelmente grande. O antigo argumento da falta de “massa crítica” para justificar a pouca visibilidade da Matemática que fazemos não é mais válido. Seguramente nos falta tradição, seguramente nos faltam grandes reformas no sistema escolar, muito em particular no universitário. Os Encontros da SPM não servirão para resolver todos esses problemas, mas estou segura que podem pelo menos ajudar a quebrar uma tendêndia que é muito nossa: a da ligação quase em exclusivo dos nossos matemáticos aos centros internacionais onde obtiveram a sua formação para doutoramento. Conhecermo-nos, tentarmos estabelecer ligações científicas entre nós, é já um grande passo para que um dia (e porque não?) possamos desenvolver verdadeiras Escolas de Matemática no país.

Convém não esquecer que a Matemática que se produz, e a que se transmite, o futuro enfim da disciplina em todos os seus níveis, depende da qualidade da que é ministrada nos ensinamentos básico e secundário. Numa época em que tanto se debate a educação em Portugal, pesa sobre todos nós, docentes dos vários graus de ensino, do básico ao universitário, uma responsabilidade que não nos pode deixar de costas voltadas. Que os Encontros possam também servir essa nobre causa.

Finalmente uma palavra de agradecimento, em nome da direcção da SPM, aos organizadores deste encontro, Professores Doutores José Miguel Urbano e Luís Nunes Vicente. Bem hajam pelo esforço realizado.

Ana Bela Cruzeiro  
Presidente da SPM



Os Encontros Nacionais são um dos principais eventos regulares da Sociedade Portuguesa de Matemática. Constituem uma oportunidade de reunião da comunidade matemática nacional, de investigadores e de professores dos diversos graus de ensino. Sucedendo ao Encontro Nacional de 1998 que teve lugar em Braga, o Encontro Nacional de 2002, ano em que se comemoram os 500 anos do nascimento de Pedro Nunes, realiza-se em Coimbra de 5 a 8 de Fevereiro.

O programa científico do Encontro está estruturado em torno de sessões de comunicações em diversas áreas relevantes no contexto da Matemática em Portugal e é completado por conferências plenárias e um mini-curso em Criptografia, uma área emergente no nosso País.

As questões relacionadas com o Ensino da Matemática merecem uma atenção especial. Para além de um mini-curso e de uma sessão temática, serão discutidas as motivações e objectivos do REANIMAT, o Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário.

A organização agradece o esforço de todos os organizadores de sessões e de todos os oradores e deseja um bom trabalho a todos os participantes.

José Miguel Urbano  
Luís Nunes Vicente



## Apoios

- Centro de Matemática da Universidade de Coimbra
- Departamento de Matemática da FCTUC
- Projecto IST-2000-26063 da União Europeia
- Fundação Calouste Gulbenkian
- Fundação para a Ciência e Tecnologia (Apoio do Programa Operacional Ciência, Tecnologia, Inovação do Quadro Comunitário de Apoio III.)
- Ministério da Educação
- Texto Editora
- Texas Instruments
- Atlântico





## Terça-feira, 5 de Fevereiro

9:00 **ENTREGA DE PASTAS** – Auditório da Reitoria

---

### MINI-CURSOS

---

10:30-12:00 **Miguel de Guzmán**, Universidad Complutense de Madrid  
*Ensino da Matemática* – Auditório da Reitoria

10:30-12:00 **Peter Wild**, Royal Holloway, University of London  
*Cryptography* – Sala Pedro Nunes, DM

---

13:00-14:30 **ALMOÇO**

---

### MINI-CURSOS

---

14:30-16:00 **Miguel de Guzmán**, Universidad Complutense de Madrid  
*Ensino da Matemática* – Auditório da Reitoria

14:30-16:00 **Peter Wild**, Royal Holloway, University of London  
*Cryptography* – Sala Pedro Nunes, DM

---

16:00-16:30 **CAFÉ** – Auditório da Reitoria e Departamento de Matemática

---

### MINI-CURSOS

---

16:30-18:00 **Miguel de Guzmán**, Universidad Complutense de Madrid  
*Ensino da Matemática* – Auditório da Reitoria

16:30-18:00 **Peter Wild**, Royal Holloway, University of London  
*Cryptography* – Sala Pedro Nunes, DM

---

18:00 **ENTREGA DE PASTAS** – Auditório da Reitoria

19:00 **RECEPÇÃO** – Auditório da Reitoria

## Quarta-feira, 6 de Fevereiro

8:30 **ENTREGA DE PASTAS** – Auditório da Reitoria

---

### **SESSÃO DE ABERTURA** – Auditório da Reitoria

---

9:15-10:00 **Ministro da Educação**  
**Ministro da Ciência e da Tecnologia**  
**Reitor da Universidade de Coimbra**  
**Presidente da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UC**  
**Presidente do Departamento de Matemática da FCTUC**  
**Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática**

---

### **SESSÃO EVOCATIVA** – Auditório da Reitoria

Organizador: **João Filipe Queiró**, Departamento de Matemática, FCTUC

---

Sessão Evocativa dos 500 Anos do Nascimento de Pedro Nunes

10:00-10:45 **António Estácio dos Reis**, Lisboa  
*O Nónio de Pedro Nunes*

10:45-11:30 **Henrique Leitão**, CFMC, Universidade de Lisboa  
*Pedro Nunes e Copérnico*

---

11:30-12:00 **CAFÉ** – Auditório da Reitoria

---

### **CONFERÊNCIA DE ABERTURA** – Auditório da Reitoria

*Chair:* Artur Soares Alves

---

12:00-13:00 **Eduardo Marques de Sá**, Departamento de Matemática, FCTUC  
*Caminhos para a Formação de Matemáticos e Professores de Matemática*

---

13:00-14:30 **ALMOÇO**

## Quarta-feira, 6 de Fevereiro

---

### ÁLGEBRA – A1, Sala 2.4-DM

Organizador: **Jorge Almeida**, Departamento de Matemática Pura, FCUP

---

- 14:30-15:00 **Gracinda Gomes**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Ordens de Reticulado Naturais no Semigrupo Inverso Livre*
- 15:00-15:30 **Pedro V. Silva**, Departamento de Matemática Pura, FCUP  
*Subconjuntos Racionais do Grupo Livre*
- 15:30-16:00 **Benjamin Steinberg**, Departamento de Matemática Pura, FCUP  
*O Problema de Extensão para Permutações Parciais*
- 

---

### ENSINO DA MATEMÁTICA – EM1, Auditório da Reitoria

Organizadora: **Suzana Nápoles**, Departamento de Matemática, FCUL

---

- 14:30-15:00 **Ana Paula Silva e Pedro Oliveira**, Esc. Básica 2,3 Cmdt. Conceição e Silva, Cova da Piedade e INETE, Lisboa  
*As Sombras do Tempo...*
- 15:00-15:30 **Ilda Perez Fernandes**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Pavimentações do Plano com Polígonos*
- 15:30-16:00 **Manuel Almeida Silva**, Departamento de Matemática, FCT, UNL  
*Demonstração Matemática: Qual o Papel a Desempenhar no Ensino?*
- 

---

### GEOMETRIA – G1, Sala 2.5-DM

Organizadora: **Ana Cannas da Silva**, Departamento de Matemática, IST

---

- 14:30-15:00 **Rui Loja Fernandes**, Departamento de Matemática, IST  
*A Geometria do Método de Equivalência de Cartan*
- 15:00-15:30 **Rita Gaio**, Departamento de Matemática Pura, FCUP  
*Equações de Vórtices Simplécticos e Invariantes de Acções Hamiltonianas*
- 15:30-16:00 **Margarida Mendes Lopes**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Superfícies, Nodos e Códigos*
- 

- 16:00-16:30 **CAFÉ** – Auditório da Reitoria e Departamento de Matemática

## Quarta-feira, 6 de Fevereiro

---

### FÍSICA-MATEMÁTICA – FM1, Sala 2.3-DM

Organizador: **José Mourão**, Departamento de Matemática, IST

---

- 16:30-17:00 **Rui Vilela Mendes**, Grupo de Física Matemática, Univ. de Lisboa  
*Espaço–Tempo Não–Comutativo e o Princípio de Incerteza*
- 17:00-17:30 **Roger Picken**, Departamento de Matemática, IST  
*Gerbes e Teoria Topológica Quântica do Campo*
- 17:30-18:00 **Ricardo Schiappa**, Department of Physics, Harvard University  
*Quantização por Deformação e Teoria de Cordas Abertas em Espaços Curvos*
- 

---

### HISTÓRIA DA MATEMÁTICA – HM1, Auditório da Reitoria

Organizador: **Luís Saraiva**, Departamento de Matemática, FCUL

---

- 16:30-17:00 **Jaime Carvalho e Silva**, Departamento de Matemática, FCTUC  
*Uma Nova Visão do Papel de Cardano no Desenvolvimento dos Números Complexos*
- 17:00-17:30 **Carlota Simões e João Fernandes**, Dep. de Matemática, FCTUC  
*Sobre o Início e o Fim dos Tempos*
- 17:30-18:00 **José Manuel C. Teixeira**, Esc. EB 2,3 de Soares dos Reis, Vila Nova de Gaia  
*A Polémica do Séc. XVIII Sobre a Utilização das Séries Divergentes nas Demonstrações*
-

## Quarta-feira, 6 de Fevereiro

---

### LÓGICA E COMPUTAÇÃO – LC1, Sala 2.4-DM

Organizador: **Amílcar Sernadas**, Departamento de Matemática, IST

---

- 16:30-17:00 **Fernando Ferreira**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Princípios de Análise Fraca*
- 17:00-17:30 **Isabel Oitavem**, Departamento de Matemática, FCT, UNL  
*Caracterizações Implícitas: Uma Abordagem Comum a  $Ptime$ ,  $Lspace$  e  $NC$*
- 17:30-18:00 **Manuel Lameiras Campagnolo**, Dep. de Matemática, ISA  
*Funções Reais Recursivas*
- 

---

### OPTIMIZAÇÃO – O1, Sala 2.5-DM

Organizador: **Joaquim João Júdice**, Departamento de Matemática, FCTUC

---

- 16:30-17:00 **Margarida Vaz Pato**, Departamento de Matemática, ISEG  
*Optimização no Processo de Decisão. Alguns Casos de Aplicação*
- 17:00-17:30 **João Paulo Costa**, Fac. de Economia da Universidade de Coimbra  
*Determinação de Limites Superiores para os Critérios num Modelo Estocástico Bicritério*
- 17:30-18:00 **Edite M. G. P. Fernandes**, DPS, Universidade do Minho  
*Uma Técnica Quasi-Newton Factorizada para Problemas de Mínimos Quadrados*
- 18:00-18:30 **Suely Oliveira**, Department of Computer Science, University of Iowa  
*Métodos de Subespaço em Programação Semi-Definida*
- 

- 18:30 **ASSEMBLEIA GERAL DA SPM**  
Sala Pedro Nunes, Departamento de Matemática

## Quinta-feira, 7 de Fevereiro

---

### CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS – Auditório da Reitoria

*Chair:* Ana Bela Cruzeiro

---

- 9:00-10:00    **Miguel Abreu**, Departamento de Matemática, IST  
*Matemática Simpléctica: Geometria vs Topologia*
- 10:00-11:00    **Pedro Resende**, Departamento de Matemática, IST  
*Quantales*
- 

11:00-11:30    **CAFÉ** – Auditório da Reitoria

---

### SESSÃO ESPECIAL – Auditório da Reitoria

Organizadores: **Armando Machado** e **Luís Sanchez**, Dep. de Mat., FCUL

---

Motivações e Objectivos do REANIMAT (Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário)

- 11:30-12:00    **Armando Machado**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Origem do Projecto, seus objectivos, sua implantação no terreno e o que foi realizado até à data. As linhas condutoras da nossa proposta de abordagem do tema “Geometria” no 10<sup>o</sup> ano*
- 12:00-12:20    **Luís Sanchez**, Departamento de Matemática, FCUL  
*A nossa proposta de abordagem da iniciação ao estudo das funções no 10<sup>o</sup> ano*
- 12:20-13:00    Discussão
- 

13:00-14:30    **ALMOÇO**

## Quinta-feira, 7 de Fevereiro

---

### ANÁLISE NUMÉRICA – AN1, Sala Pedro Nunes, DM

Organizadora: **Isabel Narra Figueiredo**, Dep. de Matemática, FCTUC

---

- 14:30-15:00 **Paula de Oliveira**, Departamento de Matemática, FCTUC  
*A Simulação Numérica na Indústria do Papel*
- 15:00-15:30 **Hélder Rodrigues**, Departamento de Engenharia Mecânica, IST  
*Projecto Óptimo de Micro Estruturas de Materiais Celulares*
- 15:30-16:00 **Rafael Santos**, FCT, Universidade do Algarve  
*Métodos Móveis: Estimações de Erro na Formulação Mista de Equações de Derivadas Parciais*
- 

---

### ENSINO DA MATEMÁTICA – EM2, Auditório da Reitoria

Organizadora: **Suzana Nápoles**, Departamento de Matemática, FCUL

---

- 14:30-15:00 **Dinis Duarte Pestana**, Dep. de Estat. e Inv. Operacional, FCUL  
*Coelha Confessa aos Pais que Está Grávida. Uma Homenagem à Pintora Paula Rego*
- 15:00-15:30 **Jorge Rezende**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Puzzles com Poliedros e Números*
- 15:30-16:00 **Margarida Mendes Lopes**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Pitágoras, Fermat e os Racionais*
- 

---

### FÍSICA-MATEMÁTICA – FM2, Sala 2.3-DM

Organizador: **José Mourão**, Departamento de Matemática, IST

---

- 14:30-15:00 **Jean-Claude Zambrini**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Integrais de Feynman, Análise Estocástica e Grupos de Lie*
- 15:00-15:30 **Nenad Manojlović**, FCT, Universidade do Algarve  
*Modelos de Gaudin baseados em Superalgebras de Lie*
- 15:30-16:00 **João P. Nunes**, Departamento de Matemática, IST  
*Aspectos Geométricos e Analíticos das Funções Theta*
-

## Quinta-feira, 7 de Fevereiro

---

### LÓGICA E COMPUTAÇÃO – LC2, Sala 2.4-DM

Organizador: **Amílcar Sernadas**, Departamento de Matemática, IST

---

- 14:30-15:00 **José Júlio Alferes**, Departamento de Informática, FCT, UNL  
*“Updates” de Programas em Lógica*
- 15:00-15:30 **Sabine Babette Broda**, Dep. de Ciência de Computadores, FCUP  
*Geração de Habitantes Normais em  $TA_\lambda$*
- 15:30-16:00 **Paulo Mateus**, Departamento de Matemática, IST  
*Protocolos de Computação Segura*
- 

---

### SISTEMAS DINÂMICOS – SD1, Sala 2.5-DM

Organizador: **Luís Barreira**, Departamento de Matemática, IST

---

- 14:30-15:00 **Luís Sanchez**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Heteroclínicas numa Classe de Equações Conservativas de 4<sup>a</sup> Ordem*
- 15:00-15:30 **Jorge Rocha**, Departamento de Matemática Pura, FCUP  
*Conjuntos Robustamente Transitivos e Ciclos Heterodimensionais*
- 15:30-16:00 **Fernando Costa**, Departamento de Matemática, IST  
*Um Sistema de Coagulação Baseado nas Regras de Horton-Strahler de Redes Fluviais*
- 

- 16:00-16:30 **CAFÉ** – Departamento de Matemática



## Quinta-feira, 7 de Fevereiro

---

### ÁLGEBRA – A2, Sala 2.4-DM

Organizador: **Jorge Almeida**, Departamento de Matemática Pura, FCUP

---

- 16:30-17:00 **J. A. Dias da Silva**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Teoria Aditiva para Funções Simétricas*
- 17:00-17:30 **João Filipe Queiró**, Departamento de Matemática, FCTUC  
*Espectros Parciais de Somas de Operadores Hermíticos*
- 17:30-18:00 **Maria Manuel Clementino**, Dep. de Matemática, FCTUC  
*Sobre Álgebras Lusas*
- 

---

### EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS – EDP1, Sala 2.3-DM

Organizador: **João Paulo Dias**, Departamento de Matemática, FCUP

---

- 16:30-17:00 **Hugo Beirão da Veiga**, Dip. di Mat. Applicata, Università di Pisa  
*Direcção da Vorticidade e Regularidade das Soluções das Equações de Navier-Stokes*
- 17:00-17:30 **Isabel Narra Figueiredo**, Dep. de Matemática, FCTUC  
*Análise de Sensibilidades de Placa Não Linear*
- 17:30-18:00 **Pedro M. Girão**, Departamento de Matemática, IST  
*Existência e Não Existência de Soluções de Energia Mínima para um Problema Elíptico Semilinear com Expoente Crítico e um Termo Subcrítico*
- 18:00-18:30 **Hermano Frid**, IMPA, Rio de Janeiro e CMAF-UL  
*Soluções Periódicas e Quase-Periódicas de Leis de Conservação: Existência Global e Decaimento*
-

## Quinta-feira, 7 de Fevereiro

---

### GEOMETRIA – G2, Sala 2.5-DM

Organizadora: **Ana Cannas da Silva**, Departamento de Matemática, IST

---

- 16:30-17:00 **Marco Mackaay**, Univ. do Algarve e Univ. of Nottingham  
*Grupos Categóricos na Geometria Diferencial e na Topologia*
- 17:00-17:30 **António Araújo**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Espaços de Moduli de Germes de Curvas Legendrianas*
- 17:30-18:00 **Peter Gothen**, Departamento de Matemática Pura, FCUP  
*Topologia de Variedades de Representações*
- 18:00-18:30 **Antonio M. Naveira**, Dep. de Geom. y Topol., Univ. de Valencia  
*Two Open Problems in Real and Complex Integral Geometry*
- 

---

### PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA – PE1, Sala Pedro Nunes, DM

Organizadora: **Maria Ivette Gomes**, Dep. de Estat. e Inv. Operacional, FCUL

---

- 16:30-17:00 **Maria F. Brilhante**, Dep. de Matemática, Universidade dos Açores  
*Exponencialidade versus Pareto Generalizada – Um Teste Robusto*
- 17:00-17:30 **Maria João Martins**, Departamento de Matemática, ISA  
*A Metodologia Jackknife na Estimação do Índice de Cauda*
- 17:30-18:00 **Manuel Cabral M. A. Pacheco**, Dep. de Matemática, IST  
*Ordenação Estocástica na Avaliação do Impacto da Autocorrelação em Esquemas de Controlo de Qualidade*
- 

19:30 **JANTAR DO ENCONTRO** – Centro Cultural D. Dinis

## Sexta-feira, 8 de Fevereiro

---

### CONFERÊNCIAS PLENÁRIAS – Auditório da Reitoria

*Chair:* José Francisco Rodrigues

---

- 9:00-10:00    **Luís Almeida**, Université de Nice  
*Estados não Triviais e Propriedades de Conjuntos de Nível  
para Funcionais de Ginzburg-Landau*
- 10:00-11:00    **José Ferreira Alves**, Departamento de Matemática, FCUP  
*Sistemas Caóticos: Uma Perspectiva Probabilística*
- 

