Optimização Financeira (Estimação da Função de Densidade de Probabilidade de Risco Neutro para Preços de Opções)

Ana Margarida Monteiro (Univ. Coimbra)

Reha H. Tütüncü (Carnegie Mellon Univ.)

Luís Nunes Vicente (Univ. Coimbra)

Estúdio de Optimização — Março de 2006

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes
- Características do mercado no problema considerado

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes
- Características do mercado no problema considerado
- Medida de probabilidade de risco neutro

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes
- Características do mercado no problema considerado
- Medida de probabilidade de risco neutro
- Splines cúbicas

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes
- Características do mercado no problema considerado
- Medida de probabilidade de risco neutro
- Splines cúbicas
- Formulação básica usando splines

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes
- Características do mercado no problema considerado
- Medida de probabilidade de risco neutro
- Splines cúbicas
- Formulação básica usando splines
- Formulação QP

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes
- Características do mercado no problema considerado
- Medida de probabilidade de risco neutro
- Splines cúbicas
- Formulação básica usando splines
- Formulação QP
- Formulação SDP

Tópicos

- Alguns conceitos sobre opções
- Considerações sobre o modelo de Black-Scholes
- Características do mercado no problema considerado
- Medida de probabilidade de risco neutro
- Splines cúbicas
- Formulação básica usando splines
- Formulação QP
- Formulação SDP
- Resultados numéricos

Opções

- Uma opção é um contrato que confere ao comprador, mediante o pagamento de um prémio, o direito, mas não a obrigação, de comprar (opção de compra ou call) ou vender (opção de venda ou put), um activo financeiro, por um preço pré-determinado (preço de exercício ou strike)

Opções

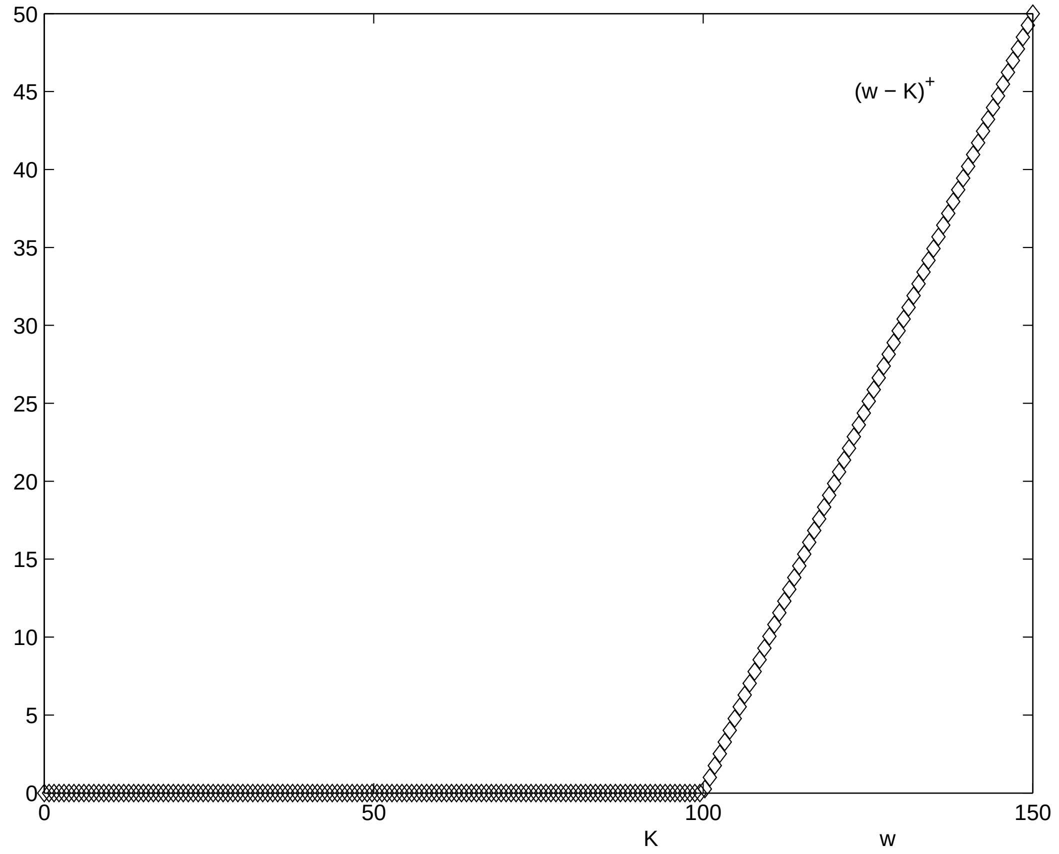
- Uma opção é um contrato que confere ao comprador, mediante o pagamento de um prémio, o direito, mas não a obrigação, de comprar (opção de compra ou call) ou vender (opção de venda ou put), um activo financeiro, por um preço pré-determinado (preço de exercício ou strike)
- Se a opção for exercida numa determinada data futura designa-se por opção europeia

