Existência de Solução num Problema de Duas Membranas

Lisa SANTOS – `lisa@math.uminho.pt`
Departamento de Matemática, Universidade do Minho

Resumo: Considera-se o problema de encontrar a posição de equilíbrio de duas membranas, uma constrangida pela outra, sujeitas a forças externas e ligadas a suportes rígidos.

Consideremos

$$f,\ g \in C^1(\overline{\Omega}),$$

$$\varphi,\ \psi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \qquad \varphi_{|\partial\Omega} \geq \psi_{|\partial\Omega},$$

e o convexo fechado de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$\mathbb{K} = \Big\{(\xi,\eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) :\ \xi \geq \eta,\ \xi_{|\partial\Omega} = \varphi,\ \eta_{|\partial\Omega} = \psi\Big\}.$$

A formulação variacional do problema é a seguinte:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (u,v) \in \mathbb{K}: \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\nabla u.\nabla(\xi-u)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + \int_\Omega \frac{\nabla v.\nabla(\eta-v)}{\sqrt{1+|\nabla v|^2}} \geq \int_\Omega f(\xi-u) + \int_\Omega g(\eta-v), \end{cases}$$

$\forall(\xi,\eta) \in \mathbb{K}$. É conhecido que o problema

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{z_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla z|^2}}\right) = f & \text{in } \Omega, \\ z = \varphi \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

não é sempre solúvel e que é possível impor condições suficientes para garantir a existência de solução, condições que relacionam f e a curvatura média de $\partial\Omega$. Analogamente, a inequação variacional acima não é sempre solúvel e, para garantir existência de solução vamos impor as seguintes condições:

$$\begin{cases} \exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall\ G \text{ mensurável } \subset \Omega,\ \max\left\{\left|\displaystyle\int_G f dx\right|, \left|\displaystyle\int_G g dx\right|\right\} \leq (1-\varepsilon_0)P(G), \\ \forall x \in \partial\Omega \qquad (N-1)H(x) \geq \max\{|f(x)|, |g(x)|\}, \end{cases}$$

onde $P(G)$ denota o perímetro de G no sentido de De Giorgi e $H(x)$ representa a curvatura média de $\partial\Omega$ em x.

Consideramos uma penalização explícita da inequação variacional, dependente de um parâmetro ε. Obtemos assim um sistema de duas equações não lineares, em que o termo de penalização (que depende de u^ε e v^ε) aparece nas duas equações. A demonstração de existência de solução deste problema faz-se utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder (no espaço $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$). A aplicação do teorema exige a obtenção prévia de uma estimação uniforme (independente de ε) do gradiente da solução $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ deste problema. Este é o passo da demonstração a que será dada especial relevância.

A obtenção posterior de estimações *a priori* convenientes para a solução $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ do problema penalizado, permitir-nos-á, por passagem ao limite quando $\varepsilon \to 0$, provar a existência de solução da inequação variacional.