11:00-11:30    **CAFÉ** – Auditório da Reitoria

---

### EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS – EDP2, Sala 2.3-DM

Organizador: **João Paulo Dias**, Departamento de Matemática, FCUL

---

- 11:30-12:00    **Anvarbek Meirmanov**, Departamento de Matemática, UBI  
*Soluções Clássicas e Fracas do Problema com Fronteira Livre  
na Célula de Hele-Shaw*
- 12:00-12:30    **Lisa Santos**, Departamento de Matemática, Universidade do Minho  
*Sobre a Limitação do Gradiente na Demonstração de Existência  
de Solução num Problema de Duas Membranas*
- 12:30-13:00    **José Francisco Rodrigues**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Sobre uma Classe de Problemas Unilaterais Não-Locais  
do Tipo Obstáculo*
-

## Sexta-feira, 8 de Fevereiro

---

### ENSINO DA MATEMÁTICA – EM3, Auditório da Reitoria

Organizadora: **Suzana Nápoles**, Departamento de Matemática, FCUL

---

- 11:30-12:00 **Maria Haydée M. Valladares**, CMAF-UL  
*Hipervídeo: Uma Ferramenta para a Comunicação Matemática*
- 12:00-12:30 **António Monteiro**, Universidade Lusíada  
*Imaginar Números*
- 12:30-13:00 **Teresa Fiúza**, Esc. Sec. do Restelo  
*Continuidade e Diferenciabilidade – Exemplos e Contra-Exemplos*
- 

---

### PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA – PE2, Sala Pedro Nunes, DM

Organizadora: **Maria Ivette Gomes**, Dep. de Estat. e Inv. Operacional, FCUL

---

- 11:00-12:00 **Helena Ferreira**, Departamento de Matemática, UBI  
*Comparação de Extremos Locais*
- 12:00-12:30 **Dinis Duarte Pestana**, Dep. de Estat. e Inv. Operacional, FCUL  
*Densidades Definidas Positivas*
- 12:30-13:00 **Carlos Tenreiro**, Departamento de Matemática, FCTUC  
*Estimação Não-Paramétrica da Função de Distribuição:  
EDF vs AKDF e AKDF vs AKDF*
- 

13:00-14:30 **ALMOÇO**

## Sexta-feira, 8 de Fevereiro

---

### ANÁLISE NUMÉRICA – AN2, Sala Pedro Nunes, DM

Organizadora: **Isabel Narra Figueiredo**, Dep. de Matemática, FCTUC

---

- 14:30-15:00 **Adélia Sequeira**, Departamento de Matemática, IST  
*Modelos Matemáticos e Numéricos do Sistema Cardiovascular*
- 15:00-15:30 **Filomena Dias d’Almeida**, Fac. de Engenharia da Univ. do Porto  
*Métodos Baseados em Subespaços de Krylov*
- 15:30-16:00 **A. Pinto da Costa**, Departamento de Engenharia Civil, IST  
*Sistemas com Contacto Unilateral e Atrito de Coulomb:  
Estudo Local de Trajectórias Quase-Estáticas*
- 

---

### HISTÓRIA DA MATEMÁTICA – HM2, Auditório da Reitoria

Organizador: **Luís Saraiva**, Departamento de Matemática, FCUL

---

- 14:30-15:00 **António Leal Duarte**, Departamento de Matemática, FCTUC  
*Uma Colecção de Azulejos (Séc. XVII-XVIII) com Figuras  
dos Elementos de Euclides*
- 15:00-15:30 **Fernanda Estrada**, Dep. de Matemática, Universidade do Minho  
*Notas Sobre o Curso de Analyse Infinitesimal de F. Gomes  
Teixeira. A Construção dos Reais*
- 15:30-16:00 **Reinhard Kahle**, Fakultät für Informatik, Universität Tübingen  
*Hilbert’s Paradox*
-

## Sexta-feira, 8 de Fevereiro

---

### OPTIMIZAÇÃO – O2, Sala 2.4-DM

Organizador: **Joaquim João Júdice**, Departamento de Matemática, FCTUC

---

- 14:30-15:00 **Carlos J. Luz**, ESTS, Instituto Politécnico de Setúbal  
*Sobre o Número de Independência de um Grafo*
- 15:00-15:30 **Domingos M. Cardoso**, Dep. de Matemática, Univ. de Aveiro  
*Problemas Combinatórios em Conjuntos Parcialmente Ordenados*
- 15:30-16:00 **Luís Gouveia**, Dep. de Estat. e Inv. Operacional, FCUL  
*Árvores com Restrições de Diâmetro: Propriedades e Modelos de Fluxo em Redes*
- 

---

### SISTEMAS DINÂMICOS – SD2, Sala 2.5-DM

Organizador: **Luís Barreira**, Departamento de Matemática, IST

---

- 14:30-15:00 **Carlos Rocha**, Departamento de Matemática, IST  
*Atractores de Sistemas Dinâmicos Gerados por Problemas de Reacção-Difusão Singulares*
- 15:00-15:30 **Teresa Faria**, Departamento de Matemática, FCUL  
*Adjuntas Formais para Equações Diferenciais Funcionais Lineares em Espaços de Banach*
- 15:30-16:00 **Alberto Pinto**, Departamento de Matemática Aplicada, FCUP  
*A Fronteira entre o Caos e a Ordem*
- 

16:00 **CAFÉ** – Auditório da Reitoria

Sexta-feira, 8 de Fevereiro

---

**DEBATE** – Auditório da Reitoria

Organização: Direcção da Sociedade Portuguesa de Matemática

---

“O Papel da Educação Matemática nas Várias Profissões”

Com a presença do **Prof. Doutor Mariano Gago**  
(Ministro da Ciência e da Tecnologia)

16:30-19:00 **Dr. José Manuel Fernandes**

Director do Jornal “Público”

**Prof. Doutor Manuel Ricou**

IST e Alcatel Portugal

**Eng. Francisco Sousa Soares**

Bastonário da Ordem dos Engenheiros

**Prof. Doutor Nuno Valério**

Representante do Bastonário da Ordem dos Economistas

**Prof. Doutor Paulo Trincão**

Director do Museu Nacional da Ciência e da Técnica

Representante do Presidente da Associação Industrial Portuguesa

Moderador:

**Prof. Doutor José Francisco Rodrigues**, FCUL

---





## **Títulos e Resumos**

- Mini-cursos
- Conferência de Abertura
- Conferências Plenárias
- Sessão Evocativa dos 500 Anos do Nascimento de Pedro Nunes

---

**MINI-CURSO:** *Ensinando Matemática*

**Miguel de GUZMÁN** – `guzman@ucmax.sim.ucm.es`  
Universidad Complutense de Madrid

Programa:

1. Los gozos estéticos del quehacer matemático.
  2. Experiencias de descubrimiento en Geometría con DERIVE.
    - 2.1. La geometría del triángulo, ayer y hoy. Un posible paradigma para la matemática del futuro.
    - 2.2. Explorar, experimentar, conjeturar y demostrar con DERIVE en Geometría. Presentación de casos concretos.
-

---

## MINI-CURSO: *Cryptography*

**Peter WILD** – P.Wild@rhul.ac.uk

Department of Mathematics, Royal Holloway, University of London

Programme:

1. Cipher systems: An introductory overview of the types and aims of ciphers. Methods and types of attack. Information theory. Statistical tests.
2. Stream ciphers: The one-time pad. Pseudo-random keystreams, properties and generation.
3. Block ciphers: Confusion and diffusion. Iterated ciphers. Substitution and permutation networks. The Feistel principle. Modes of operation.
4. Public key ciphers: Diffie-Hellman key exchange. One-way functions. RSA, El Gamal cryptosystems.
5. Authentication/Digital Signature: Challenge/response. MACs. Identification protocols. Hash functions. Signature schemes.

The first gives an introduction and then the others deal with the four fundamental areas of cryptography. The mathematical background required is only undergraduate algebra and some familiarity with (simple) probability and statistics.

---

---

*Caminhos para a Formação de Matemáticos e Professores de Matemática*

**Eduardo Marques de Sá** – emsa@mat.uc.pt  
Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: A volubilidade dos mercados de trabalho, a compressão na oferta de empregos, a recente definição de estratégias europeias para a área de formação superior, a evolução demográfica, a multiplicação de ofertas de formação, a necessidade imperativa de garantir qualidade real são factores decisivos que terão de pesar no dia-a-dia futuro das instituições de ensino superior. Eles condicionarão a actividade das escolas e a sua existência. Muita imaginação vai ser precisa para travar a descida, num mundo e num tempo em que Matemática é zurzida... inocente, simples mensageira de um indício, ou de um presságio.

---

---

*Matemática Simplética: Geometria vs Topologia*

**Miguel ABREU** – [mabreu@math.ist.utl.pt](mailto:mabreu@math.ist.utl.pt)  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: Os últimos 20 anos têm sido fartos em desenvolvimentos matemáticos onde aparece a palavra “simplética”, i.e. onde uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada determina as questões em estudo. Alguns destes desenvolvimentos são catalogados como pertencendo à área da Geometria Simplética, outros como fazendo parte da Topologia Simplética. Havendo uma quantidade substancial de matemática simplética comum a todos eles, esta divisão não é igualmente aceite por todos e nem sempre se justifica. O “teorema de Darboux” ou o “método de Moser” fazem tanto parte da Geometria como da Topologia Simplética. Há no entanto certas características que podem ser usadas para distinguir os problemas e técnicas mais importantes em cada uma das áreas. Por exemplo, questões relacionadas com a “aplicação momento” e o “teorema de convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg” são normalmente consideradas como sendo de Geometria Simplética, enquanto que questões relacionadas com “curvas holomorfas” e o “teorema de compacidade de Gromov” são normalmente consideradas como fazendo parte da Topologia Simplética.

A primeira parte desta conferência consistirá numa introdução à matemática simplética, acessível a todos os matemáticos participantes neste encontro. Na segunda parte a dicotomia Geometria vs Topologia será ilustrada através da discussão dos seguintes dois problemas, escolhidos unicamente com base no interesse do autor e nos quais houve desenvolvimentos recentes:

Geometria: estudo de “variedades simpléticas tóricas” (ou completamente integráveis);

Topologia: estudo do “grupo de simplectomorfismos” de uma “variedade simplética”.

O significado de todas as expressões entre aspas neste resumo será devidamente explicado ao longo da palestra.

---

---

*Estados não Triviais e Propriedades de Conjuntos de Nível para Funcionais de Ginzburg-Landau*

**Luís ALMEIDA** – `luis@math.unice.fr`  
Université de Nice

Resumo: Uma maneira de obter soluções não triviais para equações com derivadas parciais de Euler-Lagrange associadas a um funcional de energia  $F$  é procurar níveis de energia correspondentes a conjuntos de nível com topologias diferentes. Veremos algumas aplicações simples deste género de método a energias de Ginzburg-Landau. Se o tempo permitir, veremos também como este sistema bifurca a partir da solução trivial quando se desce abaixo da sua temperatura crítica, e como um parâmetro exterior (neste caso a intensidade do campo magnético aplicado) permite seleccionar um ramo de soluções (caracterizado pelo seu grau topológico).

---

---

*Sistemas Caóticos: Uma Perspectiva Probabilística*

**José Ferreira ALVES** – jfalves@fc.up.pt  
Departamento de Matemática Pura, FCUP

Resumo: Entendemos por *sistema dinâmico* qualquer processo que evolua com o tempo. Como exemplos, podemos citar o clima (a atmosfera terrestre, com as suas temperaturas, pressões e humidades), a evolução de uma população num determinado ecossistema, ou ainda a variação das cotações das acções numa bolsa de valores. Em termos matemáticos, é possível modelar muitos desses sistemas apresentando um conjunto  $X$  (espaço de fases) e uma transformação  $f : X \rightarrow X$  que fornece a lei de evolução do sistema: de um estado  $x_0 \in X$  o sistema passa ao estado  $x_1 = f(x_0)$ , que posteriormente passa ao estado  $x_2 = f(x_1)$ , e assim sucessivamente. A sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$  é designada a *órbita* de  $x_0$ . Um dos principais objectivos da teoria dos sistemas dinâmicos consiste em tentar descrever o comportamento das órbitas, pelo menos em termos assintóticos.

Mesmo sistemas com leis de evolução muito simples podem apresentar grande *sensibilidade em relação às condições iniciais*, isto é, partindo de estados iniciais  $x_0$  e  $x'_0$ , ainda que muito próximos, obteremos, em pouco tempo, padrões completamente distintos para o comportamento das suas órbitas. Tais sistemas são ditos *caóticos*. Apesar de, em termos determinísticos, ser muito difícil descrever o comportamento das órbitas de um sistema caótico, em termos probabilísticos a situação pode ser completamente diferente, obtendo-se, muitas vezes, resposta afirmativa à seguinte questão:

- Existe alguma probabilidade  $P$  que meça a frequência de visitas de órbitas  $(x_j)_{j \geq 0}$  a regiões  $A \subset X$ ? Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{0 \leq j < n : x_j \in A\}}{n} = P(A).$$

Uma medida de probabilidade com esta propriedade é denominada uma *medida física* do sistema.

Para efeitos de aplicações da teoria, reveste-se de grande importância o estudo da estabilidade das propriedades estatísticas de um sistema por pequenas perturbações: do estado  $x_0$  o sistema passa a um estado  $x_1^\epsilon$   $\epsilon$ -próximo (a uma distância menor do que  $\epsilon$ ) de  $f(x_0)$ , passando de seguida a um estado  $x_2^\epsilon$   $\epsilon$ -próximo de  $f(x_1^\epsilon)$ , e assim sucessivamente. Uma sucessão  $(x_j^\epsilon)_{j \geq 0}$  tal que  $x_{j+1}^\epsilon$  está  $\epsilon$ -próximo de  $f(x_j^\epsilon)$  é designada uma  $\epsilon$ -*pseudo-órbita*. As questões abaixo aparecem naturalmente.

- Existe, para  $\epsilon > 0$  pequeno, alguma probabilidade  $P_\epsilon$  que meça a frequência de visitas de  $\epsilon$ -pseudo-órbitas a regiões  $A \subset X$ ? Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{0 \leq j < n : x_j^\epsilon \in A\}}{n} = P_\epsilon(A).$$

– Estará  $P_\epsilon$  próxima de  $P$  (medida física do sistema) para  $\epsilon > 0$  pequeno?

Em caso de obtermos resposta afirmativa a ambas as questões acima, dizemos que o sistema é *estocasticamente estável*.

Nesta palestra apresentaremos alguns resultados recentes obtidos conjuntamente com V. Araújo (Univ. Porto), C. Bonatti (Univ. Dijon) e M. Viana (IMPA, Rio de Janeiro), mostrando que certas classes de sistemas caóticos, não só apresentam medidas físicas descrevendo o comportamento estatístico das suas órbitas, como ainda são estocasticamente estáveis.

- [1] J. F. Alves e V. Araújo, *Random perturbations of nonuniformly expanding maps*, a publicar em Astérisque.
  - [2] J. F. Alves, C. Bonatti e M. Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding*, Invent. Math. 140 (2000) 351-398.
-



---

## *Quantales*

**Pedro RESENDE** – `pmr@math.ist.utl.pt`  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: A área da matemática conhecida por *topologia não comutativa* estuda os chamados “espaços não comutativos”, ou “espaços quânticos”, que na verdade são álgebras não comutativas encaradas metaforicamente como se de álgebras de funções se tratasse. Muitos exemplos de tais espaços têm sido estudados no contexto de vários campos da matemática, e em aplicações à física, e de um modo geral o carácter “quântico” dos espaços parece indissociável da teoria.

Um outro tipo de topologia não comutativa baseia-se na noção algébrica de *quantale* e conduz-nos a um conceito de espaço que num determinado sentido é equivalente ao anterior, mas que por outro lado parece ser mais geral, dando origem a certos “espaços dinâmicos”, não necessariamente “quânticos”, que têm sido aplicados em contextos distintos dos da topologia não comutativa clássica, nomeadamente na teoria da computação.

Nesta palestra far-se-á uma digressão pela teoria dos quantales, ilustrando com exemplos algumas das ideias subjacentes.

---

---

*Pedro Nunes e Copérnico*

**Henrique LEITÃO** – leitao@cii.fc.ul.pt  
CFMC, Universidade de Lisboa

Resumo: A obra científica de Pedro Nunes está ainda na sua maior parte por estudar. Em particular, os trabalhos constantes da edição latina de 1566 (depois re-editados em 1573) – isto é, aqueles trabalhos que o próprio Pedro Nunes considerava mais importantes – nunca foram objecto de estudo pormenorizado. Como consequência deste estado de coisas a apreciação que habitualmente se faz das contribuições de Nunes e do seu perfil intelectual é muito incompleta, e algumas vezes mesmo incorrecta.

Nesta comunicação analisamos os comentários e as críticas que Pedro Nunes deixou escritos acerca do *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) de Nicolau Copérnico. Essas apreciações são de grande interesse, quer do ponto de vista técnico, quer na perspectiva mais geral do conhecimento e difusão do copernicianismo em Portugal. São ainda de grande importância pois documentam o modo como a obra de Copérnico foi recebida pelos maiores astrónomos-matemáticos da Europa antes da década de 70 do século XVI, um aspecto de grande interesse na história da astronomia.

Pretende-se ainda deixar claro nesta comunicação que a aproximação histórica às questões de ciência tem como condição necessária, mas não suficiente, o domínio dos temas científicos em apreço.

---

---

*O Nónio de Pedro Nunes*

**António Estácio dos REIS** – `estacioreis@netcabo.pt`

Lisboa

Resumo: Quando os Portugueses, a partir do fim do século XV, começaram a fazer navegação astronómica para se orientarem em viagens oceânicas, usaram, especialmente, o quadrante e o astrolábio para determinar a altura dos astros.

As escalas destes instrumentos, eram graduadas de 0 a 90<sup>o</sup> e os graus não eram subdivididos. Assim, as fracções destes eram calculadas a olho e, portanto, o seu valor dependia de avaliação pessoal.

Pedro Nunes apercebeu-se deste problema e procurou resolvê-lo. Levi ben Gerson (1288-1344) já tinha imaginado a chamada escala diagonal, que era uma solução aceitável e que admitimos que Pedro Nunes desconhecia. Por isso apresentou, em 1542, no seu *De Crepusculis*, uma proposta com o dispositivo que veio a ter a designação de *nónio*.

Este dispositivo, que se baseia na construção de mais 44 escalas paralelas à principal constitui uma solução genial, mas que se tornou de difícil resolução prática. Todavia, e é esse o grande mérito, desencadeou a investigação sobre o assunto que veio a conduzir à solução apresentada, em 1631, por Pierre Vernier, com o seu sector móvel.

Além do nóvio, Pedro Nunes apresentou na sua obra *De Arte atque ratione navigandi libri duo* (1573) outros dois instrumentos náuticos, um deles o *anel náutico* e o outro o *instrumento de sombras*, onde mostra o seu génio inventivo, pois transfere a leitura da altura do Sol para uma escala horizontal.