Opções

- Uma opção é um contrato que confere ao comprador, mediante o pagamento de um prémio, o direito, mas não a obrigação, de comprar (opção de compra ou call) ou vender (opção de venda ou put), um activo financeiro, por um preço pré-determinado (preço de exercício ou strike)
- Se a opção for exercida numa determinada data futura designa-se por opção europeia
- Se a opção puder ser exercida ao longo de um período designa-se por opção americana

Opções

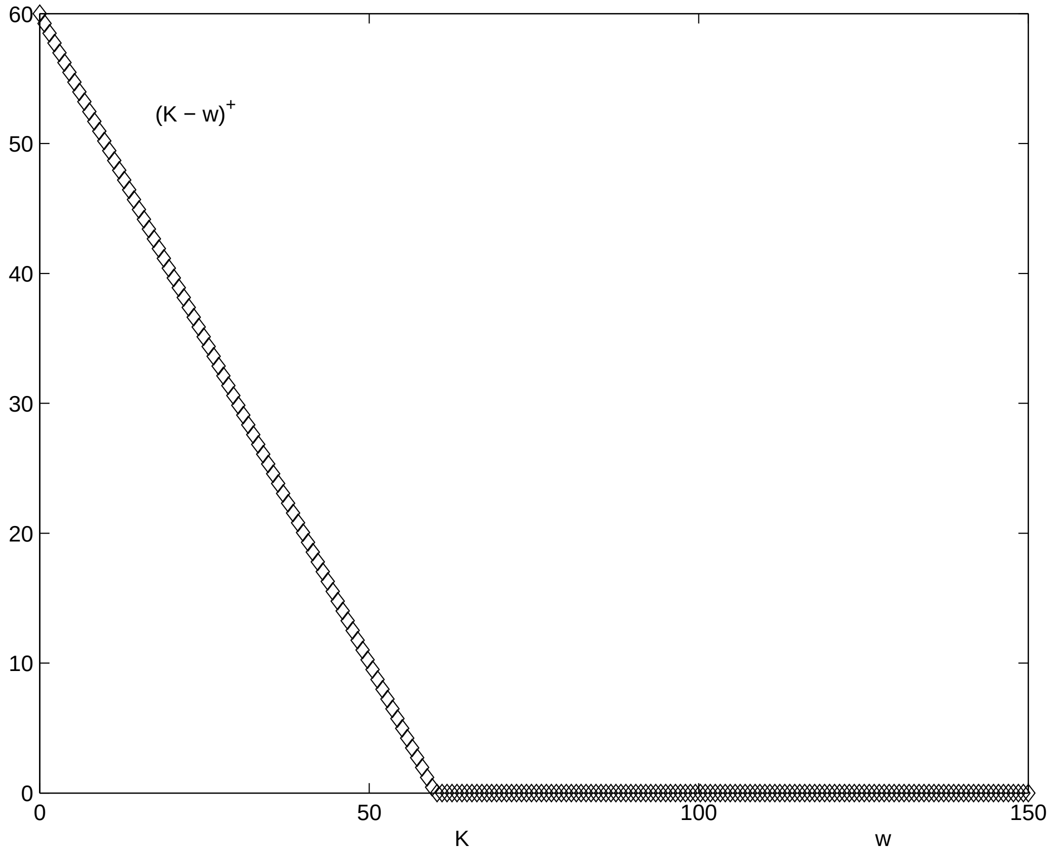
Ganho de uma call com preço de exercício K



