Direcção da Vorticidade e Regularidade das Soluções das Equações de Navier-Stokes

Hugo Beirão da VEIGA – bveiga@dma.unipi.it
Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa

Resumo: Neste colóquio apresento alguns resultados demonstrados em colaboração com L. C. Berselli no artigo *On the regularizing effect of the vorticity direction in incompressible viscous flows*, Diff. Int. Equations 15 (2002) 345-356. Neste artigo demonstramos que o conhecimento de algumas condições muito simples sobre a direcção da vorticidade $\omega(x)$ pode ser usado para demonstrar a regularidade das soluções das equações de Navier-Stokes. O ponto de partida é o clássico trabalho de P. Constantin e C. Fefferman *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. 42 (1993) 775-789. No artigo em questão simplificamos de forma muito substancial as hipóteses utilizadas pelos referidos autores sobre a direcção da vorticidade

$$\xi(x) = \frac{\omega(x)}{|\omega(x)|},$$

de forma a assegurar a regularidade da solução.

Consideremos as equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0,T], \\ \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \times [0,T], \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \ , \end{cases} \tag{1}$$

onde suporemos, para simplificar, que a força externa f seja nula e que o dado inicial u_0 seja regular. Denotaremos com $L^p := L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq \infty$, os clássicos espaços de Lebesgue , e com $H^s := H^s(\mathbb{R}^3)$, $s \geq 0$, os usuais espaços de Sobolev. O simbolo $C_w(0,T;L^2)$ representa o espaço das funções fracamente contínuas em $(0,T)$ com valores em L^2.

Um clássico resultado de J. Leray afirma que para cada $T > 0$ existe pelo menos uma *solução fraca* do sistema (1) em (0,T), *i.e.* uma função u tal que

$$u \in C_w(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1)$$

e que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left[u \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nu \, \nabla u \cdot \nabla \phi - (u \cdot \nabla)\, u \, \phi \right] dxdt = = \int_{\mathbb{R}^3} u(T)\phi(T) - u_0 \phi(0) \, dx,$$

qualquer que seja $\phi \in C^1(0,T;H^1)$ a divergência nula. A unicidade da solução é um clássico problema em aberto.

Por definição uma *solução forte* é uma solução fraca tal que

$$u \in L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2) \ . \tag{2}$$

Uma solução forte existe pelo menos até um certo tempo $T > 0$, mas a sua persistência para tempos arbitrariamente grandes é um problema em aberto. As soluções fortes são únicas e regulares. O problema fundamental é pois provar que para um qualquer dado inicial, regular e com divergência nula, existe uma solução forte global (necessariamente única).

É importante observar que para o problema em $\mathbb{R}^2$ a situacão é completamente diferente pois é possível demonstrar a existência da solução forte global. Esta diferença entre o caso bidimensional e o caso tridimensional pode-se compreender através do estudo do rotacional do campo das velocidades (vorticidade), a saber

$$\omega(x,t) := \nabla \times u(x,t).$$

No caso bidimensional ω é sempre perpendicular ao plano do movimento, o que seria suficiente (como veremos) para garantir a regularidade da solução até mesmo no caso tridimensional. Por outro lado, considerando o rotacional da primeira equação (1), obtemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, \omega - \nu \Delta \omega = 0$$

e portanto, no caso bidimensional, a vorticidade satisfaz uma equação de evolução linear. Em particular o módulo da vorticidade não pode aumentar, e daqui resulta fácilmente a regularidade da solução .

Em dimensão 3 a situação muda drásticamente: se consideramos de novo o rotacional da primeira equação (1) obtemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, \omega - \nu \Delta \omega = (\omega \cdot \nabla)\, u. \tag{3}$$

O módulo da vorticidade pode pois aumentar e a sua direcção pode modificar-se.

Existem na literatura diversas condições suficientes, a impôr ao campo rotacional, afim de garantir a regularidade da solução. Pelo menos aquelas de maior interesse são condições sobre o módulo do rotacional. A única condição suficiente (pelo que diz respeito à bibliografia do nosso conhecimento) relativa à direcção da vorticidade é aquela demonstrada no artigo de Constantin e Fefferman já citado precedentemente. Estes autores demontram essencialmente que se o angulo $\theta(x, x+y, t)$ entre a vorticidade ω em dois quaisquer pontos genéricos x e $x+y$ satisfaz a majoração

$$|\sin \theta(x, x+y, t)| \leq c|y|,$$

onde c é uma constante (arbitrariamente grande), então a solução é necessariamente regular em $(0,T)$.

Nós demonstramos, em particular, a regularidade da solução simplesmente sob a hipótese

$$|\sin \theta(x, x+y, t)| \leq c|y|^{1/2} \ . \tag{4}$$

Mais precisamente, no artigo em questão consideramos a seguinte condição:

HIPÓTESE A. *Existam uma constante* $\alpha \in [1/2,\ 1]$ *e uma função* $g \in L^a(0,T;L^b)$, *com*

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \alpha - \frac{1}{2} \quad e \quad a \in \left[\frac{4}{2\alpha - 1}, \infty\right] \ ,$$

tais que

$$|\sin\theta(x, x+y, t)| \leq g(t,x)|y|^\alpha \tag{5}$$

sempre que a vorticidade nos pontos x *e* $x{+}y$ *seja superior a uma constante positiva* k *(arbitrariamente grande).*

Note-se que a hipótese A é verificada sempre que o seja (4). Mais geralmente, tem-se o seguinte resultado:

TEOREMA *Suponhamos que* u *seja uma solução fraca do problema (1) em* $(0,T)$, *com* $u_0 \in H^1$ *e* $\nabla \cdot u_0 = 0$. *Suponhamos ainda que a hipótese A seja satisfeita.*

Então a solução u *é forte em* $(0,T)$, *e portanto regular.*

NOTA *Evidentemente é suficiente assumir a hipótese (5) apenas para*

$$|y| \leq \delta,$$

onde δ *é uma qualquer constante positiva.*

O primeiro passo na nossa demontração consiste em utilizar na equação (3) a expressão de u dada pela lei de Biot–Savart

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\nabla\frac{1}{|y|}\right) \times \omega(x+y)\,dy. \tag{6}$$