---



## Títulos e Resumos

- Sessões Temáticas

### **ÁLGEBRA**

Org: Jorge Almeida – jalmeida@fc.up.pt

### **ANÁLISE NUMÉRICA**

Org: Isabel Narra Figueiredo – isabelf@mat.uc.pt

### **ENSINO DA MATEMÁTICA**

Org: Suzana Nápoles – napoles@lmc.fc.ul.pt

### **EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS**

Org: João Paulo Dias – dias@lmc.fc.ul.pt

### **FÍSICA-MATEMÁTICA**

Org: José Mourão – jmourao@math.ist.utl.pt

### **GEOMETRIA**

Org: Ana Cannas da Silva – acannas@math.ist.utl.pt

### **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**

Org: Luís Saraiva – mmff5@lmc.fc.ul.pt

### **LÓGICA E COMPUTAÇÃO**

Org: Amílcar Sernadas – acs@math.ist.utl.pt

### **OPTIMIZAÇÃO**

Org: Joaquim João Júdice – judice@mat.uc.pt

### **PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA**

Org: Maria Ivette Gomes – ivette.gomes@fc.ul.pt

### **SISTEMAS DINÂMICOS**

Org: Luís Barreira – luis.barreira@math.ist.utl.pt

---

*“Updates” de Programas em Lógica*

**José Júlio ALFERES** – `jja@di.fct.unl.pt`

Departamento de Informática, FCT, Universidade Nova de Lisboa

Resumo: Até há bem pouco tempo, o uso da programação em lógica para representação do conhecimento centrava-se essencialmente na representação de conhecimento sobre uma realidade estática, i.e. uma realidade que não evolui ao longo do tempo. Note-se que isto não significava que o conhecimento fosse ele próprio estático: vários trabalhos trataram do problema de como fazer evoluir um programa face à aquisição de mais informação sobre uma dada realidade. Mas, desde 1988 com o trabalho de Winslett, que sabemos que os formalismos lógicos para lidar com actualizações de conhecimento por via de aquisição de nova informação sobre uma realidade estática (i.e. para lidar com revisão de crenças) não são adequados para lidar com actualizações de conhecimento causadas por alterações na realidade modelada (i.e. para lidar com “updates”).

No contexto da programação em lógica o problema de base dos “updates” enuncia-se de forma simples: dada uma sequência de programas  $P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ , onde cada programa  $P_i$  representa informação que passou a estar em vigor no momento  $i$ , o que é verdade em cada momento desde 1 até  $n$ ? Se assumirmos que em cada momento  $i$  esse significado pode ser expresso por apenas um programa em lógica, todas as regras que fazem parte de  $P_i$  terão necessariamente que ser verdadeiras dado esse significado. Quanto às regras introduzidas em momentos anteriores a  $i$ , umas deverão também ter que ser verdadeiras. Mas outras poderão ser falsas, pois correspondem a regras que entretanto foram “desactualizadas” face a informação posterior. Um dos componentes fundamentais na definição de uma semântica declarativa para “updates” de programas é pois o determinar, em cada momento, quais as regras que estão em vigor e quais as que (no todo ou em parte) deverão ser preteridas face à nova realidade. Falar-vos-ei um pouco sobre uma tal semântica declarativa para “updates”, bem como sobre procedimentos (e respectivas implementações) para essa semântica.

No final da comunicação dar-vos-ei ainda conta de alguns domínios de aplicação de “updates” de programas em lógica. E há várias aplicações possíveis. Por exemplo: modelação de leis e regulamentos que vão sendo especificadas e alteradas ao longo do tempo (que leis continuam em vigor? quais foram preteridas face a novas leis?); modelação de alterações a especificações de software; modelação de agentes racionais que deverão saber reagir a um ambiente em mudança (tanto de factos observáveis, como das próprias regras pela qual o agente se deve reger).

---

---

## *Métodos Baseados em Subespaços de Krylov*

**Filomena Dias d'ALMEIDA** – falmeida@fe.up.pt  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Resumo: Os métodos iterativos mais recomendados hoje em dia para a resolução de grandes sistemas, pela sua rapidez, e convergência em grande número de casos, são os métodos baseados em subespaços de Krylov.

A ideia base deste tipo de métodos é procurar uma solução aproximada para o sistema  $Ax = b$  num subespaço de Krylov afim  $x_0 + K_m(A, r_0) = \{v : v = x_0 + \sum_{i=0}^{m-1} c_i A^i r_0\}$ , sendo  $K_m(A, r_0)$  gerado por  $(r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0)$ , onde  $r_0$  é o resíduo de uma solução inicial  $x_0$  dada.

A ortogonalização da base do subespaço de Krylov em causa, é feita por um processo de Gram-Schmidt modificado, e a projecção do problema  $Ax = b$  nesse subespaço, por um processo de Lanczos, ou de Arnoldi, no caso não simétrico, conduzindo a um problema projectado, de menor dimensão, tridiagonal, no caso simétrico, e da forma de Hessenberg, no caso não simétrico.

O problema a resolver, no subespaço de menor dimensão, caracteriza os diferentes métodos de tipo Krylov.

No caso do método do Gradiente Conjugado (CG), que também se pode relacionar com o método da descida mais rápida, no subespaço  $K_m(A, r_0)$  resolve-se um problema de minimização da *norma* –  $A$  do erro. Isto é equivalente a impor que o resíduo de  $x_m$  seja ortogonal a qualquer vector de  $K_m$ .

As tentativas de generalização deste método ao caso não simétrico, em que os resíduos não são ortogonais, deram origem a vários métodos, entre os quais o mais robusto é o método GMRES, *Generalized Minimum RESidual*.

Outros métodos iterativos minimizam o espaço memória requerido, embora sejam menos robustos. É o caso dos métodos BiCG, CGS, BiCGSTAB, QMR.

---

---

*Espaços de Moduli de Germes de Curvas Legendrianas*

**António ARAÚJO** – [aaaraujo@lmc.fc.ul.pt](mailto:aaaraujo@lmc.fc.ul.pt)  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: Construimos espaços de moduli de germes de subvariedades Lagrangeanas cónicas singulares de uma variedade simpléctica de dimensão 4. A projectivização de uma variedade Lagrangeana é uma subvariedade Legendriana de uma variedade de contacto.

---



---

## *Exponencialidade versus Pareto Generalizada – Um Teste Robusto*

**Maria F. BRILHANTE** – fbrilhante@notes.uac.pt  
Departamento de Matemática, Universidade dos Açores

Resumo: A importância da distribuição Pareto Generalizada na análise de valores extremos tem levado alguns estatísticos a propor testes para inferir sobre o parâmetro de forma  $\beta$  da parametrização de von-Mises-Jenkinson da distribuição. Todavia os testes propostos apresentam limite de ruptura zero (cf. Hampel [4] e Hoaglin *et al.* [5]).

Recorrendo a métodos resistentes e robustos propõe-se a estatística  $T_n = \frac{F_U - M}{M - F_L}$ , com limite de ruptura aproximadamente igual a 0.25, para testar exponencialidade (*i.e.*  $\beta = 0$ ) versus Pareto Generalizada, onde  $F_U$ ,  $M$  e  $F_L$  são, respectivamente, o quarto superior, a mediana e o quarto inferior de uma amostra aleatória de dimensão  $n$ . Refira-se que  $T_n$  foi “inspirada” na estatística  $V_n = \frac{X_{n:n} - M}{M - X_{1:n}}$  que foi usada por Gomes [1] para discriminar modelos extremos num contexto similar.

A potência do teste baseado em  $T_n$  será comparada com a dos testes baseados nas estatísticas  $U_n = \frac{X_{n:n}}{M}$  e  $V_n$ . Também será comparada a *performance* de  $T_n$ ,  $U_n$  e  $V_n$  em situações ampliadas e de mistura por forma a avaliar a robustez do teste proposto.

- [1] M. I. Gomes, *A note on statistical choice of extremal models*, Actas IX Jornadas Mat. Hispano-Lusas, Salamanca, (1982) 653-655.
  - [2] M. I. Gomes e M. A. J. van Monfort, *Exponentiality versus generalized Pareto – Quick tests*, Statistical Climatology 87 (1987) 185-195.
  - [3] A. C. Davison e D. V. Hinkley, *Bootstrap Methods and Their Application*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
  - [4] F. R. Hampel, *A general qualitative definition of robustness*, Annals of Mathematical Statistics 42 (1971) 1887-1896.
  - [5] D. C. Hoaglin, F. Mosteller, e J. W. Tukey, *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
-

---

## *Geração de Habitantes Normais em $TA_\lambda$*

**Sabine Babette BRODA** – `sbb@ncc.up.pt`  
Departamento de Ciência de Computadores, FCUP

Resumo: Versões tipadas de sistemas de  $\lambda$ -calculus têm sido estudadas desde o seu aparecimento no início deste século, devido à sua importância para diversas áreas da lógica matemática e ultimamente também para a ciência de computadores. Uma das sub-áreas onde encontra aplicação directa é a programação funcional (e.g. as linguagens ML, Miranda ou Haskell), um exemplo paradigmático duma área na ciência de computadores onde a interligação estreita entre teoria e prática levou a um crescimento frutuoso de ambas: os desenvolvimentos na teoria levam a aplicações práticas directas e as necessidades da implementação suscitam novas abordagens teóricas. De facto, a programação funcional baseia-se na representação de funções computáveis/algoritmos por  $\lambda$ -termos e a execução de programas corresponde à redução de  $\lambda$ -termos. Uma atribuição de tipos a  $\lambda$ -termos fornece então uma especificação parcial dos algoritmos que são representados, e serve para mostrar a correcção parcial dos programas definidos. Por outro lado, usam-se os tipos também para melhorar a eficiência da compilação de programas funcionais (termos), identificando e implementando de maneira adequada, por exemplo, partes (sub-termos) com tipo especial (e.g. aritmético). Na base de praticamente todos os sistemas utilizados encontra-se o sistema  $\mathbf{TA}_\lambda$  o que justifica a atenção que tem recebido no meio científico. Por outro lado, existe uma correspondência directa, via isomorfismo de Curry-Howard, entre  $\mathbf{TA}_\lambda$  e o fragmento implicacional  $P(\rightarrow)$  do cálculo proposicional intuicionista. De facto, um tipo  $\tau$  pode ser inferido para algum  $\lambda$ -termo se e só se  $\tau$  é um teorema de  $P(\rightarrow)$ . Para além disso, cada termo (em forma normal) para o qual  $\tau$  pode ser inferido, i.e. cada habitante (normal) de  $\tau$  representa uma prova (em forma normal) da fórmula  $\tau$  no sistema de dedução natural.

Nesta apresentação começamos por introduzir uma representação alternativa para tipos em  $\mathbf{TA}_\lambda$  (ou equivalentemente para fórmulas em  $P(\rightarrow)$ ). Esta representação evidencia a relação existente entre a estrutura de um tipo e a estrutura dos seus habitantes normais. Baseada nesta representação definimos ainda o conceito de árvore de prova válida para um tipo  $\tau$ . Mostramos que cada uma destas árvores corresponde a um conjunto finito de habitantes normais de  $\tau$  e que todo o habitante normal corresponde exactamente a uma árvore de prova válida para  $\tau$ . Apresentamos algoritmos precisos para estabelecer esta relação. Caracterizamos ainda as árvores de prova que correspondem a habitantes principais normais de um tipo  $\tau$ .

Em 1996, Takahashi et al. mostraram que o conjunto de habitantes normais de um tipo  $\tau$  pode ser descrito utilizando uma generalização do conceito de gramática de contexto livre, em que se pode utilizar um número infinito de símbolos não terminais bem como regras de produção. O conjunto de habitantes normais de  $\tau$  obtém-se então a partir do conjunto de termos gerado por essa gramática infinita,

por redução- $\eta$ . Utilizando a representação introduzida para os tipos em  $\mathbf{TA}_\lambda$ , mostramos que o conjunto de habitantes normais de um tipo  $\tau$  pode de facto ser descrito por uma gramática de contexto livre (finita) e os habitantes normais de tipos com uma mesma estrutura são descritas por gramáticas idênticas, a menos de renomeação de símbolos.

---

---

*Funções Reais Recursivas*

**Manuel Lameiras CAMPAGNOLO** – `mlc@madpet.isa.utl.pt`  
Departamento de Matemática, Instituto Superior de Agronomia

Resumo: Em teoria das funções recursivas definem-se classes de funções que contém um conjunto de funções iniciais e são fechadas relativamente a um conjunto de operações, tais como, por exemplo, composição de funções, iteração ou recursão primitiva. Analogamente, definem-se classes de funções reais recursivas com funções iniciais definidas em  $\mathbb{R}$  e operadores que transformam funções de variável real em funções de variável real, tais como composição ou integração.

As classes de funções recursivas, também designadas por álgebras de funções, possuem propriedades algébricas. Por exemplo, uma dada classe pode ser ou não fechada relativamente a uma determinada operação. Possuem também propriedades computacionais. Por exemplo, uma dada álgebra de funções pode estar ou não contida numa determinada classe de complexidade computacional.

Nesta comunicação mostrar-se-á que o mesmo tipo de questões se colocam para funções reais recursivas. Serão dados exemplos de classes de funções reais recursivas e de propriedades que essas classes possuem.

Adicionalmente, as álgebras de funções definidas em teoria das funções reais recursivas podem possuir propriedades analíticas tais como continuidade ou analiticidade dos elementos dessas álgebras. Consequentemente é possível estabelecer relações entre as suas propriedades computacionais e analíticas.

As principais operações consideradas na definição de classes de funções recursivas são operações de integração de equações diferenciais, i.e., operações que transformam um par de funções na solução de um problema de Cauchy por elas definido. Assim, diversos resultados que serão descritos estabelecem conexões entre a teoria das equações diferenciais e a teoria da complexidade computacional.

---

---

*Problemas Combinatórios em Conjuntos Parcialmente Ordenados*

**Domingos M. CARDOSO** – dcardoso@mat.ua.pt  
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Resumo: Existem muitos problemas práticos que se podem modelar como problemas de ordenação, para cuja resolução se torna especialmente vantajosa a utilização de resultados decorrentes da *Teoria dos Conjuntos Parcialmente Ordenados*. Entre estes contam-se o disciplinamento de tarefas (que é um modelo de optimização combinatória de aplicação frequente), a identificação de subsequências em sequências de informação experimental que indiciam uma certa localização relativa no ADN (que é um problema típico da moderna Biologia Molecular), a detecção de sequências de mensagens com significado relevante (que tem especial importância no processamento de informações), etc..

Por exemplo, suponha-se que de um grande número de experiências laboratoriais decorre a conclusão que uma certa doença tem de ser combatida com a administração de um determinado conjunto de medicamentos. Suponha-se ainda que alguns destes medicamentos, quer por razões de compatibilidade, quer por razões de dosagem, não podem ser administrados antes que outros o sejam e, por outro lado, que entre duas administrações consecutivas de medicamentos com relações de precedência deste tipo, deverão decorrer pelo menos 24 horas. Neste contexto podem colocar-se as seguintes questões:

- (1) Admitindo que a um determinado conjunto de pacientes, devido ao estado adiantado da sua doença, tem de ser imediatamente aplicado o maior número possível de medicamentos compatíveis (i.e., entre os quais não existe qualquer relação de precedência), como se determinam esses medicamentos?
- (2) Tendo em vista a cura completa dos restantes pacientes, qual ordem segundo a qual todos os medicamentos devem ser administrados?

As *relações de ordem parcial* e as suas representações algébricas e combinatórias, proporcionam estruturas matemáticas poderosas para a modelação e resolução de muitos problemas de natureza combinatória, entre os quais se incluem os anteriormente referidos.

Nesta apresentação, analisam-se os principais parâmetros associados a um *conjunto parcialmente ordenado* (como sejam, o comprimento, a largura e a dimensão), bem como as suas principais subrelações e extensões, com particular destaque para as *relações de ordem intervalar*, as *semitransitivas*, as *semiordens*, as *relações de ordem fraca* e as *lineares*. Estudam-se as respectivas representações combinatórias (por intermédio de grafos) e algébricas (com recurso aos espaços vectoriais associados) e abordam-se algumas técnicas para a determinação de extensões fracas e lineares, exemplificando-se as suas aplicações. Finalmente referem-se alguns problemas de investigação corrente relacionados com conjuntos parcialmente ordenados.

---

---

*Sobre Álgebras Lássas*

**Maria Manuel CLEMENTINO** – mmc@mat.uc.pt  
Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: A imersão da categoria dos conjuntos numa bicategoria de matrizes generalizadas permite enfraquecer de forma natural os axiomas de álgebra e de homomorfismo de álgebras para uma mónada, definindo deste modo categorias de álgebras lassas. Estas álgebras abrangem estruturas de índole diversa, que vão desde categorias e multicategorias pequenas, a estruturas topológicas, tais como espaços topológicos, uniformes e métricos. Nesta comunicação introduzimos a teoria das álgebras lassas e mostramos a sua influência na investigação de vários problemas.

---

---

*Sistemas com Contacto Unilateral e Atrito de Coulomb: Estudo Local de Trajectórias Quase-Estáticas*

**A. Pinto da COSTA** – `apcosta@civil.ist.utl.pt`

Departamento de Engenharia Civil, IST

Resumo: Nesta apresentação estudam-se numericamente algumas propriedades locais de trajectórias quase-estáticas de sistemas mecânicos de dimensão finita, em contacto unilateral com atrito com obstáculos rígidos. Este tipo de problemas é regido por um conjunto de equações e condições de comportamento não-suave, isto é, que envolvem operadores não-diferenciáveis nos sentidos de Fréchet ou de Gâteaux. Do estudo de sistemas de pequena dimensão sabe-se que a não-suavidade dos problemas correspondem algumas características locais notáveis nas trajectórias de equilíbrio, nomeadamente, a ocorrência de pontos limite angulosos e de segmentos contínuos de pontos de bifurcação.

De entre os vários problemas de contacto unilateral com atrito, um que capta as características locais das trajectórias é o *problema quase-estático nas taxas*, em que intervêm as derivadas (à direita) dos deslocamentos e das reacções de contacto. Utilizando mudanças de variáveis apropriadas, é possível estabelecer diferentes formulações para o problema das taxas, que podem ser úteis nos estudos de existência/unicidade de solução ou na obtenção numérica de soluções. Nesta comunicação apresentam-se duas formulações para o problema das taxas: uma conduz a um *problema de complementaridade explícito misto*, em que as condições de complementaridade envolvem pares de variáveis (cinemáticas e estáticas) pertencentes a um par de cones duais; a outra formulação conduz a um *problema de complementaridade linear*, em que todos os pares de variáveis complementares pertencem ao primeiro quadrante. O problema das taxas tem uma natureza combinatória, no sentido de que o número de comportamentos tangentes que o sistema mecânico pode exibir a partir de um estado de equilíbrio é função (de crescimento exponencial) do número total de combinações das várias possibilidades de evolução das diversas partículas em deslizamento iminente e em contacto sem reacção. É possível efectuar estudos numéricos completos sobre a ocorrência de bifurcações, se se aplicar um algoritmo devido a De Moor, que permite calcular *todas* as tangentes aos ramos de trajectória de equilíbrio que se iniciam num estado de equilíbrio. Este algoritmo baseia-se em considerações geométricas, é directo e não envolve inversões de matrizes.