$\omega \in \Omega$, Ω é o espaço dos estados para o preço do activo no final do contrato

Opções

Ganho de uma put com preço de exercício K



$\omega \in \Omega$, Ω é o espaço dos estados para o preço do activo no final do contrato

Opções

- Opção de compra (call)
  - comprador:

    1. paga o prémio
    2. tem direito a receber a mercadoria ao preço de exercício

Opções

- Opção de compra (call)
  - comprador:
    1. paga o prémio
    2. tem direito a receber a mercadoria ao preço de exercício
  - vendedor:
    1. recebe o prémio
    2. tem que entregar a mercadoria ao preço de exercício

Opções

- Opção de compra (call)
  - comprador:
    1. paga o prémio
    2. tem direito a receber a mercadoria ao preço de exercício
  - vendedor:
    1. recebe o prémio
    2. tem que entregar a mercadoria ao preço de exercício
- Opção de venda (put)
  - ...
  - ...

Opções

Para que servem as opções?

Opções

Para que servem as opções?

- especulação
- redução do risco

Opções

Para que servem as opções?

- especulação
- redução do risco

Risco sistemático está associado a factores que afectam todo o mercado, por exemplo a possibilidade de variação da taxa de juro

Opções

Para que servem as opções?

- especulação
- redução do risco

Risco sistemático está associado a factores que afectam todo o mercado, por exemplo a possibilidade de variação da taxa de juro

Risco específico é a componente do risco associada a determinado activo ou sector de mercado

Opções

Para que servem as opções?

- especulação
- redução do risco

Risco sistemático está associado a factores que afectam todo o mercado, por exemplo a possibilidade de variação da taxa de juro

Risco específico é a componente do risco associada a determinado activo ou sector de mercado

Eliminação do risco sistemático faz-se mantendo um portefólio com posições semelhantes em dois activos negativamente correlacionados, (hedging), por exemplo acções e opções

Opções

Para que servem as opções?

- especulação
- redução do risco

Risco sistemático está associado a factores que afectam todo o mercado, por exemplo a possibilidade de variação da taxa de juro

Risco específico é a componente do risco associada a determinado activo ou sector de mercado

Eliminação do risco sistemático faz-se mantendo um portefólio com posições semelhantes em dois activos negativamente correlacionados, (hedging), por exemplo acções e opções

Eliminação do risco específico faz-se mantendo um portefólio com um número grande de activos de diferentes sectores

Arbitragem

Assume-se que:

Arbitragem

Assume-se que:

- Não há possibilidade de obter instantaneamente um lucro sem risco

Arbitragem

Assume-se que:

- Não há possibilidade de obter instantaneamente um lucro sem risco
- A rentabilidade de um qualquer portefólio é igual à de um activo sem risco

Arbitragem

Assume-se que:

- Não há possibilidade de obter instantaneamente um lucro sem risco
- A rentabilidade de um qualquer portefólio é igual à de um activo sem risco
- Para obter lucros superiores ao da taxa de juro isenta de risco é necessário correr riscos

Modelo de Black-Scholes

Black e Scholes deduziram uma fórmula para o preço de opções europeias (prémio) que se baseia nos seguintes pressupostos:

Modelo de Black-Scholes

Black e Scholes deduziram uma fórmula para o preço de opções europeias (prémio) que se baseia nos seguintes pressupostos:

- a taxa de juro isenta de risco r e a volatilidade σ do activo são conhecidas para o tempo de vida da opção

