Heteroclínicas numa Classe de Equações Conservativas de 4 ª Ordem

Luís SANCHEZ – sanchez@lmc.fc.ul.pt
Departamento de Matemática, FCUL

Resumo: No estudo de misturas ternárias que contêm óleo, água e um anfifílico, obtém-se por modificação de um modelo de Ginzburg–Landau o seguinte funcional como energia livre (ver [2,4])

$$\mathcal{F}(u) = \int \left[c(\nabla^2 u)^2 + g(u)|\nabla u|^2 + f(u) \right] \, dx \, dy \, dz$$

onde o parâmetro de ordem u representa a diferença de concentração local de óleo e água; $g(u)$ quantifica as propriedades do anfifílico e o "potencial" $f(u)$ é a densidade de energia livre da mistura. No caso em que $u(x)$ varia apenas numa direcção espacial e após mudança de escala o funcional reduz-se a

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}[(u''^2) + g(u)u'^2] + f(u) \right] \, dx. \tag{1}$$

A correspondente equação de Euler–Lagrange é

$$u^{iv} - g(u)u'' - \frac{1}{2}g'(u)u'^2 + f'(u) = 0. \tag{2}$$

Interessa considerar o caso em que $f \in C^1(\mathbb{R})$ é tal que, para algum $0 < a < 1/2$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(u)}{(u-1)^2} &\le \alpha, \qquad \forall u \in (1-a, 1+a), \\ \frac{f(u)}{(u+1)^2} &\le \beta, \qquad \forall u \in (-1-a, -1+a), \\ f(u) = 0 \ &\text{ se e só se } \ u = \pm 1 \end{aligned} \tag{3}$$

e

$$\liminf_{|u| \to \infty} f(u) > 0,$$

e g é C^1 em $\mathbb{R}$ é tal que, para certo $k < 1$

$$\begin{gathered} |G(u)| \le k\sqrt{8f(u)}, \ \ \forall u \in \mathbb{R}, \ \ \text{onde} \ \ G(u) := \textstyle\int_0^u g(s)\, ds \\ g(u) \ge 0 \quad \forall u \in [-1-a, -1+a] \cup [1-a, 1+a]. \end{gathered}$$

Sob estas condições **provamos a existência de uma heteroclínica, entre os equilíbrios ± 1 de (2), que minimiza (1) numa classe conveniente de funções**.

Analisamos também o caso, fisicamente relevante, em que o potencial f tem um terceiro mínimo ao mesmo nível ($f(0) = 0$) e, admitindo agora que f e g são pares,

mostramos novamente a existência da heteroclínica entre os equilíbrios extremos ± 1.

A equação 2 pode ser encarada como uma variante da *equação de Fisher–Kolmogorov ampliada*, sobre a qual existe uma literatura de rico conteúdo (ver [1,3,5] e referências).

[1] J. B. van den Berg, *The phase plane picture for a class of fourth order conservative differential equations*, J. Diff. Equations 161 (2000) 110–153.

[2] G. Gomper e M. Schick, *Phase transitions and critical phenomena*, Academic Press, New York, 1994.

[3] W. D. Kalies, J. Kwapisz e R. C. A. M. VanderVorst, *Homotopy classes for stable connections between Hamiltonian saddle-focus equilibria*, Comm. Math. Physics 193 (1998) 337–371.

[4] H. Leitão, *Estrutura e Termodinâmica de Misturas Ternárias com Anfifílico*, Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 1998.

[5] L. A. Peletier e W. C. Troy, *A topological shooting method and the existence of kinks of the extended Fisher-Kolmogorov equation*, Topological Methods in Nonlin. Analysis 6 (1995) 331–355.

Trabalho conjunto com: P. Habets (Institut de Mathématique Pure et Appliquée, Louvain-la-Neuve), M. Tarallo (Università degli Studi di Milano) e S. Terracini (Politecnico di Milano).