Os estudos numéricos apresentados referem-se a um modelo de elementos finitos para uma versão contínua de um exemplo originalmente proposto por Klarbring e que envolvia uma única partícula de contacto. Comparam-se os resultados obtidos com o modelo de elementos finitos com os do modelo original de Klarbring, mostrando-se que, tal como ocorre no modelo com uma só partícula, também o modelo de elementos finitos pode ter multiplicidade ou ausência de solução, para certas direcções das taxas de carregamento e para valores suficientemente elevados do coeficiente de atrito.

**Trabalho conjunto com:** J. A. C. Martins (Departamento de Engenharia Civil, IST).

---



---

*Um Sistema de Coagulação Baseado nas Regras de Horton-Strahler de Redes Fluviais*

**Fernando COSTA** – `fcosta@math.ist.utl.pt`  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: Nos últimos anos têm surgido numerosos estudos matemáticos dedicados à investigação de problemas cinéticos e de transições de fase em sistemas de aglomerados descritos por equações de coagulação-fragmentação. Na maioria destes estudos, os aglomerados são identificados por um número positivo (inteiro ou real) que representa a sua “massa” ou “tamanho”. No entanto, existem outras situações em que um único parâmetro é insuficiente para descrever a população de agregados, nomeadamente em certos problemas de polimerização e na descrição de morfologias alternativas dos agregados. Uma outra situação que surgiu recentemente na literatura é o caso em que a descrição dos agregados envolve dois parâmetros: a sua “massa”  $j$  e a sua “ordem”  $i$ , esta última obedecendo às regras de Horton-Strahler, introduzidas inicialmente em meados do século passado no contexto de estudos de redes fluviais e que se revelaram importantes em diversas outras áreas, desde a biologia à teoria da computação e à teoria dos grafos.

Nesta comunicação começaremos por relembrar as regras de Horton-Strahler e apresentar o sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve a evolução temporal da concentração de agregados de massa  $j$  e ordem  $i$ ,  $c_{i,j}(t)$ . Referiremos brevemente o problema de existência e unicidade mas centraremos a nossa atenção nos resultados sobre o comportamento assintótico de soluções. Mostraremos que, sob condições bastantes gerais, se tem  $c_{i,j}(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . A demonstração utiliza desigualdades diferenciais e o comportamento de duas famílias de funções de Lyapunov fisicamente naturais. Finalizaremos com a referência a resultados sobre o comportamento de quantidades (mesoscópicas) fisicamente relevantes,  $N_i(t)$ , obtidas a partir das variáveis (microscópicas)  $c_{i,j}(t)$ , e com alguns problemas em aberto.

**Trabalho conjunto com:** M. Grinfeld (University of Strathclyde, Glasgow) e J. Wattis (University of Nottingham).

---

---

*Determinação de Limites Superiores para os Critérios num Modelo Estocástico Bicritério*

**João Paulo COSTA** – [jpaulo@inescc.pt](mailto:jpaulo@inescc.pt)

Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra

Resumo: Nesta comunicação estabelecem-se duas propriedades de um modelo estocástico bicritério, baseado em árvores de decisão. O modelo assume que diferentes processos podem ser utilizados para empreender uma tarefa homogénea. Cada utilização de um processo tem um custo e demora um certo tempo, fazendo avançar a tarefa de acordo com um processo binomial. Pretende-se conhecer as estratégias de utilização dos processos por forma a minimizar o custo e o tempo necessários à realização da tarefa. Sendo um modelo que pode ser muito útil em análise de projectos e planeamento de produção, conduz, na maior parte dos casos práticos, a árvores de decisão muito grandes e, conseqüentemente, o tempo gasto na determinação directa das estratégias não dominadas torna-se proibitivo.

As propriedades que se apresentam nesta comunicação estabelecem limites superiores para o custo e o tempo gastos na realização de uma porção da tarefa, auxiliando assim a concepção de algoritmos que ponham de lado partes significativas da árvore de decisão sem que tenham de ser analisadas ou mesmo construídas. Estes limites podem ser especialmente úteis na concepção de algoritmos interactivos onde se pretenda determinar uma estratégia não dominada que represente um compromisso, entre o custo e o tempo, que esteja de acordo com as preferências de um gestor.

**Trabalho conjunto com:** Pedro Godinho (Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra).

---

---

*Uma Colecção de Azulejos (Séc. XVII-XVIII) com Figuras dos Elementos de Euclides*

**António Leal DUARTE** – leal@mat.uc.pt  
Departamento de Matemática, FTCUC

Resumo: Será apresentada uma descrição de uma colecção de azulejos do Museu Machado de Castro com figuras dos Elementos de Euclides bem como das razões que levaram a indentificar essas figuras com reproduções das figuras da versão de Andreias Tacquet dos Elementos de Euclides. Será discutida a possível proveniência dos referidos azulejos.

---

---

*Notas Sobre o Curso de Analyse Infinitesimal de F. Gomes Teixeira.  
A Construção dos Reais*

**Maria Fernanda ESTRADA** – `festrada@math.uminho.pt`  
Departamento de Matemática, Universidade do Minho

Resumo: O Curso de Analyse Infinitesimal de Gomes Teixeira teve quatro edições: 1887, 1890, 1896, 1906. Além destas, há uma versão - que chamamos edição zero - e que foi publicada, em partes, no ANNUARIO DA ESCOLA POLYTECHNICA DO PORTO, desde 1884-85 a 1891-92. Tanto quanto sabemos, os livros da Análise Infinitesimal da época não contemplavam uma introdução sobre os números reais. Parece-nos que Gomes Teixeira se decide a integrar no seu livro tal introdução por razões pedagógicas, no sentido de dar uma fundamentação para o Cálculo Infinitesimal e para a Geometria Analítica. Como se sabe, as principais memórias sobre a construção dos reais são de 1872 (Weierstrass, Heine, Cantor, Dedekind e Meray). Vamos comparar os textos das sucessivas edições do Curso sobre este assunto, procurando destacar:

- i) A actualidade de Gomes Teixeira, que mostra conhecer as memórias citadas e ainda outras posteriores.
- ii) Como Gomes Teixeira vai levantando a sua própria construção dos reais, embora nela se notem influências dos autores citados.
- iii) Como tal teoria é exposta com uma sucessiva exigência de rigor, desde a edição zero até a 4<sup>a</sup> edição.

**Trabalho conjunto com:** Maria da Graça Alves (Departamento de Matemática, Universidade do Minho).

---

---

*Adjuntas Formais para Equações Diferenciais Funcionais Lineares em Espaços de Banach*

**Teresa FARIA** – `tfaria@lmc.fc.ul.pt`  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: Para uma equação diferencial ordinária (EDO) linear  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  de constantes, os espaços central, estável e instável desempenham um papel fundamental na determinação da sua estabilidade, bem como no estudo da estabilidade estrutural ou análise de bifurcações para pequenas perturbações do sistema.

Quando se consideram equações diferenciais funcionais (EDFs) em  $\mathbb{R}^n$  (do tipo retardado), para as quais o espaço de fase é agora um espaço de funções contínuas, resultados análogos foram estabelecidos por Hale no início da década de 70, tendo por base o estudo de equações características de EDFs lineares e a chamada *teoria adjunta formal*. Através da definição de uma equação adjunta e de uma dualidade formais, o espaço de fase é decomposto na soma directa de dois espaços invariantes para a EDF linear em estudo, onde um é o espaço próprio generalizado associado a um conjunto finito  $\Lambda$  de valores próprios e o outro é o espaço “ortogonal” (para a dualidade formal) ao espaço próprio generalizado associado a  $\Lambda$  para a equação adjunta.

Em literatura recente, algumas extensões desta teoria têm sido obtidas para EDFs lineares em espaços de Banach, mas impondo hipóteses bastante fortes, o que limita a sua aplicabilidade a modelos concretos, nomeadamente a equações de reacção-difusão com atrasos. Estas equações têm vindo a ser adoptadas como modelos em dinâmica de populações, quando tanto atrasos no tempo como difusão espacial estão envolvidos.

Neste seminário, impondo hipóteses bastante mais fracas do que as usuais, apresenta-se uma teoria adjunta formal completa para EDFs lineares em espaços de Banach, estendendo os resultados clássicos para EDOs em  $\mathbb{R}^n$  e para EDFs em  $\mathbb{R}^n$ .

**Trabalho conjunto com:** W. Huang (University of Alabama, USA) e J. Wu (York University, Canada).

---

---

*Uma Técnica Quasi-Newton Factorizada para Problemas de Mínimos Quadrados*

**Edite M. G. P. FERNANDES** – emgpf@dps.uminho.pt  
Departamento de Produção e Sistemas, Universidade do Minho

Resumo: Nesta comunicação é apresentada uma técnica Quasi-Newton factorizada para resolver problemas de mínimos quadrados não lineares. São deduzidas duas fórmulas de actualização na forma factorizada, com o objectivo de gerar direcções de procura descendentes para a função objectivo. Sob certas condições, prova-se que o algoritmo tem uma convergência local q-superlinear. As experiências computacionais realizadas mostram que o algoritmo é robusto e eficiente em termos práticos.

**Trabalho conjunto com:** M. Fernanda P. Costa (Departamento de Matemática, Universidade do Minho).

---

---

*Pavimentações do Plano com Polígonos*

**Ilda Perez FERNANDES** – [isilva@cii.fc.ul.pt](mailto:isilva@cii.fc.ul.pt)  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: O tema de fundo desta sessão é o seguinte problema que foi estudado nos anos 1960-70 na área da lógica e computação:

“Considere um conjunto finito de polígonos. Existe algum processo geral para verificar se é ou não possível pavimentar todo o plano com cópias dos polígonos dados?”

O ênfase será posto nos aspectos geométricos relacionados que podem ser desenvolvidos a nível do ensino básico ou secundário.

---

---

*A Geometria do Método de Equivalência de Cartan*

**Rui Loja FERNANDES** – `rfern@math.ist.utl.pt`  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: Muitos problemas em Geometria Diferencial podem ser reduzidos ao seguinte problema básico de equivalência: dados dois co-referenciais  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  e  $\{\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n\}$  numa variedade  $M$  de dimensão  $n$ , quando é que existe um difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow M$  tal que  $\phi^*\theta_i = \tilde{\theta}_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ ? Cartan criou um método para resolver este tipo de problemas, e que funciona no caso local, analítico, pois recorre ao famoso Teorema de Cartan-Kähler. Nesta palestra mostrarei como é que o método de Cartan pode ser descrito de uma forma geométrica. Desta nova descrição resulta que o método funciona localmente no caso  $C^\infty$ , e recorrendo a alguns resultados recentes obtêm-se condições para que funcione globalmente.

---



---

*Princípios de Análise Fraca*

**Fernando FERREIRA** – `ferferr@lmc.fc.ul.pt`  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: A formalização da matemática em sistemas de aritmética de segunda-ordem (sistemas de análise) tem uma história longa e distinta. Pode dizer-se que remonta a Richard Dedekind e que foi objecto de atenção por, entre outros, Hermann Weyl, David Hilbert, Paul Bernays, Georg Kreisel, Solomon Feferman, Harvey Friedman e Stephen Simpson. Tradicionalmente, os sistemas de aritmética de segunda-ordem estudados pressupõem a aritmética recursiva primitiva (finistismo) e, em geral, assumem princípios fortes de formação de conjuntos e/ou indução. A análise fraca investiga a formalização da matemática em sistemas bastante mais fracos, i.e., relacionados com classes notáveis da complexidade computacional.

Em sistemas fracos há questões delicadas sobre a representação dos objectos matemáticos. Nesta conferência, mostramos como se podem representar os números reais e as funções contínuas. Demonstramos o teorema do valor intermédio, o que permite concluir que o nosso sistema interpreta a teoria dos corpos ordenados realmente fechados. Uma consequência interessante deste resultado é a seguinte: a álgebra e a análise elementares (incluindo a geometria euclideana) é interpretável numa teoria aritmética *sem* indução.

Nas últimas duas décadas o programa da *Matemática Recíproca* tem investigado a força lógica e matemática dos teoremas da matemática usual. A cartografia destas relações de força já está delineado nos seus traços gerais, tendo-se obtido um mapa muito interessante. O programa tem-se concentrado nos sistemas aritméticos tradicionais. Um dos objectivos da análise fraca é esboçar um mapa semelhante em que se pressupõem apenas teorias fracas. Mostraremos alguns resultados nesta direcção. Na última década, Ulrich Kohlenbach tem investigado o problema de extrair informação computacional de demonstrações *clássicas* (“proof mining”). No âmbito dos sistemas fracos, esta investigação é potencialmente interessante e, a nosso ver, poderá ser eficazmente conduzida por um mapa do género descrito acima.

Enquanto que o impacto dos computadores na Análise Numérica tem sido tremendo, o impacto da Ciência da Computação nesta disciplina é quase nulo. A razão é simples: a complexidade computacional estuda o discreto, enquanto que a Análise Numérica trabalha com o contínuo. É, noutras roupagens, o antigo problema do contínuo *versus* discreto. Há indícios de que a abordagem do último parágrafo possa contribuir para fundamentar partes da Análise Numérica. São matérias controversas e, antes de tudo, é mister investigá-las!

**Parte deste trabalho foi efectuado em colaboração com:** António M. Fernandes (IST)

---

---

*Comparação de Extremos Locais*

**Helena FERREIRA** – ferreira@fenix2.ubi.pt

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior

Resumo: Para uma sucessão de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, verificando uma condição de independência assintótica de extremos sobre intervalos disjuntos, apresentamos um lema de comparação de extremos locais que nos permite obter a distribuição assintótica da localização das  $s$  ( $s \geq 1$  fixo) maiores estatísticas ordinais.

Obtemos, deste modo, uma aproximação para a probabilidade de serem preservados os  $s$  maiores valores numa amostra censurada uni ou bilateralmente. Em particular, concluímos que a localização do máximo é assintoticamente uniforme, tal como acontece para variáveis independentes e identicamente distribuídas.

O lema de comparação de extremos locais permite também avaliar, em probabilidade e assintoticamente, o tempo entre a ocorrência da primeira excedência de um nível elevado e a ocorrência do máximo.

---

---

*Análise de Sensibilidades de Placa Não Linear*

**Isabel Narra FIGUEIREDO** – `isabel.figueiredo@mat.uc.pt`  
Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: Estuda-se o modo como a solução de um modelo de placa não linear sujeita a obstáculo varia com a geometria. Este tipo de análise está associado a problemas de optimização de forma. Neste caso específico considera-se a sensibilidade da solução relativamente a pequenas perturbações do plano médio da placa. Este estudo é feito aplicando um resultado variacional abstracto de A.B. Levy (1999), onde a análise de sensibilidades de inequações variacionais abstractas em espaços de Banach, sem unicidade de solução, é quantificada em termos de uma derivada generalizada, que é a proto-derivada (R.T. Rockafeller (1989)). Os resultados obtidos generalizam os de M. Rao e J. Sokolowski (1987), (1993) para o caso linear, que foram deduzidos usando a diferenciabilidade do operador de projecção (F. Mignot (1976)). No caso do modelo não linear de placa, a solução pode não ser única e não pode ser caracterizada em termos do operador de projecção sobre o conjunto das restrições definido pelo obstáculo, pelo que houve necessidade de recorrer ao resultado abstracto de A.B. Levy (1999). Prova-se que as hipóteses deste resultado variacional abstracto são verificadas para o caso do modelo de placa não linear sujeita a obstáculo. Mais exactamente, demonstra-se que o conjunto das restrições definido pelo obstáculo é poliédrico e que a solução do modelo, considerada como função do plano médio da placa, é semi-diferenciável.

- [1] A. B. Levy, *Sensitivity of solutions to variational inequalities on Banach Spaces*, SIAM Journal of Control and Optimization 38 (1999) 50-60.
- [2] F. Mignot, *Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques*, Journal of Functional Analysis 22 (1976) 130-185.
- [3] M. Rao e J. Sokolowski, *Sensitivity analysis of Kirchhoff plate with obstacle*, Rapports de Recherche, 771, INRIA-France (1987).
- [4] M. Rao e J. Sokolowski, *Sensitivity analysis of unilateral problems in  $H_0^2(\Omega)$  and applications*, Numerical Functional Analysis and Optimization 14 (1993) 125-143.
- [5] R. T. Rockafeller, *Proto-differentiability of set-valued mappings and its applications in Optimization*, Annales Institut Henri Poincaré, Analyse Nonlinéaire 6 supp. (1989) 449-482.

**Trabalho conjunto com:** Carlos M. Franco Leal (Departamento de Matemática, FCTUC).

---

---

*Continuidade e Diferenciabilidade – Exemplos e Contra-Exemplos*

**Teresa FIÚZA** – `spm@spm.pt`

Esc. Sec. do Restelo

Resumo: Serão apresentados alguns exemplos de funções regulares e de funções não regulares relacionados com as propriedades de continuidade e diferenciabilidade, bem como alguns critérios que garantem que uma dada função pode ser aproximada por funções com alguma regularidade. Evidenciar-se-á que os casos “patológicos” apresentados são, afinal, uma “regra”.

---

---

*Soluções Periódicas e Quase-Periódicas de Leis de Conservação: Existência Global e Decaimento*

**Hermano FRID** – [hermano@impa.br](mailto:hermano@impa.br)  
IMPA, Rio de Janeiro e CMAF-UL

Resumo: Nesta palestra faremos uma exposição de resultados recentes sobre existência global e decaimento de soluções (especialmente) periódicas e quase-periódicas de sistemas hiperbólicos não-lineares de leis de conservação. As aplicações desses resultados incluem sistemas clássicos como o da elasticidade não-linear, as equações de Euler da dinâmica dos gases, relativística e não-relativística, além de equações escalares em várias variáveis espaciais.

---

---

*Equações de Vórtices Simpléticos e Invariantes de Acções Hamiltonianas*

**Rita GAIO** – [argaio@fc.up.pt](mailto:argaio@fc.up.pt)

Departamento de Matemática Pura, FCUP

Resumo: A partir das equações de vórtices simpléticos, definem-se invariantes de acções de grupo Hamiltonianas para valores regulares centrais da aplicação momento. Supõe-se que a variedade simplética (ambiente) é não esférica e que a aplicação momento é própria. Um teorema de existência de órbitas periódicas relativas é apresentado como aplicação da teoria.

---

---

*Existência e Não Existência de Soluções de Energia Mínima para um Problema Elíptico Semilinear com Expoente Crítico e um Termo Sub-crítico*

**Pedro M. GIRÃO** – girao@math.ist.utl.pt  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: Consideramos um domínio regular limitado em  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 5$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $2^* = \frac{2N}{N-2}$ . Mostramos que o expoente  $q = \frac{2(N-1)}{N-2}$  desempenha um papel especial relativamente à existência e não existência de soluções de energia mínima do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + au = u^{2^*-1} - \alpha u^{q-1} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mais precisamente, provamos, em particular, que quando  $q = \frac{2(N-1)}{N-2}$  existe um  $\alpha_0 > 0$  tal que o problema tem uma solução de energia mínima se  $\alpha < \alpha_0$ , e não tem solução de energia mínima se  $\alpha > \alpha_0$ .