Modelo de Black-Scholes

Black e Scholes deduziram uma fórmula para o preço de opções europeias (prémio) que se baseia nos seguintes pressupostos:

- a taxa de juro isenta de risco r e a volatilidade σ do activo são conhecidas para o tempo de vida da opção
- não há custos de transacção

Modelo de Black-Scholes

Black e Scholes deduziram uma fórmula para o preço de opções europeias (prémio) que se baseia nos seguintes pressupostos:

- a taxa de juro isenta de risco r e a volatilidade σ do activo são conhecidas para o tempo de vida da opção
- não há custos de transacção
- não há oportunidades de arbitragem

Modelo de Black-Scholes

Black e Scholes deduziram uma fórmula para o preço de opções europeias (prémio) que se baseia nos seguintes pressupostos:

- a taxa de juro isenta de risco r e a volatilidade σ do activo são conhecidas para o tempo de vida da opção
- não há custos de transacção
- não há oportunidades de arbitragem
- o activo não paga dividendos durante a vida da opção

Modelo de Black-Scholes

Black e Scholes deduziram uma fórmula para o preço de opções europeias (prémio) que se baseia nos seguintes pressupostos:

- a taxa de juro isenta de risco r e a volatilidade σ do activo são conhecidas para o tempo de vida da opção
- não há custos de transacção
- não há oportunidades de arbitragem
- o activo não paga dividendos durante a vida da opção
- a transacção do activo pode ser feita continuamente

Modelo de Black-Scholes

Black e Scholes deduziram uma fórmula para o preço de opções europeias (prémio) que se baseia nos seguintes pressupostos:

- a taxa de juro isenta de risco r e a volatilidade σ do activo são conhecidas para o tempo de vida da opção
- não há custos de transacção
- não há oportunidades de arbitragem
- o activo não paga dividendos durante a vida da opção
- a transacção do activo pode ser feita continuamente
- é permitido o short selling (venda de activos que não se possuem) e considera-se que os activos são divisíveis

Modelo de Black-Scholes

Designamos por $C(\omega, t)$ o valor da call (prémio)

Modelo de Black-Scholes

Designamos por $C(\omega, t)$ o valor da call (prémio)

O valor da call depende, para além do activo e do tempo, de:

- σ — volatilidade do activo
- K — preço de exercício
- T — prazo de vencimento
- r — taxa de juro

Modelo de Black-Scholes

- Supondo que ω segue um modelo envolvendo um movimento Browniano

Modelo de Black-Scholes

- Supondo que ω segue um modelo envolvendo um movimento Browniano
- Sob as hipóteses anteriores

Modelo de Black-Scholes

- Supondo que ω segue um modelo envolvendo um movimento Browniano
- Sob as hipóteses anteriores
- Efectuando determinadas simplificações (eliminando a componente estocástica)

Modelo de Black-Scholes

- Supondo que ω segue um modelo envolvendo um movimento Browniano
- Sob as hipóteses anteriores
- Efectuando determinadas simplificações (eliminando a componente estocástica)

Chega-se à equação com derivadas parciais de Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\frac{\partial^2 C}{\partial \omega^2} + r\omega\frac{\partial C}{\partial \omega} - rC = 0$$

- equação linear de segunda ordem, parabólica (assumindo $\omega > 0$),

Modelo de Black-Scholes

- Supondo que ω segue um modelo envolvendo um movimento Browniano
- Sob as hipóteses anteriores
- Efectuando determinadas simplificações (eliminando a componente estocástica)

Chega-se à equação com derivadas parciais de Black-Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\frac{\partial^2 C}{\partial \omega^2} + r\omega\frac{\partial C}{\partial \omega} - rC = 0$$

- equação linear de segunda ordem, parabólica (assumindo $\omega > 0$),

Impomos uma condição final e condições de fronteira para que a solução seja única:

$C(\omega, T) = \max(\omega - K, 0)$, $\lim_{\omega \to 0^+} C(\omega, t) = 0$ e $\lim_{\omega \to +\infty} (\omega - C(\omega, t)) = Ke^{-r(T-t)}$

Modelo de Black-Scholes

Mostra-se que,

$$C(\omega, t) = e^{-r(T-t)} \int_{\Omega} p(\omega)(\omega - K)^+ d\omega$$

Modelo de Black-Scholes

Mostra-se que,

$$C(\omega, t) = e^{-r(T-t)} \int_{\Omega} p(\omega)(\omega - K)^{+} d\omega$$

em que

$$p(\omega) = \frac{1}{\omega\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{[\ln\frac{\omega}{\omega_t} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}}$$

é a função de densidade de probabilidade lognormal

Modelo de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com o modelo de Black-Scholes (usámos a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB):

Modelo de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com o modelo de Black-Scholes (usámos a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB):

- valor actual do activo é 50

Modelo de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com o modelo de Black-Scholes (usámos a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB):

- valor actual do activo é 50
- taxa de juro isenta de risco é 0.1

Modelo de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com o modelo de Black-Scholes (usámos a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB):

- valor actual do activo é 50
- taxa de juro isenta de risco é 0.1
- prazo de vencimento das opções é 0.5

Modelo de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com o modelo de Black-Scholes (usámos a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB):

- valor actual do activo é 50
- taxa de juro isenta de risco é 0.1
- prazo de vencimento das opções é 0.5
- volatilidade é 0.2

Modelo de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com o modelo de Black-Scholes (usámos a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB):

- valor actual do activo é 50
- taxa de juro isenta de risco é 0.1
- prazo de vencimento das opções é 0.5
- volatilidade é 0.2
- não se consideram dividendos

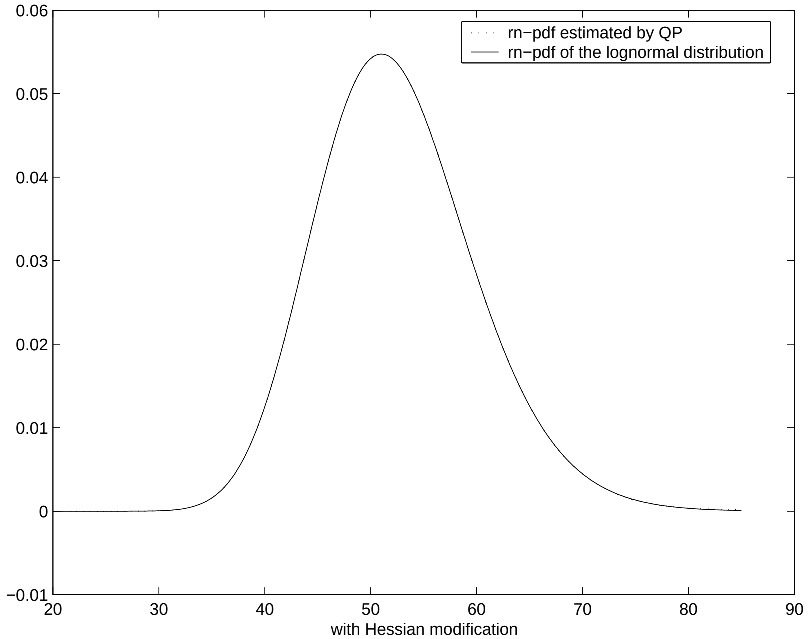
Modelo de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com o modelo de Black-Scholes (usámos a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB):

- valor actual do activo é 50
- taxa de juro isenta de risco é 0.1
- prazo de vencimento das opções é 0.5
- volatilidade é 0.2
- não se consideram dividendos
- 20 calls