**Trabalho conjunto com:** David G. Costa (Department of Mathematical Sciences, University of Nevada).

---

---

*Ordens de Reticulado Naturais no Semigrupo Inverso Livre*

**Gracinda GOMES** – ggomes@cii.fc.ul.pt  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: É bem conhecido que o grupo livre  $FG(X)$ , num conjunto não vazio  $X$ , pode ser totalmente ordenado e que toda a ordem de reticulado que é compatível em  $FG(X)$  é uma ordem total.

Quanto ao semigrupo inverso livre  $FI(X)$  sabe-se que não pode ser totalmente ordenado [2]. No entanto, podemos mostrar que  $FI(X)$  admite ordens de reticulado que são compatíveis, as quais estão intrinsecamente ligadas às ordens totais em  $FG(X)$ . Este resultado surge como consequência do estudo de uma classe mais geral de semigrupos inversos E-unitários naturalmente ordenados.

- [1] L. Fuchs, *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon, Oxford, 1963.
  - [2] T. Saitô, *No free inverse semigroups is orderable*, Proc. Japan Acad. 50 (1974) 837-838.
  - [3] G. M. S. Gomes, E. Giraldes e D. B. McAlister, *On a class of lattice ordered inverse semigroups*, J. Algebra 230 (2000) 496-517.
-



---

## *Topologia de Variedades de Representações*

**Peter GOTHEN** – pbgothen@f.c.up.pt  
Departamento de Matemática Pura, FCUP

Resumo: Seja  $\pi$  um grupo dado por um número finito de geradores e relações e seja  $G$  um grupo de Lie. O conjunto de homomorfismos  $\pi \rightarrow G$  tem uma estrutura natural de variedade. Isto é fácil de ver no caso em que  $G$  é um grupo de matrizes: sendo  $N$  o número de geradores de  $\pi$ , o conjunto de homomorfismos  $\pi \rightarrow G$  pode ser identificado com o subconjunto de  $G^N$  constituído por tuplos de matrizes que satisfazem as relações de  $\pi$ .

Estreitamente ligados com as variedades de representações são os respectivos espaços de moduli, em que se identificam representações isomorfas: isto corresponde a considerar o quociente da variedade de representações pela acção de conjugação por  $G$ .

As propriedades geométricas e topológicas destes espaços são de grande interesse. No caso em que  $\pi$  é o grupo fundamental de uma superfície de Riemann  $X$ , os espaços de moduli podem ser identificados com espaços que têm um ligação estreita com a geometria de  $X$ . Um exemplo famoso deste tipo de resultado é o Teorema de Narasimhan e Seshadri. Este teorema diz que o espaço de moduli de representações unitárias do grupo fundamental de uma superfície é homeomorfo ao espaço de moduli de fibrados vectoriais holomorfos estáveis. Embora a sua construção seja mais complicada, este último espaço tem uma geometria mais rica, essencialmente devido à sua dependência da estrutura conforme da superfície. Este facto permite tirar conclusões muito fortes sobre os espaços de moduli.

O teorema de Narasimhan e Seshadri pode ser generalizado a outros grupos de Lie compactos. No caso de representações do grupo fundamental num grupo de Lie não compacto, também existe um resultado análogo (devido a Corlette, Donaldson, Hitchin e Simpson). Neste caso a variedade de representações é homeomorfa a um espaço de moduli de chamados fibrados de Higgs: estes são pares constituídos por um fibrado holomorfo e uma 1-forma holomorfa com valores nos endomorfismos do fibrado.

Nesta comunicação apresentamos os fibrados de Higgs necessários para estudar representações no grupo pseudo-unitário  $U(p, q)$  e explicamos como estudar o invariante topológico mais básico do respectivo espaço de moduli, nomeadamente o seu número de componentes conexas, usando ideias da Teoria de Morse-Bott. A chave para resolver esta questão é o estudo de certas subvariedades do espaço de moduli que podem ser identificadas com espaços de moduli de chamados ternos holomorfos.

**Trabalho conjunto com:** S. Bradlow (University of Illinois at Urbana Champaign) e O. Gracia-Prada (Universidad Autónoma de Madrid).

---

---

*Árvores com Restrições de Diâmetro: Propriedades e Modelos de Fluxo em Redes*

**Luís GOUVEIA** – [lgouveia@fc.ul.pt](mailto:lgouveia@fc.ul.pt)

Departamento de Estatística e Investigação Operacional, FCUL

**Resumo:** Dado um grafo não orientado, pretende-se determinar uma árvore de suporte de custo mínimo com a restrição adicional de que o seu diâmetro não é superior a um determinado natural  $D$ . Uma maneira intuitiva de garantir a restrição adicional consiste em utilizar diretamente a definição de diâmetro e impôr as seguintes restrições: para qualquer par de nodos, o número máximo de arestas no único caminho na árvore que liga esses dois nodos é não superior a  $D$ . Tais restrições levam a modelos em programação linear inteira com um número exagerado de variáveis. Com o objectivo de reduzir a dimensão de tais modelos, discutem-se propriedades de árvores que representam soluções admissíveis para o problema em estudo. Enquanto que é relativamente fácil sugerir uma boa caracterização de uma árvores com diâmetro  $D$  par, o mesmo já não se passa relativamente ao caso em que  $D$  é ímpar. Assim, grande parte desta comunicação dedica-se a discutir diversas caracterizações de árvores de suporte com diâmetro ímpar bem como diferentes de maneira de escrever modelos de fluxo em redes sugeridos pelas diversas caracterizações.

**Trabalho conjunto com:** Thomas L. Magnanti (Sloan School of Management, MIT) e Cristina Requejo (Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro).

---

---

*Hilbert's Paradox*

**Reinhard KAHLE** – `kahle@informatik.uni-tuebingen.de`  
Fakultät für Informatik, Universität Tübingen

Resumo: In 1903 Gottlob Frege sent a complimentary copy of the second volume of the *Grundgesetze der Arithmetik* to the Göttingen mathematician David Hilbert, containing in the postscript the description of Russell's Paradox. In his response Hilbert declared that the paradox described had been known in Göttingen for a long time. He himself had found other, even more convincing examples four to five years ago, and after having informed Zermelo the latter found the one mentioned by Frege three to four years ago.

It is well known that Zermelo indeed discovered a set-theoretical paradox in Cantor's theory, independently of Russell. But what were these contradictions Hilbert claimed to have found around 1898/1899? There are some further traces of Hilbert's Paradox in correspondences of the time. The most explicit hint can be found in Blumenthal's biography of Hilbert in 1935 where we read that Hilbert formulated the contradictory notion of the set of all sets which arise from union and mapping on themselves.

Volker Peckhaus was able to discover the paradox mentioned by Blumenthal which is most likely the one Hilbert referred to in his letter to Frege. It is presented in an unpublished lecture course of Hilbert's delivered in the summer term of 1905 on "Logische Principien des mathematischen Denkens". There, Hilbert discusses the paradoxes of set theory mentioning Zermelo's paradox and a contradiction of "purely mathematical nature" which was never published, as Hilbert stressed, but known to set-theorists, especially to Georg Cantor.

We will describe Hilbert's Paradox and reconstruct it using modern tools. We will see that it is a variant of Cantor's Paradox based on a naive formulation of the union axiom.

---

---

*Pitágoras, Fermat e os Racionais*

**Margarida Mendes LOPES** – [mmlopes@lmc.fc.ul.pt](mailto:mmlopes@lmc.fc.ul.pt)  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: No plano real um ponto é um ponto racional se  $a$  e  $b$  forem ambos números racionais. Quantos pontos racionais pode ter uma recta? E uma cónica? Qual a relação dos pontos racionais em curvas com os ternos pitagóricos? E com o teorema de Fermat?

---

---

*Superfícies, Nodos e Códigos*

**Margarida Mendes LOPES** – `mmlopes@lmc.fc.ul.pt`  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: Uma superfície algébrica complexa  $\Sigma$  é uma *superfície nodal* se as únicas singularidades são nodos. Superfícies nodais ocorrem “naturalmente”. Por exemplo o quociente de uma superfície não-singular por uma involução é uma superfície nodal.

O estudo do número de nodos que podem existir numa superfície algébrica tem um longo historial, mas ainda hoje é objecto de activa investigação. Um dos instrumentos usados para este estudo é o *código binário linear*  $V$  associado ao conjunto de nodos e os revestimentos ramificados de  $\Sigma$  que podem ser construídos a partir de  $V$ .

Neste seminário será explicada esta técnica e serão apresentados alguns resultados recentes relacionados.

---

---

*Sobre o Número de Independência de um Grafo*

**Carlos J. LUZ** – `cluz@est.ips.pt`

Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, Instituto Politécnico de Setúbal

Resumo: A optimização em grafos têm, actualmente, um papel insubstituível no estudo de numerosos sistemas oriundos de áreas tão distintas como as Telecomunicações, a Electrónica, a Gestão, a Psicologia e a Química, entre outras.

Um dos problemas de optimização em grafos mais investigados consiste na determinação de um conjunto de vértices de um grafo, não adjacentes dois a dois, cuja cardinalidade seja a maior possível. Esta cardinalidade diz-se o número de independência (ou de estabilidade) do grafo. Um subconjunto de vértices do grafo com um número de vértices igual ao número de independência, diz-se um conjunto independente máximo do grafo.

Recorrendo a uma situação concreta, esta comunicação iniciará-se com uma possível motivação para o estudo do número de independência de um grafo. Relacionaremos este número com outros números que caracterizam o grafo e citaremos alguns desenvolvimentos da teoria dos grafos com origem no estudo destes números.

A determinação dum conjunto independente máximo de um grafo (bem como do número de independência) é, em geral, um problema de grande dificuldade, sendo esta tanto maior quanto maior for a dimensão do grafo. Trata-se, efectivamente, de um problema NP-hard, tal é a designação dada a uma classe de problemas que, tal como o problema mencionado, são de muito difícil resolução.

Dadas as dificuldades encontradas em encontrar um algoritmo polinomial para obter o número de estabilidade num grafo qualquer, têm sido propostos na literatura diversos majorantes e minorantes para aproximar aquele número.

Apresentar-se-á nesta comunicação uma revisão dos mais significativos majorantes do número de independência bem como de algumas das suas propriedades. Na parte final, proceder-se-á à comparação dos majorantes apresentados à luz do binómio qualidade da aproximação/tempo

---

---

*Grupos Categóricos na Geometria Diferencial e na Topologia*

**Marco MACKAAY** – pmzmm@maths.nottingham.ac.uk  
Universidade do Algarve e University of Nottingham

Resumo: *Um grupo categórico*  $\mathcal{G}$  é um grupóide com um funtor  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  que satisfaz os axiomas usuais de um produto num grupo. Na teoria de homotopia os grupos categóricos, sempre com a topologia discreta, foram inventados como modelo algébrico de tipos de 2-homotopia de complexos CW. Na minha apresentação vou mostrar que também existem grupos categóricos diferenciais, que chamarei *2-grupos de Lie*. A seguir falarei de *fibrados principais torcidos*, que são fibrados principais a menos de um “defeito abeliano”. Tal como no caso de fibrados principais normais, existem *fibrados vectoriais torcidos* associados, cuja  $K$ -teoria é conhecida pelo nome de *K-teoria torcida* na topologia algébrica. Também existem *conexões torcidas*.

No entanto a definição de *holonomia torcida* tem sido problemática. Apresentarei uma proposta em que defino esta holonomia como um funtor entre dois 2-grupos de Lie, insinuando que um fibrado principal torcido pode ser considerado como um fibrado principal cujas fibras são isomorfos a um 2-grupo de Lie. Formularei um teorema que mostra que tais funtores caracterizam completamente os fibrados principais torcidos com conexões torcidas.

---

---

*Modelos de Gaudin baseados em Superalgebras de Lie*

**Nenad MANOJLOVIĆ** – [nmanoj@ualg.pt](mailto:nmanoj@ualg.pt)

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve

Resumo: O método de espalhamento inverso é aplicado aos modelos de Gaudin baseados em superalgebras de Lie. Os modelos de Gaudin podem ser considerados como limites semi-clássicos de modelos de spin quânticos. Neste contexto, discutimos uma classe de matrizes  $R$  quânticas e os respectivos sistemas de spin. As relações de Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan (FRT) permitem uma escolha natural de Hamiltonianos em involução. O limite semiclássico das relações de FRT é o parentesis linear de Sklyanin. Mostra-se que a involução da função geradora dos Hamiltonianos de Gaudin é uma consequência directa do parentesis de Sklyanin. Os vectores próprios dos Hamiltonianos de Gaudin, que estão relacionados com a matriz  $r$  clássica, são construídos pelo Ansatz algébrico de Bethe. Os correspondentes operadores de criação são definidos por uma relação de recorrência. É encontrada de forma explícita a solução desta relação de recorrência. A acção dos operadores de criação no vector de spin mais baixo dá origem aos vectores de Bethe do modelo. A relação entre os vectores de Bethe e soluções da equação de Knizhnik-Zamolodchikov é estabelecida.

---



---

## *A Metodologia Jackknife na Estimação do Índice de Cauda*

**Maria João MARTINS** – mjmartins@isa.utl.pt  
Departamento Matemática, Instituto Superior Agronomia

**Resumo:** A metodologia jackknife clássico de Quenouille/Tukey ([8] e [10]) constitui, assim como o bootstrap [1], uma ferramenta baseada na reamostragem dos elementos de uma amostra (concretização de uma amostra aleatória), para a obtenção aproximada de propriedades de estimadores. Estas ferramentas são muito úteis quando não é conhecida a distribuição exacta dos estimadores.

A Teoria de Valores Extremos fornece ferramentas para o estudo de fenómenos ou acontecimentos raros. A análise de valores extremos é baseada nas distribuições limite de valores extremos introduzidas por Fisher e Tippet [2] e unificadas por von Mises [7]. O modelo unificado de von Mises depende de um parâmetro  $g$ , designado índice de valores extremos ou índice de cauda. A estimação semiparamétrica de  $g$  depende da escolha de um nível elevado que constitui um parâmetro perturbador já que, para uma classe importante de estimadores de  $g$ , o viés aumenta e a variância diminui com a diminuição do nível. O desenvolvimento de estimadores alternativos com viés reduzido reveste-se de grande importância, já que idealmente permite obter estimadores com menor erro quadrático médio no nível óptimo assim como com menor dependência no nível. A redução de viés pode ser feita recorrendo à metodologia jackknife clássico ou, de forma mais eficiente, através da metodologia jackknife generalizado, introduzida por Shucany, Gray e Owen ([9] e [6]).

A utilização da metodologia jackknife na construção de estimadores de acontecimentos raros com viés (e erro quadrático médio) reduzido foi sugerida por Gomes [3] e desenvolvida por Gomes, Martins e Neves ([5] e [4]).

- [1] B. Efron, *Bootstrap methods: Another look at the jackknife*, Ann. Statist 7 (1979) 1-26.
- [2] R. A. Fisher e L. H. C. Tippet, *Limiting forms of the frequency distribution in the largest particle size and smallest member of a sample*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 24 (1928) 180-190.
- [3] M. I. Gomes, *Metodologias jackknife e bootstrap em estatística de extremos*, Actas do II Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, Luso, Portugal (1994) 31-46.
- [4] M. I. Gomes e M. J. Martins, *Generalized jackknife estimators of the tail index based on the estimation of the second order parameter*, Notas e Comunicações 9/2001, CEAUL (submetido).
- [5] M. I. Gomes, M. J. Martins e M. Neves, *Alternatives to a semi-parametric estimator of parameters of rare events-the jackknife methodology*, Extremes 3 (2000) 207-229.
- [6] H. L. Gray e W. R. Schucany, *The Generalized Jackknife Statistic*, Marcel Dekker Inc., New York, 1972.
- [7] R. Von Mises, *La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs*, Rev. Math. Union Interbalcanique 1 (1936) 141-160, Repr. em Selected Papers of Richard von Mises, Amer. Soc. 2 (1964) 271-294.
- [8] B. Quenouille, *Approximation tests of correlation in time series*, J. R. Statist. Soc. B 11 (1949) 18-84.

[9] W. R. Shucany, H. L. Gray e D. B. Owen, *On bias reduction in estimation*, J. Amer. Statist. Assoc. 66 (1971) 524-533.

[10] J. Tukey, *Bias and confidence in not quite large samples*, Ann. Math. Statist. 29 (1958) 614.

**Trabalho conjunto com:** Maria Ivette Gomes (Departamento de Estatística e Investigação Operacional, FCUL) e Maria Manuela Neves (Departamento Matemática, Instituto Superior Agronomia).

---

---

## *Protocolos de Computação Segura*

**Paulo MATEUS** – pmat@math.ist.utl.pt  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: O problema central da área de computação segura consiste em avaliar uma função publicamente mantendo os seus argumentos secretos. Um exemplo motivador e familiar é o protocolo de eleição, que em termos vagos procede da seguinte forma: depositam-se os votos secretos numa urna, estes são contados por um agente de confiança que, por fim, anuncia o resultado. Como este exemplo indica, na presença de um agente de confiança o problema central é resolvido trivialmente. O objectivo principal deste ramo da criptografia é estabelecer protocolos onde este agente não esteja presente.

Os protocolos propostos na literatura assentam na conjectura da existência de *permutações de sentido único*, que por sua vez implica  $\mathcal{NP} \neq \mathcal{P}$ . Para além destas conjecturas fundamentais e da questão essencial de desenhar protocolos, o principal problema levantado nesta área consiste em demonstrar que os protocolos são invioláveis, tendo em linha de conta que uma certa percentagem de participantes é honesta. Para este problema apresentam-se detalhadamente os dois resultados centrais: uma função pode ser computada em segurança usando canais privados caso a maioria dos participantes seja honesta; uma função pode ser computada em segurança usando canais públicos caso mais de dois terços dos participantes sejam honestos. Saliencia-se que estes resultados baseiam-se numa série de suposições, tais como os participantes honestos nunca podem ser corrompidos, que quando adulteradas resultam num novo problema, muitas vezes aberto. Este facto justifica uma apresentação cuidada de todas estas suposições, que, em geral, se edificam em seis parâmetros: número de participantes; percentagem de participantes desonestos (chamados de adversários); tipo de adversários; complexidade computacional dos participantes; erro permitido; tipo de canais.

Após percorrer rapidamente os resultados obtidos nas diversas variantes do problema em mente, observa-se que todos eles são obtidos de forma similar, i.e., mostrando que o protocolo proposto simula o protocolo ideal com um agente de confiança. Para os casos em aberto, nota-se que o conceito de segurança encontra-se ainda por definir rigorosamente. Para um caso conhecido, a noção de segurança é apresentada e discutida usando uma álgebra de processos probabilísticos munida de uma relação de simulação.

Finalmente, tendo em linha de conta que todos os resultados na literatura são obtidos caso a caso, apresenta-se a necessidade de criar métodos formais, tais como os baseados em lógicas modais (já existentes para protocolos de autenticação), para provar que os protocolos de computação segura são invioláveis, ou por outro lado, encontrar falhas nos mesmos.

---

---

*Soluções Clássicas e Fracas do Problema com Fronteira Livre na Célula de Hele-Shaw*

**Anvarbek MEIRMANOV** – meirman@ubi.pt

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior

Resumo: Foram provadas a existência de solução fraca e soluções clássicas do problema de Hele-Shaw bem posto, no caso geral da geometria do domínio inicial e condições da fronteira dada. Para as soluções clássicas foram utilizados dois métodos: estimativas energéticas e o método da teoria dos potenciais. O primeiro método, no caso  $n = 2$ , exige condições mínimas para a posição inicial da fronteira livre. O segundo método estabelece estimativas exactas das soluções clássicas.

---

---

*Espaço – Tempo Não – Comutativo e o Princípio de Incerteza*

**Rui Vilela MENDES** – vilela@cii.fc.ul.pt  
Grupo de Física Matemática, Universidade de Lisboa

Resumo: A álgebra da mecânica quântica relativista (Lorentz mais Heisenberg) é instável. A sua estabilização por deformações introduz dois parâmetros, um com dimensão de comprimento e outro um sinal arbitrário. Estudam-se as consequências da álgebra deformada na relação de incerteza e na densidade de estados. Os resultados são comparados com os obtidos em teoria da gravitação e na teoria das cordas.

---

---

*Imaginar Números*

**António MONTEIRO** – amonteiro@ip.pt  
Universidade Lusíada

Resumo: O conceito de número complexo foi, como se sabe, desenvolvido com o propósito de resolver determinados problemas relacionados com a resolução de equações algébricas. O corpo dos números complexos, por sua vez, aparece como uma extensão algébrica, de grau dois, do corpo dos reais.

No plano pedagógico, o conceito de extensão de um corpo, a construção de um anel quociente, a própria noção de passagem ao quociente, revestem-se de algumas dificuldades.

No presente trabalho, apresenta-se uma sugestão para a apresentação dessas ideias, partindo de noções muito elementares, na verdade ao alcance de qualquer aluno dos anos terminais do ensino secundário. Através desse método de exposição, obtém-se uma construção do corpo dos complexos, que pode ser facilmente estendida a outras construções similares, produzindo diferentes extensões do corpo dos reais.

---

---

*Two Open Problems in Real and Complex Integral Geometry*

**Antonio M. NAVEIRA** – [naveira@uv.es](mailto:naveira@uv.es)

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Valencia

Resumo: In this lecture we state two problems related with Integral Geometry.

In the first we try to obtain analytical inequalities which become equivalent to the inequalities among the integrals of the mean curvatures of a hypersurface in the euclidean space.

The second problem is related to the Complex Integral Geometry. We try to analyse the “complex quermassintegrals” of a convex body contained in the complex euclidean space.

---

---

*Aspectos Geométricos e Analíticos das Funções Theta*

**João P. NUNES** – [jpnunes@math.ist.utl.pt](mailto:jpnunes@math.ist.utl.pt)  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: Seja  $X$  uma superfície de Riemann compacta. As funções theta clássicas podem ser descritas como secções holomorfas de fibrados sobre a Jacobiana da curva  $X$ . De modo análogo, as funções theta não-abelianas são definidas como secções holomorfas de fibrados apropriados sobre o espaço moduli de fibrados vectoriais sobre  $X$ . Iremos descrever resultados recentes sobre aspectos analíticos destas funções, relacionados com a transformada de estados coerentes associada a um grupo de Lie compacto  $G$ .

---



---

*Caracterizações Implícitas: Uma Abordagem Comum a Ptime, Lspace e NC*

**Isabel OITAVEM** – `isarocha@lmc.fc.ul.pt`

Departamento de Matemática, FCT, Universidade Nova de Lisboa

Resumo: Todas as classes de complexidade computacional são, em primeira instância, definidas com base em processos mecânicos (máquinas de Turing, circuitos ou outros), sobre os quais eventualmente recaem limitações quanto aos recursos disponíveis durante a computação. Para muitas das mais relevantes classes de complexidade têm vindo a ser estabelecidas caracterizações onde quer o processo mecânico em questão quer os recursos disponíveis estão implícitos — *caracterizações implícitas*. A obtenção de caracterizações implícitas, para além do seu interesse intrínseco, permite-nos transpor problemas do âmbito da complexidade computacional para outros domínios.

É nosso objectivo descrever caracterizações implícitas de três classes de complexidade: *Ptime*, *Lspace* e *NC*. As caracterizações aqui apresentadas são expressas num contexto de álgebras livres. Isto permite-nos obter caracterizações implícitas de classes tão diversas como *Ptime*, *Lspace* e *NC* mudando apenas a álgebra de base. Deste modo, damos uma abordagem comum a classes de complexidade computacional que resultam de processos computacionais tão diferentes como deterministas e alternados com restrições de tempo, espaço ou tempo e espaço.

---

---

## *A Simulação Numérica na Indústria do Papel*

**Paula de OLIVEIRA** – poliveir@mat.uc.pt  
Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: A indústria do papel ocupa um lugar particularmente importante nas economias europeias. Para melhorar a qualidade da pasta de papel é fundamental dispôr de métodos numéricos que simulem a experimentação em situações em que esta comporte riscos ou que assuma alguma complexidade.

Na indústria da pasta de papel o equipamento central, que se designa por digestor, é um reactor de leito móvel onde ocorre a transformação de aparas de madeira em pasta de papel.

Neste trabalho ilustramos a interface entre um processo industrial muito complexo – o funcionamento do digestor – e a modelação matemática, evidenciando-se que esta relação interdisciplinar pode ser muito frutuosa, pois fornece, do ponto de vista da Engenharia Química, uma alternativa à experimentação, mais flexível e económica e, do ponto de vista da matemática, porque sugere um vasto número de problemas passíveis de serem objecto de investigação fundamental.

O funcionamento do reactor é explicado de modo simples, sendo introduzidas as equações de derivadas parciais de difusão – convecção – reacção que descrevem tal funcionamento. A solução analítica deste sistema não sendo conhecida, são introduzidos métodos numéricos que fornecem simulações precisas, relativas à concentração de reagentes e à temperatura a que decorrem as operações.

---

---

*Métodos de Subespaço em Programação Semi-Definida*

**Suely OLIVEIRA** – oliveira@cs.uiowa.edu

Department of Computer Science, University of Iowa

Resumo: Os problemas de programação semi-definida (PSD) são problemas de otimização da forma  $\min_X C \bullet X$  sujeito a  $A_i \bullet X = a_i, i = 1, 2, \dots, m$ , em que  $X$  é uma matriz simétrica semi-definida positiva. Note-se que  $A \bullet B = \text{trace}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ . Os problemas de PSD têm sido utilizados recentemente para aproximar problemas difíceis em otimização combinatória. Os problemas de PSD, embora mais fáceis que os problemas combinatórios que aproximam, não podem ser utilizados directamente em problemas de grandes dimensões: se  $X$  for  $n \times n$ , então, na prática,  $n$  está limitado a aproximadamente  $3 \times 10^3$ . O nosso trabalho incide sobre a utilização de técnicas de subespaço para resolver problemas de PSD de grandes dimensões. Os resultados numéricos considerados resultam da aplicação destas técnicas a problemas de PSD provenientes do problema da partição de grafos.

---

---

*Ordenação Estocástica na Avaliação do Impacto da Autocorrelação em Esquemas de Controlo de Qualidade*

**Manuel Cabral M. A. PACHECO** – `apacheco@math.ist.utl.pt`  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: A detecção de desvios do valor esperado de dados autocorrelacionados pode ser efectuada através do registo dos resíduos dos dados naquilo que habitualmente se designa de esquemas de controlo residuais.

Subjacente à análise destes e doutros esquemas, está aquela que é, indiscutivelmente, a mais popular de todas as medidas de desempenho, o “run length” ( $RL$ ) ou o número de amostras recolhidas até à emissão de um sinal. O conhecimento da respectiva distribuição desempenha um papel preponderante na avaliação da capacidade dos esquemas de controlo para assegurar a qualidade de um processo bem como do impacto da autocorrelação no desempenho dos esquemas residuais.

Não surpreende pois que nos sintamos compelidos a comparar características que digam respeito aos  $RL$ s de tais esquemas, como: o “average run length” ( $ARL$ ), de longe a medida de desempenho mais utilizada na literatura; ou a função de sobrevivência do  $RL$  e a função taxa de falha do  $RL$ .

Ao efectuar uma comparação com o figurino descrito acima está-se, inevitavelmente, a estabelecer uma relação de ordem estocástica entre desempenhos. Uma relação de ordem deste tipo permite avaliar – de um modo qualitativo e mais objectivo – a forma como a capacidade de detecção de um esquema se altera face a modificações nos parâmetros de planeamento e intrínsecos ao modelo dos dados.

Neste trabalho avalia-se a influência do parâmetro autoregressivo na velocidade de detecção de esquemas residuais para o valor esperado de processos estacionários gaussianos  $AR(1)$ .

---

---

*A Optimização no Processo de Decisão. Alguns Casos de Aplicação*

**Margarida Vaz PATO** – [mpato@iseg.utl.pt](mailto:mpato@iseg.utl.pt)  
Departamento de Matemática, ISEG

Resumo: Nos mais diversos sectores da actividade económica, os agentes decisores são chamados a fazer opções tendo que considerar uma ampla e complexa gama de condicionalismos. Em tais circunstâncias, depois de identificar um problema, a sua abordagem por intermédio de simples modelizações matemáticas poderá, para além de ajudar a clarificar a situação, apoiar a tomada de decisão e fornecer argumentos sólidos de justificação junto dos vários intervenientes ou utentes do processo. Acresce o facto de actualmente a internet e as folhas de cálculo disponibilizarem software standard de fácil utilização para resolução de problemas de pequena dimensão.

Nesta comunicação serão apresentados alguns problemas reais surgidos na área financeira, na gestão empresarial e na administração pública, seguindo-se as respectivas modelizações no contexto da optimização combinatória. Referir-se-á o software aplicado em cada caso e comentar-se-ão brevemente os resultados obtidos.

---

---

*Coelha Confessa aos Pais que Está Grávida. Uma Homenagem à Pintora Paula Rego*

**Dinis Duarte PESTANA** – [dinis.pestana@fc.ul.pt](mailto:dinis.pestana@fc.ul.pt)  
Departamento de Estatística e Investigação Operacional, FCUL

Resumo: Uma coelha muito instruída resolveu contar quantos filhos vai ter até nascerem dois machos consecutivamente, pela primeira vez. Pretende a coelha saber qual é a probabilidade de ser necessário ter  $n$  filhos para conseguir aquele feito.

**Trabalho conjunto com:** Silvio Filipe Velosa (Departamento de Matemática, Universidade da Madeira).

---

---

## Densidades Definidas Positivas

**Dinis Duarte PESTANA** – `dinis.pestana@fc.ul.pt`

Departamento de Estatística e Investigação Operacional, FCUL

Resumo: A função característica de uma variável gaussiana padrão é, a menos de uma constante multiplicativa, a sua função densidade de probabilidade. Tal como a gaussiana, outras funções características são “auto-recíprocas”.

Dizemos que o par de funções densidade de probabilidade  $(f_x, f_{\tilde{x}})$  é um par recíproco sse  $f_{\tilde{x}}$  for, a menos de uma constante normalizadora, a função característica correspondente a  $f_x$ . Um exemplo bem conhecido: as funções densidade de probabilidade da variável de Laplace da variável de Cauchy, constituem um par recíproco,  $(\frac{1}{2} e^{-|x|}, \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2})$ .

No caso de  $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$ , dizemos que é uma variável aleatória auto-recíproca, ou que a correspondente função característica, ou função densidade de probabilidade, é auto-recíproca. De facto, se uma função característica for positiva e integrável, a correspondente função densidade de probabilidade  $f_x$  é positiva definida, e considerando o par recíproco  $(f_x, f_{\tilde{x}})$ , constata-se imediatamente que

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{f_{\tilde{x}}(0)}}{\sqrt{f_x(0)+\sqrt{f_{\tilde{x}}(0)}}} f_x(x) + \frac{\sqrt{f_x(0)}}{\sqrt{f_x(0)+\sqrt{f_{\tilde{x}}(0)}}} f_{\tilde{x}}(x)$$

é uma função densidade de probabilidade auto-recíproca. Do par recíproco  $(\frac{a}{2} e^{-a|x|}, \frac{1}{a\pi} \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2})$ , obtemos a função densidade de probabilidade auto-recíproca  $f_Y(x) = \frac{a}{a\sqrt{2\pi}+2} e^{-a|x|} + \frac{1}{a\pi+\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}$ . Assim, a forma analítica das funções auto-recíprocas é em geral uma combinação convexa de parcelas analiticamente muito diversas, embora sejam conhecidas excepções para além da gaussiana, por exemplo  $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sech} \sqrt{\frac{\pi}{2}} x$ .

Exploramos a auto-reciprocidade, usando a relação de Parseval, para estabelecer diversas propriedades fulcrais das funções características: teorema da unicidade, fórmula de inversão no caso de funções características de  $L^1$ , teorema da continuidade de Lévy-Cramér.

Funções características auto-recíprocas e pares recíprocos foram investigados por Lévy (1967), Teugels (1975), Pestana (1983) e Pestana *et al.* (2001), onde podem ser encontradas referências complementares, nomeadamente devido às suas relações com divisibilidade infinita, estabilidade e unimodalidade. Lévy (1967) foi o primeiro a observar que o conjunto de funções características positivas constitui um cone convexo, e Teugels (1971) procurou determinar os pontos extremos que permitiriam uma representação integral de Choquet.

Caracterizamos as variáveis aleatórias auto-recíprocas através de uma equação funcional envolvendo funções características de produtos, e discutimos a sua repre-

sentação como valor médio de uma variável suportada pelo conjunto dos pontos extremos do conjunto convexo que constituem. Estabelecem-se também resultados sobre leis estáveis e leis infinitamente divisíveis.

- [1] P . Lévy, *Fonctions caractéristiques positives* , C. R. Acad. Sci. Paris 265A (1967) 249-252.
- [2] D. Pestana, *On self-reciprocal probability density functions* , Publ. Inst. Statist. Un. Paris 28 (1983) 81-92.
- [3] D. Pestana, F. Sequeira e S. Velosa, *Parseval's relation and self-reciprocal probability density functions*, Rev. Estat. 11 (2001) 315-316.
- [4] J. Teugels, *Probability density functions which are their own characteristic functions* , Bull. Soc. Math. Belg. 23 (1971) 236-262.

**Trabalho conjunto com:** Fernando Sequeira (Departamento de Estatística e Investigação Operacional, FCUL) e Sílvio Filipe Velosa (Departamento de Matemática, Universidade da Madeira).

---



---

*Gerbes e Teoria Topológica Quântica do Campo*

**Roger PICKEN** – `picken@math.ist.utl.pt`  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: *Gerbes* com conexões constituem uma estrutura geométrica de ordem superior, que generaliza os fibrados com conexões (o enquadramento matemático da teoria de *gauge*), prometendo aplicações interessantes em diferentes áreas da Física. A descrição da geometria em termos de formas e funções locais, ou seja, cujo domínio é constituído por pontos da variedade, é equivalente, num sentido preciso (M. Mackaay e R. Picken, `math.DG/0007053`), a uma descrição em termos de holonomia e transporte paralelo, conceitos não-locais associados a lacetes e curvas na variedade, no caso dos fibrados, ou a superfícies na variedade, no caso dos gerbes. Nesta palestra a equivalência referida será abordada da perspectiva da chamada Teoria Topológica Quântica do Campo (TTQC, ou TQFT na sigla inglesa). A TTQC é uma noção abrangente, que pode ser caracterizada, para os efeitos da palestra, como sendo uma representação de objectos topológicos com estrutura, análoga à representação matricial dos elementos de um grupo, e bem-comportada sob a colagem de objectos.

---

---

*A Fronteira entre o Caos e a Ordem*

**Alberto PINTO** – aapinto@fc.up.pt  
Departamento de Matemática Aplicada, FCUP

Resumo: A transição da ordem para o caos através de sucessivas duplicações de período foi constatada para diversas famílias unimodais de tipo quadrático, e, em particular, para a família quadrática  $f_\lambda(x) = -\lambda x^2 + \lambda - 1$ , com  $\lambda \in [0, 2]$ . Um dos factos mais surpreendentes neste fenómeno foi a descoberta de quantidades universais que lhe estão associadas. Para explicar estes fenómenos passamos à descrição de aplicações unimodais classificando-as em  $p$ -ordenadas,  $p$ -cortadoras de queijos e  $p$ -tendas.

**Aplicações  $p$ -ordenadas,  $p$ -cortadoras de queijos e  $p$ -tendas.** Dizemos que  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  é uma *aplicação unimodal de tipo quadrático de classe  $C^r$* , se  $f(x) = \phi(x^2)$ , onde  $\phi : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  é uma aplicação de classe  $C^r$  com derivada não nula e tal que  $f(-1) = -1$ . Definimos  $U^r$  como sendo o conjunto constituído por todas as aplicações unimodais de tipo quadrático de classe  $C^r$ .

Dizemos que uma aplicação unimodal de tipo quadrático  $f \in U^r$  é  *$p$ -ordenada*, se contiver uma órbita periódica que atraia quase todos os pontos do intervalo  $[-1, 1]$ , com respeito à medida de Lebesgue. Dizemos que  $f$  é  *$p$ -super-estável*, se  $f$  for  $p$ -ordenado e o ponto crítico de  $f$  pertencer à órbita atractora de  $f$ .

Dizemos que uma aplicação unimodal de tipo quadrático  $f \in U^r$  é um  *$p$ -cortador de queijos*, se contiver  $p$  intervalos  $I_1, \dots, I_{p-1}$  tais que: (i)  $f$  seja um homeomorfismo de  $I_i$  para  $I_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq p$ ; (ii)  $I_p$  contenha o ponto crítico de  $f_\lambda$ ; (iii) existam dois intervalos fechados e disjuntos,  $J_0$  e  $J_1$ , contidos em  $I_p$ , com as propriedades de não conterem o ponto crítico e cada um deles ter um extremo comum a  $I_p$ ; (iv) as imagens das aplicações  $f^p|_{J_0}$  e  $f^p|_{J_1}$  coincidam com  $I_1$ . Segue do Teorema de Mañé, em [3], que existem  $n \geq p$  e dois intervalos  $J'_0 \subset J_0$  e  $J'_1 \subset J_1$  tais que  $f^n|_{J'_0 \cup J'_1}$  é uma aplicação cortador de queijos caótica.

Dizemos que uma aplicação unimodal de tipo quadrático  $f \in U^r$  é uma  *$p$ -tenda*, se contiver  $p$  intervalos  $I_1, \dots, I_{p-1}$  tais que: (i)  $f \in U^r$  seja um homeomorfismo de  $I_i$  para  $I_{i+1}$ , para  $1 \leq i \leq p$ ; (ii)  $I_p$  contenha o ponto crítico de  $f \in U^r$  e a imagem da aplicação  $f^p|_{I_1}$  coincida com  $I_1$ . As aplicações  $p$ -tenda, com derivada de Schwarz negativa e tal que o ponto  $-1$  seja um ponto fixo hiperbólico e expansivo, têm as seguintes propriedades (ver capítulos III e V em [4]): (i) Possuem propriedades caóticas, (ii) admitem uma medida invariante, ergódica e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, (iii) o expoente de Lyapunov em  $x$  está bem definido, é positivo e o seu valor não varia com  $x$ , para quase todo o ponto  $x$  em  $[-1, 1]$ .

**Universalidade de Feigenbaum–Coullet–Tresser.** Feigenbaum, em [2], e, independentemente, Coullet e Tresser, em [1], verificaram que existem valores  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$  e  $\beta_1 > \beta_2 > \dots$  para a família quadrática  $f_\lambda$  tais que (i)  $f_{\alpha_p}$  é  $2^p$ -super-estável; (ii)  $f_\alpha$  é  $2^p$ -ordenada, para  $\alpha_p \leq \alpha < \alpha_{p+1}$ ; (iii)  $f_{\beta_p}$  é uma  $2^p$ -tenda; (iv)  $f_\beta$

é um  $2^p$ -cortador de queijos, para  $\beta_{p+1} > \beta \geq \beta_p$ ; (v)  $\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \beta_p$ ;  
(vi)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\alpha_{p+1} - \alpha_p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\beta_p - \beta_{p-1}}{\beta_{p+1} - \beta_p} = 4.6692016091029\dots$$

e

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{|f^{2^{n+1}}(0)|}{|f^{2^n}(0)|} = 0.3995\dots$$

Assim, as aplicações  $f_\lambda$  têm comportamento ordenado, para  $0 \leq \lambda < \gamma$ , e caótico em algum subconjunto de  $[-1, 1]$ , para  $\gamma < \lambda \leq 2$ , o que permite concluir que a aplicação  $f_\gamma$  se encontra na fronteira entre a ordem e o caos.

- [1] P. Couillet e C. Tresser, *Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation*, J. Phys. C 539 (1978) C5-25.
  - [2] M. J. Feigenbaum, *Qualitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Statist. Phys. 19 (1978) 25-52.
  - [3] R. Mañé, *Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics*, Commun. Math. Phys. 100 (1985) 495-524 e Erratum, Commun. Math. Phys. 112 (1987) 721-724.
  - [4] W. de Melo e S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
-

---

*Espectros Parciais de Somas de Operadores Hermíticos*

**João Filipe QUEIRÓ** – jfqueiro@mat.uc.pt  
Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: Dados dois espectros reais  $\alpha$  e  $\beta$ , e um espectro parcial  $\gamma'$ , como saber se existem operadores hermiticos  $A$  e  $B$ , com espectros  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente, tais que  $\gamma'$  seja parte do espectro de  $A + B$ ?

Nesta palestra far-se-ão algumas observações sobre este problema em aberto.

---

---

*Puzzles com Poliedros e Números*

**Jorge REZENDE** – rezende@alf1.cii.fc.ul.pt  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: Esta comunicação incidirá na utilidade dos “puzzles” no ensino e aprendizagem da Matemática a todos os níveis (desde o primário até ao superior), como consequência do seu conteúdo lúdico e de eles serem uma fonte de exemplos e exercícios em áreas tão variadas como o cálculo combinatório, as simetrias a duas e a três dimensões, a teoria elementar de grupos, a programação. A exposição será ilustrada com um caso simples (o octaedro).

---

---

*Atractores de Sistemas Dinâmicos Gerados por Problemas de Reacção-Difusão Singulares*

**Carlos ROCHA** – crocha@math.ist.utl.pt  
Departamento de Matemática, IST

Resumo: Os sistemas dinâmicos de dimensão infinita gerados por equações de reacção-difusão singulares da forma  $u_t = \varepsilon u_{xx} + f(x, u, u_x)$ ,  $0 < x < 1$  com condições de fronteira adequadas, têm um comportamento dinâmico bem conhecido. O balanço entre os termos de reacção  $f = f(x, u, u_x)$  que tendem a criar soluções não homogéneas (também conhecidas por padrões) e os termos de difusão  $\varepsilon u_{xx}$  que tendem a homogeneizar espacialmente as soluções (eliminando os padrões), cria forçosamente dinâmicas de bifurcação interessantes. Neste seminário discute-se o papel da dependência de  $f$  na variável espacial  $x$  e no termo de convecção  $u_x$  na dinâmica do problema singular. Em particular, é considerado o comportamento da dimensão do atrator  $\mathcal{A}_\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Genericamente na classe das funções sem dependência nos termos de convecção, o comportamento é ilimitado,  $\dim \mathcal{A}_\varepsilon \nearrow +\infty$ , enquanto que em classes de funções com dependência de termos de convecção este tipo de comportamento é excepcional.

---

---

*Conjuntos Robustamente Transitivos e Ciclos Heterodimensionais*

**Jorge ROCHA** – `jrocha@fc.up.pt`  
Departamento de Matemática Pura, FCUP

Resumo: É conhecido que os conjuntos não hiperbólicos e robustamente transitivos admitem uma decomposição dominada para o fibrado tangente e que, genericamente, contêm pontos periódicos hiperbólicos de índices diferentes. Num trabalho conjunto com Christian Bonatti, Lorenzo Díaz e Enrique Pujals mostra-se que, para um conjunto  $C^1$  aberto e denso de difeomorfismos, os índices dos pontos periódicos hiperbólicos de um conjunto robustamente transitivo formam um intervalo em  $\mathbb{N}$ . Mostra-se também que, para um conjunto  $C^1$  aberto e denso de difeomorfismos que estão longe de tangências, as classes homoclínicas relativas de pontos periódicos hiperbólicos que pertencem a um mesmo conjunto robustamente transitivo são robustamente iguais. Finalmente uma análise da estrutura da decomposição dominada associada a um conjunto robustamente transitivo permite descrever a natureza das tangências homoclínicas que podem ocorrer. Das várias técnicas utilizadas para obter estes resultados salienta-se o “Connecting Lemma” de Hayashi e resultados prévios sobre o desdobramento de ciclos heterodimensionais obtidos anteriormente por dois dos autores.

---

---

*Projecto Óptimo de Micro Estruturas de Materiais Celulares*

**Hélder RODRIGUES** – hcr@ist.utl.pt  
Departamento de Engenharia Mecânica, IST

**Resumo:** O projecto óptimo da micro estrutura de materiais celulares é actualmente uma das áreas de maior desenvolvimento e aplicação em optimização estrutural.

Neste trabalho é apresentado um modelo de optimização de topologia aplicado à identificação da micro estrutura óptima de materiais celulares sujeitos a condições de carregamento múltiplo.

É formulado o modelo analítico do problema recorrendo a um método assintótico de homogeneização para caracterizar as propriedades mecânicas equivalentes do material celular e utilizando uma função objectivo (ou de custo) que caracteriza a rigidez global da micro estrutura na qual o carregamento múltiplo é introduzido através da soma ponderada da energia de deformação associada a cada uma das cargas aplicadas.

Em seguida são apresentadas as condições necessárias que caracterizam a micro estrutura óptima e é desenvolvido o respectivo modelo computacional utilizado na sua resolução. Por fim são apresentados diversos exemplos de aplicação que substanciam os desenvolvimentos apresentados e os resultados numéricos obtidos são analisados e comparados com soluções limite obtidas analiticamente.

**Trabalho conjunto com:** J. M. Guedes (IDMEC, IST) e M. P. Bendsøe (Department of Mathematics, Technical University of Denmark).

---



---

*Sobre uma Classe de Problemas Unilaterais Não-Locais do Tipo Obstáculo*

**José Francisco RODRIGUES** – [rodrigue@lmc.fc.ul.pt](mailto:rodrigue@lmc.fc.ul.pt)  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: Apresentam-se e discutem-se condições suficientes para a existência de solução de problemas de obstáculo em que se admite uma dependência (não-local) na medida do conjunto de coincidência. Considera-se ainda a relação com sistemas do tipo reacção-difusão onde certos parâmetros tendem para situações limite.

**Trabalho conjunto com:** João F. Lita da Silva (Departamento de Matemática, FCT, Universidade Nova de Lisboa).

---

---

*Heteroclínicas numa Classe de Equações Conservativas de 4<sup>a</sup> Ordem*

**Luís SANCHEZ** – `sanchez@lmc.fc.ul.pt`  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: No estudo de misturas ternárias que contêm óleo, água e um anfílico, obtém-se por modificação de um modelo de Ginzburg–Landau o seguinte funcional como energia livre (ver [2,4])

$$\mathcal{F}(u) = \int [c(\nabla^2 u)^2 + g(u)|\nabla u|^2 + f(u)] \, dx \, dy \, dz$$

onde o parâmetro de ordem  $u$  representa a diferença de concentração local de óleo e água;  $g(u)$  quantifica as propriedades do anfílico e o “potencial”  $f(u)$  é a densidade de energia livre da mistura. No caso em que  $u(x)$  varia apenas numa direcção espacial e após mudança de escala o funcional reduz-se a

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2}[(u'')^2 + g(u)u'^2] + f(u) \right] \, dx. \quad (1)$$

A correspondente equação de Euler–Lagrange é

$$u^{iv} - g(u)u'' - \frac{1}{2}g'(u)u'^2 + f'(u) = 0. \quad (2)$$

Interessa considerar o caso em que  $f \in C^1(\mathbb{R})$  é tal que, para algum  $0 < a < 1/2$ ,  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(u)}{(u-1)^2} &\leq \alpha, & \forall u \in (1-a, 1+a), \\ \frac{f(u)}{(u+1)^2} &\leq \beta, & \forall u \in (-1-a, -1+a), \\ f(u) &= 0 \text{ se e só se } u = \pm 1 \end{aligned} \quad (3)$$

e

$$\liminf_{|u| \rightarrow \infty} f(u) > 0,$$

e  $g$  é  $C^1$  em  $\mathbb{R}$  é tal que, para certo  $k < 1$

$$\begin{aligned} |G(u)| &\leq k\sqrt{8f(u)}, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \text{onde } G(u) := \int_0^u g(s) \, ds \\ g(u) &\geq 0 \quad \forall u \in [-1-a, -1+a] \cup [1-a, 1+a]. \end{aligned}$$

Sob estas condições **provamos a existência de uma heteroclínica, entre os equilíbrios  $\pm 1$  de (2), que minimiza (1) numa classe conveniente de funções.**

Analizamos também o caso, fisicamente relevante, em que o potencial  $f$  tem um terceiro mínimo ao mesmo nível ( $f(0) = 0$ ) e, admitindo agora que  $f$  e  $g$  são pares,

mostramos novamente a existência da heteroclínica entre os equilíbrios extremos  $\pm 1$ .

A equação 2 pode ser encarada como uma variante da *equação de Fisher–Kolmogorov ampliada*, sobre a qual existe uma literatura de rico conteúdo (ver [1,3,5] e referências).

- [1] J. B. van den Berg, *The phase plane picture for a class of fourth order conservative differential equations*, J. Diff. Equations 161 (2000) 110–153.
- [2] G. Gomper e M. Schick, *Phase transitions and critical phenomena*, Academic Press, New York, 1994.
- [3] W. D. Kalies, J. Kwapisz e R. C. A. M. VanderVorst, *Homotopy classes for stable connections between Hamiltonian saddle-focus equilibria*, Comm. Math. Physics 193 (1998) 337–371.
- [4] H. Leitão, *Estrutura e Termodinâmica de Misturas Ternárias com Anfifílico*, Tese de Doutorado, Universidade de Lisboa, 1998.
- [5] L. A. Peletier e W. C. Troy, *A topological shooting method and the existence of kinks of the extended Fisher-Kolmogorov equation*, Topological Methods in Nonlin. Analysis 6 (1995) 331–355.

**Trabalho conjunto com:** P. Habets (Institut de Mathématique Pure et Appliquée, Louvain-la-Neuve), M. Tarallo (Università degli Studi di Milano) e S. Terracini (Politecnico di Milano).

---

---

*Existência de Solução num Problema de Duas Membranas*

**Lisa SANTOS** – `lisa@math.uminho.pt`

Departamento de Matemática, Universidade do Minho

Resumo: Considera-se o problema de encontrar a posição de equilíbrio de duas membranas, uma constringida pela outra, sujeitas a forças externas e ligadas a suportes rígidos.

Consideremos

$$f, g \in C^1(\bar{\Omega}),$$

$$\varphi, \psi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \varphi|_{\partial\Omega} \geq \psi|_{\partial\Omega},$$

e o convexo fechado de  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$\mathbb{K} = \left\{ (\xi, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) : \xi \geq \eta, \xi|_{\partial\Omega} = \varphi, \eta|_{\partial\Omega} = \psi \right\}.$$

A formulação variacional do problema é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } (u, v) \in \mathbb{K} : \\ \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla(\xi - u)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + \int_{\Omega} \frac{\nabla v \cdot \nabla(\eta - v)}{\sqrt{1 + |\nabla v|^2}} \geq \int_{\Omega} f(\xi - u) + \int_{\Omega} g(\eta - v), \end{array} \right.$$

$\forall (\xi, \eta) \in \mathbb{K}$ . É conhecido que o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{z_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}} \right) = f \quad \text{in } \Omega, \\ z = \varphi \quad \text{on } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

não é sempre solúvel e que é possível impor condições suficientes para garantir a existência de solução, condições que relacionam  $f$  e a curvatura média de  $\partial\Omega$ . Analogamente, a inequação variacional acima não é sempre solúvel e, para garantir existência de solução vamos impor as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon_0 > 0 \forall G \text{ mensurável } \subset \Omega, \max \left\{ \left| \int_G f dx \right|, \left| \int_G g dx \right| \right\} \leq (1 - \varepsilon_0)P(G), \\ \forall x \in \partial\Omega \quad (N - 1)H(x) \geq \max \{|f(x)|, |g(x)|\}, \end{array} \right.$$

onde  $P(G)$  denota o perímetro de  $G$  no sentido de De Giorgi e  $H(x)$  representa a curvatura média de  $\partial\Omega$  em  $x$ .

Consideramos uma penalização explícita da inequação variacional, dependente de um parâmetro  $\varepsilon$ . Obtemos assim um sistema de duas equações não lineares, em

que o termo de penalização (que depende de  $u^\varepsilon$  e  $v^\varepsilon$ ) aparece nas duas equações. A demonstração de existência de solução deste problema faz-se utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder (no espaço  $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ ). A aplicação do teorema exige a obtenção prévia de uma estimação uniforme (independente de  $\varepsilon$ ) do gradiente da solução  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$  deste problema. Este é o passo da demonstração a que será dada especial relevância.

A obtenção posterior de estimações *a priori* convenientes para a solução  $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$  do problema penalizado, permitir-nos-á, por passagem ao limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , provar a existência de solução da inequação variacional.

---

---

*Métodos Móveis: Estimações de Erro na Formulação Mista de Equações de Derivadas Parciais*

**Rafael SANTOS** – rsantos@ualg.pt

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve

Resumo: A utilização de malhas móveis para a resolução de equações de derivadas parciais é aconselhável quando a solução procurada apresenta grandes variações em regiões localizadas do seu domínio, podendo estas variar com o tempo. Um exemplo são os problemas de convecção-difusão.

Aqui, analisa-se um método de elementos finitos móveis para a equação  $\partial_t u - \nabla \cdot (a \nabla u + bu) = f$ , no contexto de uma formulação mista, isto é, considera-se o problema de aproximar  $(u, \sigma)$ , solução de

$$\begin{aligned}(\alpha \sigma + (\beta + \alpha \dot{x})u - (u, \operatorname{div} \chi) &= 0, \forall \chi \in H(\operatorname{div}, \Omega), \\ \left(\frac{Du}{Dt} + \operatorname{div} \sigma + (\nabla \cdot \dot{x})u, r\right) &= (f, r), \forall r \in L^2(\Omega).\end{aligned}$$

em que  $\Omega \in R^n$  e  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  representa o conjunto das funções de  $L^2(\Omega)$  cuja divergência pertence a  $L^2(\Omega)$ . A solução aproximada  $(u_h, \sigma_h) \in V_h \times H_h$  em que  $V_h$  é um espaço de polinómios e  $H_h$  é o correspondente espaço de Raviart-Thomas. Após a introdução de um operador (pseudo-)inverso do operador divergência e do estudo de algumas das suas propriedades, prova-se a estabilidade do método mediante algumas hipóteses sobre a regularidade de  $\Omega$  e sobre os operadores de projecção sobre  $V_h$  e  $H_h$ , e também com algumas restrições sobre o tamanho dos elementos e o movimento da malha. A estabilidade é demonstrada através do método de energia obtendo-se estimações de erro em normas naturalmente associadas ao problema. No caso particular de uma dimensão de espaço consegue-se obter um resultado de superconvergência.

---

---

*Quantização por Deformação e Teoria de Cordas Abertas em Espaços Curvos*

**Ricardo SCHIAPPA** – [ricardo@kelvin.harvard.edu](mailto:ricardo@kelvin.harvard.edu)

Department of Physics, Harvard University

Resumo: Com o trabalho recente de Connes, Douglas e Schwarz, de Schomerus, e de Seiberg e Witten, ficou claro que a descrição de  $D$ -branas (hipersuperfícies onde as cordas abertas podem acabar, nas teorias de tipo IIA e IIB) em certos campos constantes pode ser feita através da reformulação da teoria de Yang–Mills sobre variedades não-comutativas (através do uso dos produtos estrela de Moyal e de Kontsevich). Por outro lado, trabalho mais antigo por Witten indica que a estrutura geral destas teorias deve incluir um traço generalizado para produtos, que em geral devem ser não-comutativos, bem como uma estrutura algébrica homotópicamente associativa que esteja associada a este traço e o respectivo produto. Pretendemos aqui rever estes trabalhos por forma a motivar um estudo mais geral de cordas abertas e  $D$ -branas em espaços curvos, onde a ideia chave é tentar definir estas novas teorias através da reformulação da teoria de Yang–Mills sobre variedades mais gerais, isto é, através de deformações não-associativas (embora homotópicamente associativas) que generalizam a deformação de Kontsevich. Veremos como construir estas deformações em primeira ordem de teoria de perturbações e como neste caso elas são completamente baseadas na fórmula de Kontsevich. Veremos ainda o que se passa em ordem mais elevada e como poderá vir a existir uma nova fórmula para um produto estrela, generalizando a fórmula de Kontsevich (técnicamente demonstrada para teoria de cordas topológicas, não para teoria de cordas bosónica ou supersimétrica).

---

---

## *Modelos Matemáticos e Numéricos do Sistema Cardiovascular*

**Adélia SEQUEIRA** – `asequeir@math.ist.utl.pt`  
Departamento de Matemática, IST

**Resumo:** A estrutura geométrica da rede vascular e a composição heterogénea do sangue, assim como as interacções mecânicas e bioquímicas com as paredes dos vasos e o movimento pulsátil do fluxo sanguíneo, são fenómenos extremamente complexos. Torna-se por isso impossível a construção de um modelo matemático tridimensional não-estacionário de todo o sistema circulatório que permita a simulação destas características e a sua aplicação ao estudo dos efeitos hemodinâmicos nos diversos tipos de doenças cardiovasculares. Um dos desafios da investigação nesta área consiste no desenvolvimento de um modelo matemático que, tendo em conta os recursos computacionais disponíveis, seja exequível e inclua as complexidades mais relevantes do sistema cardiovascular.

As propriedades reológicas do sangue e dos seus elementos desempenham um papel importante na fisiologia da circulação sanguínea. É geralmente aceite numa primeira aproximação, e em particular no que se refere à circulação nos vasos de grande e médio diâmetro, que o sangue se comporta como um meio contínuo, com características uniformes de tipo fluido Newtoniano incompressível. Contudo, o sangue é um fluido viscoelástico com comportamento pseudo-plástico e, pelo menos a nível da microcirculação, estes efeitos não podem ser subestimados. A análise e simulação numérica de modelos de fluidos não-Newtonianos representativos das principais características reológicas do fluxo sanguíneo (em particular da sua microestrutura anisotrópica) e a correspondente validação através de parâmetros hemodinâmicos e reológicos obtidos *in vivo*, constitui um dos objectivos fundamentais da investigação nesta área.

Importa salientar ainda a importância da natureza multiescalar do sistema circulatório e o facto de o comportamento local do fluxo sanguíneo poder ter um efeito global na circulação. O desenvolvimento e análise de modelos multiescala do sistema circulatório do sangue é um tema de abordagem muito recente. Baseia-se em metodologias que associam modelos matemáticos de complexidade e dimensão espacial diferentes, nomeadamente modelos 3-D de interacção fluido-estrutura para o escoamento em pequenas secções vasculares, com modelos de aproximação para a simulação em larga escala, 1-D e de tipo *lumped parameters*, menos dispendiosos do ponto de vista computacional. O desafio consiste em obter simuladores computacionais eficientes para todo o sistema vascular, permitindo em simultâneo uma representação detalhada de morfologias específicas.

Neste seminário serão apresentados os aspectos fundamentais da análise matemática e da simulação numérica de modelos locais e globais de tipo multiescala do fluxo sanguíneo no sistema cardiovascular humano.

---



---

*As Sombras do Tempo...*

**Ana Paula SILVA**

**Pedro OLIVEIRA** – pmoliveira@megamail.pt

Esc. Básica 2,3 Comandante Conceição e Silva, Cova da Piedade e INETE, Instituto de Educação Técnica, Lisboa

Resumo: Ao longo dos tempos as sombras despertaram no Homem sentimentos diversos. O Sol, um dos principais responsáveis no aparecimento dessas sombras, revelava ser um mistério com comportamentos cíclicos, o que provocou as primeiras observações e os primeiros estudos. Com o passar dos milénios foram aparecendo vários instrumentos de medição do tempo, entre os quais os Relógios de Sol.

Durante a nossa sessão vamos desafiar todos os intervenientes a uma viagem no tempo, na procura da magia acumulada de séculos de história. Os Relógios de Sol e a Trigonometria serão a simbiose de uma natureza matemática intemporal que poderá dar a conhecer aos alunos algumas das belezas do nosso Universo...

---

---

*Uma Nova Visão do Papel de Cardano no Desenvolvimento dos Números Complexos*

**Jaime Carvalho e SILVA** – [jaimecs@mat.uc.pt](mailto:jaimecs@mat.uc.pt)  
Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: Os textos de História da Matemática contêm invariavelmente algo semelhante ao que aparece no excelente livro de Viktor Katz: “Much else of interest is found in Cardano’s masterpiece, including ... the first appearance of complex numbers, not in connection with cubic equations, but in connection with a quadratic problem (...) Cardano thus left off the discussion and wrote no more about complex numbers.” Tentaremos analisar esta última afirmação à luz de vários extractos da obra “Ars Magna” de Cardano.

---

---

*Teoria Aditiva para Funções Simétricas*

**J. A. Dias da SILVA** – `perdigao@hermite.cii.fc.ul.pt`  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: Nesta apresentação referir-nos-emos à generalização dos problemas clássicos da Teoria Aditiva de Números que se obtém considerando em vez de conjuntos de somas de  $n$  elementos de um corpo  $\mathbb{F}$ , isto é subconjuntos de

$$\{s_{1,n}(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n : a_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, n\},$$

conjuntos de imagens por outro polinómio simétrico elementar de  $n$ -uplos de elementos de  $\mathbb{F}$ , isto é subconjuntos de

$$\{s_{k,n}(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, n\}.$$

Discutiremos os resultados obtidos, a complexidade e as dificuldades na abordagem destes problemas.

---

---

*Demonstração Matemática: Qual o Papel a Desempenhar no Ensino?*

**Manuel Almeida SILVA** – [mmas@netcabo.pt](mailto:mmas@netcabo.pt)

Departamento de Matemática, FCT, Universidade Nova de Lisboa

Resumo: O método de validação de resultados em matemática, através de uma demonstração formal, distingue de uma forma irrevogável a matemática de todas as outras disciplinas, em particular das ciências naturais.

Discutiremos a importância para o ensino de algumas demonstrações nos domínios da geometria e da teoria elementar dos números. No primeiro caso, a utilização dos programas de geometria dinâmica vem possibilitar a verificação empírica de certas conjecturas, ficando deste modo claro que o objectivo da demonstração não se pode esgotar na determinação do valor de verdade das conjecturas em apreço.

---

---

*Subconjuntos Racionais do Grupo Livre*

**Pedro V. SILVA** – pvsilva@fc.up.pt  
Departamento de Matemática Pura, FCUP

Resumo: Num artigo publicado em 1996, Géraud Sénizergues demonstrou uma conjectura proposta por Jacques Sakarovitch em 1979: dado um subconjunto racional do grupo livre, ou este é reconhecível (união de  $H$ -classes para algum subgrupo normal  $H$  de índice finito) ou então disjuntivo (a respectiva congruência sintáctica é a identidade). Uma das consequências desta demonstração foi a obtenção de um algoritmo para determinar se um dado subconjunto racional do grupo livre é ou não reconhecível. Tomando como ponto de partida este problema, desenvolvemos duas abordagens diferentes da de Sénizergues, que permitem obter diversas caracterizações algorítmicas dos subconjuntos reconhecíveis e demonstrações alternativas dos resultados de Sénizergues, incluindo a conjectura de Sakarovitch.

A primeira abordagem usa técnicas oriundas do contexto dos monoides e autómatos inversos e tem a vantagem de produzir diversas caracterizações, entre as quais se incluem as mais sugestivas.

A segunda abordagem tem o mérito de ser mais universal e permitir consequentes generalizações a outras classes de grupos.

---

---

*Sobre o Início e o Fim dos Tempos*

**Carlota SIMÕES** – carlota@mat.uc.pt

**João FERNANDES** – jmfernan@mat.uc.pt

Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: O início e o fim dos tempos foram sempre uma preocupação para a humanidade. Do ponto de vista da astronomia, diversas perspectivas têm sido apresentadas ao longo dos séculos. Desde Kepler a Hubble, de Ussher a Hawkins, várias têm sido as propostas para uma pergunta ainda sem resposta. Para Kepler e Ussher, o início dos tempos estaria determinado por uma certa configuração dos planetas no céu, manifestando simetrias que só poderiam ter sido criadas por um ser superior. Para Hubble e Hawkins, o início assenta na teoria do Big Bang e na observação do afastamento das galáxias. Quanto ao fim dos tempos, discutiremos várias propostas e vários modelos que têm sido sugeridos ao longo da História tanto por filósofos como por astrónomos.

---

---

*O Problema de Extensão para Permutações Parciais*

**Benjamin STEINBERG** – `bsteinbg@agc0.fc.up.pt`  
Departamento de Matemática Pura, FCUP

Resumo: Encontra-se frequentemente, na Matemática, o problema de estender automorfismos parciais, dum estrutura, para automorfismos totais (talvez com condições extras impostas). Por exemplo, na Teoria de Grupos, a extensão dum automorfismo parcial dum grupo, para um automorfismo induzido por conjugação, foi considerada por Higman, Neumann e Neumann, na construção de extensão de HNN. Eles provaram que tal extensão existe sempre e como, consequência, mostraram que qualquer grupo numerável mergulha num grupo gerado por dois elementos.

O problema de extensão finita de automorfismos parciais dum estrutura finita considera-se frequentemente, na Teoria de Modelos. Hrushovski estudou a situação para grafos; isso foi generalizado, por Herwig e Lascar, para estruturas mais gerais.

Este problema tem significada particular, na Teoria de Semigrupos. O facto que qualquer permutação parcial dum conjunto finito poder ser estendido para uma permutação do mesmo conjunto é equivalente (formalmente) ao teorema de Marshall Hall sobre grupos livres e o teorema de revestimento de semigrupos inversos finitos de McAlister.

Em trabalho com Karl Auinger, mostramos que existe uma classe  $\mathbf{H}$  de grupos solúveis finitos, fechado por produtos directos, subgrupos e quocientes, com problema de pertença decidível, tal que não é decidível se um conjunto  $S$  de permutações parciais dum conjunto finito  $X$  pode ser estendido para um conjunto  $T$  de permutações dum sobreconjunto finito  $Y \supseteq X$  tal que o subgrupo de  $S_Y$  gerado por  $T$  pertence ao  $\mathbf{H}$ .

---

---

*A Polémica do Séc. XVIII Sobre a Utilização das Séries Divergentes nas Demonstrações*

**José Manuel C. TEIXEIRA**

Esc. EB 2,3 de Soares dos Reis, Vila Nova de Gaia

Resumo: No século XVIII, a primeira questão que se colocava no estudo de uma série infinita não era a da sua convergência, mas a de encontrar um processo que permitisse atribuir-lhe uma soma. A teoria das séries fazia parte da álgebra, a qual era vista como uma aritmética generalizada. De acordo com esta visão, acreditava-se que os métodos válidos no domínio finito continuavam válidos após passagem ao infinito. Na base dessa crença estava o princípio de continuidade de Leibniz. Em particular, as séries de potências eram encaradas como polinómios, sobre as quais poderiam ser efectuadas, sem restrições, as mesmas operações.

Na “Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium, professorem matheseos halensen, circa scientiam infiniti” de 1713, Leibniz considerou o caso paradoxal da série divergente  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1/2$ . Leibniz misturou considerações metafísicas com considerações matemáticas.

Um bom exemplo do espírito do século XVIII é o trabalho que Euler dedicou, em 1734-5, ao estudo da série dos recíprocos dos quadrados dos números naturais:  $1 + 1/4 + 1/9 + \dots = \pi^2/6$ . Os métodos utilizados na descoberta da soma desta série surpreenderam os matemáticos da época. Logo que recuperaram da estupefacção, criticaram a falta de fundamentação dos métodos de Euler no tratamento das expressões infinitas, principalmente a utilização das séries divergentes. Um dos críticos foi Nikolaus Bernoulli. Uma polémica foi disputada por carta entre os dois matemáticos durante os anos quarenta. Numa carta de 1745 a Goldbach, Euler deu a sua célebre definição para a soma de uma série divergente.

Com o intuito de esclarecer definitivamente todas as dúvidas relativamente à utilização das séries divergentes, Euler escreveu, em 1754-5, o artigo “De seriebus divergentibus”. Pretendendo salvaguardar a utilidade das séries divergentes, Euler procurou atribuir um significado à soma de uma série divergente. Isso levou-o a escrever expressões como  $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + L$ . A concepção subjacente à interpretação desta igualdade era essencialmente algébrica, por oposição a uma concepção aritmética, que só fazia sentido quando a série em consideração era convergente.

O final do século XVIII assiste à tentativa protagonizada por Lagrange de fundar o cálculo infinitesimal na álgebra das séries de potências. As ideias de Lagrange eram muito próximas das de Euler no que dizia respeito à concepção algébrica da análise; contudo, as suas preocupações com questões de fundamentos não tinham paralelo em todo o século XVIII. A tradição algébrica da análise entrou em decadência a partir dos anos vinte do século XIX, com o trabalho de Cauchy.

---



---

*Estimação Não-Paramétrica da Função de Distribuição: EDF vs AKDF e AKDF vs AKDF*

**Carlos TENREIRO** – `tenreiro@mat.uc.pt`  
Departamento de Matemática, FCTUC

Resumo: Se  $X_1, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias reais independentes e absolutamente contínuas com densidade comum  $f$ , o estimador habitualmente considerado da sua função de distribuição  $F$  é a função de distribuição empírica (EDF). Motivados pelos trabalhos de Rosenblatt (Ann. Math. Statist. 27 (1956) 832) e de Parzen (Ann. Math. Statist. 33 (1962) 1065) sobre o estimador do núcleo da densidade  $f$ , autores como Tiago de Oliveira (Rev. Fac. Ciências Lisboa 9 (1963) 111), Nadaraya (Theory Probab. Appl. 9 (1964) 497) e Watson e Leadbetter (Sankhyä, Ser. A 26 (1964) 101), aparentemente de forma independente, propõem uma nova classe de estimadores de  $F$ . Para  $x \in \mathbb{R}$ , o estimador do núcleo de  $F$  (KDF) é definido por

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{K}_{h_n}(x - X_i),$$

onde, para  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\bar{K}_{h_n}(u) = \int_{]-\infty, u]} K_{h_n}(v) dv,$$

com  $K_{h_n}(\cdot) = K(\cdot/h_n)/h_n$ ,  $K$  um núcleo em  $\mathbb{R}$ , i.e., uma função integrável tal que  $\int_{\mathbb{R}} K(u) du = 1$ , e  $(h_n)$  uma sucessão de números reais estritamente positivos convergindo para zero quando  $n \rightarrow +\infty$ . Para um núcleo fixo, a janela  $h_n$  é habitualmente escolhida em função das observações  $X_1, \dots, X_n$ . Tal procedimento conduz a uma classe mais vasta de estimadores de  $F$ , com  $h_n = A_n(X_1, \dots, X_n)$  uma sucessão de funções mensuráveis, ditos estimadores automáticos do núcleo (AKDF).

Tendo por base o trabalho de Shirahata e Chu (Ann. Inst. Statist. Math. 44 (1992) 579), começamos por estabelecer um desenvolvimento assintótico para o erro quadrático integrado (ISE)

$$\int_{\mathbb{R}} \{\hat{F}_n(x) - F(x)\}^2 dF(x),$$

para estimadores automáticos do núcleo cujas sucessões  $(A_n)$  satisfazem a condição  $A_n/h_n - 1 = o_p(1)$ , para alguma sucessão determinista  $(h_n)$  nas condições acima descritas. Com base num tal desenvolvimento, descrevemos o comportamento assintótico do ISE em função de  $(A_n)$ , e comparamos, no sentido do ISE, não só os estimadores EDF e AKDF, bem como estimadores automáticos do núcleo definidos a partir dum mesmo núcleo e de janelas distintas.

Os resultados obtidos permitem concluir, em particular, que, de um ponto de vista assintótico, a escolha da janela  $(A_n)$  não tem na estimação da função de distribuição

o papel de relêvo que assume no contexto da estimação da densidade de probabilidade pelo método do núcleo. Estimadores automáticos do núcleo cuja sucessão determinista associada não é ótima no sentido do erro quadrático médio integrado (MISE), podem ser indistinguíveis, no sentido do ISE, de estimadores cuja sucessão determinista associada é ótima no sentido do MISE.

---

---

*Hipervídeo: Uma Ferramenta para a Comunicação Matemática*

**Maria Haydée M. VALLADARES** – `maride@lmc.fc.ul.pt`  
Projecto “Matemática em Acção”, CMAF-UL

Resumo: Pretende-se apresentar um novo tipo de produto multimédia chamado “Hipervídeo” que se centra num vídeo mas permite formas enriquecidas de navegação e exploração deste tipo de media, nomeadamente através da Internet.

As aplicações deste novo produto ao ensino da Matemática, serão ilustradas através de um protótipo de hipervídeo baseado no vídeo “A história do Pi”, realizado no âmbito do Projecto “Matemática em Acção” do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais de Universidade de Lisboa (CMAF-UL).

---

---

*Direcção da Vorticidade e Regularidade das Soluções das Equações de Navier-Stokes*

**Hugo Beirão da VEIGA** – `bveiga@dma.unipi.it`

Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa

Resumo: Um dos mais famosos problemas em aberto no campo da Matemática é sem dúvida o da existência de uma solução global e regular do sistema de equações de Navier-Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \end{array} \right. \quad (4)$$

Neste colóquio apresento alguns resultados demonstrados em colaboração com L. C. Berselli no artigo *On the regularizing effect of the vorticity direction in incompressible viscous flows*, *Diff. Int. Equations* 15 (2002) 345-356. Neste artigo demonstramos que o conhecimento de algumas condições muito simples sobre a direcção da vorticidade  $\omega(x)$  pode ser usado para demonstrar a regularidade das soluções das equações de Navier-Stokes. O ponto de partida é o clássico trabalho de P. Constantin e C. Fefferman *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations*, *Indiana Univ. Math. J.* 42 (1993) 775-789. Estes autores demonstram essencialmente o seguinte resultado:

Seja  $\theta(x, x+y, t)$  o ângulo entre a vorticidade  $\omega(x, t) := \nabla \times u(x, t)$  em dois quaisquer pontos genéricos  $x$  e  $x+y$  no instante  $t$ . Suponhamos por hipótese que existam constantes positivas  $c, k$  e  $\delta$  tais que

$$|\sin \theta(x, x+y, t)| \leq c|y| \quad (5)$$

sempre que  $|y| \leq \delta$  e que a vorticidade nos pontos  $x$  e  $x+y$  seja superior a  $k$ . Então a solução  $u$  é necessariamente regular em  $(0, T)$ .

No artigo em questão simplificamos de forma muito substancial as hipóteses utilizadas pelos referidos autores sobre a direcção da vorticidade. Entre outros resultados, demonstramos que a hipótese (5) pode ser substituída simplesmente com a seguinte condição:

$$|\sin \theta(x, x+y, t)| \leq c|y|^{1/2}. \quad (6)$$

**Nota:** O resumo integral desta comunicação pode ser consultado na página do Encontro.

---

---

*Integrais de Feynman, Análise Estocástica e Grupos de Lie*

**Jean-Claude ZAMBRINI** – [zambrini@alf1.cii.fc.ul.pt](mailto:zambrini@alf1.cii.fc.ul.pt)  
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: Descreveremos o que são os integrais de Feynman e as razões pelas quais foram introduzidos. Relembraremos o que os torna matematicamente misteriosos e estabeleceremos alguns pontos de contacto com a análise estocástica moderna. A relação entre integral de Feynman e grupo de Lie provém de um aspecto que aquele autor não explorou, o estudo das simetrias dos integrais de caminho. Indicaremos o que Feynman poderia ter descoberto se tivesse tido à sua disposição as técnicas de análise estocástica, bem como a interpretação física desses resultados.

---