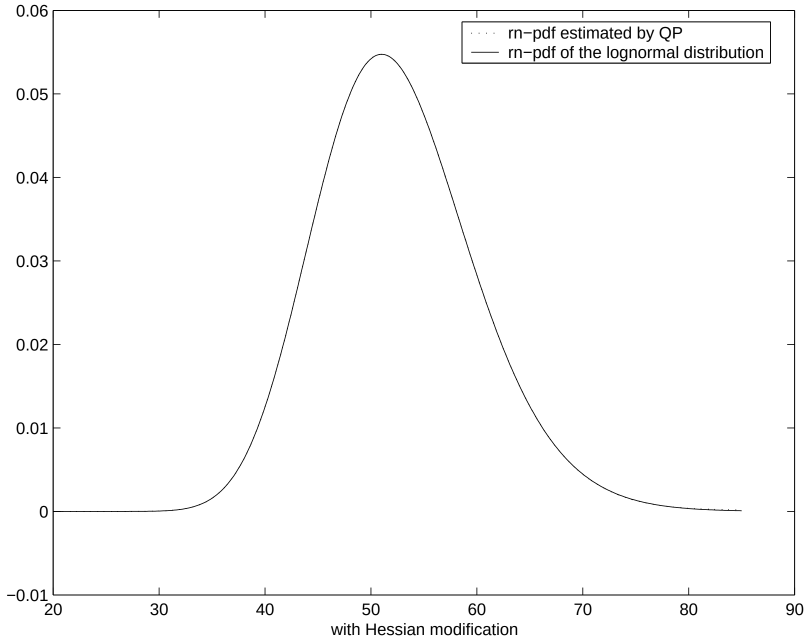
Modelo de Black-Scholes

Vamos usar os preços das opções para estimar uma função de densidade para o activo



Modelo de Black-Scholes

Vamos usar os preços das opções para estimar uma função de densidade para o activo



obtivemos, como seria de esperar, uma função de densidade lognormal

Pressupostos

- n opções europeias relativas ao mesmo activo, com preços s_0^i, $i = 1, \ldots, n$ no início de um determinado período

Pressupostos

- n opções europeias relativas ao mesmo activo, com preços s_0^i, $i = 1, \ldots, n$ no início de um determinado período
- no fim do período a opção i terá um valor $s_1^i(\omega)$

Pressupostos

- n opções europeias relativas ao mesmo activo, com preços s_0^i, $i = 1, \ldots, n$ no início de um determinado período
- no fim do período a opção i terá um valor $s_1^i(\omega)$
- $s_1^i(\omega) = (\omega - K_i)^+$ para calls e $s_1^i(\omega) = (K_i - \omega)^+$ para puts

Pressupostos

- n opções europeias relativas ao mesmo activo, com preços s_0^i, $i = 1, \ldots, n$ no início de um determinado período
- no fim do período a opção i terá um valor $s_1^i(\omega)$
- $s_1^i(\omega) = (\omega - K_i)^+$ para calls e $s_1^i(\omega) = (K_i - \omega)^+$ para puts
- r é taxa de juro isenta de risco para o período

Tabela CBOE

Mar. 17 2006 @ 13:15 ET (Data 15 Minutes Delayed)

.SPX (CBOE)	1308.83	+3.50				
Calls	Last Sale	Net	Bid	Ask	Vol	Open Int.
06 Apr 1275.	43.40	+2.20	42.80	44.80	9	35491
06 Apr 1280.	39.50	+1.50	38.60	40.60	15	5779
06 Apr 1285.	34.60	-0.30	34.60	36.60	3	3744
06 Apr 1290.	32.00	+1.50	30.70	32.70	75	13774
06 Apr 1295.	28.50	+1.50	27.00	29.00	9	6227
06 Apr 1300.	24.20	+1.20	24.20	25.40	11488	44454
06 Apr 1305.	22.00	+1.90	21.00	22.20	65	7594
06 Apr 1310.	18.00	+1.00	17.30	18.90	12916	12565
06 Apr 1315.	15.30	+1.20	14.50	16.10	564	3758
06 Apr 1320.	12.30	+0.40	12.00	13.50	67	8908

Medida de probabilidade de risco neutro

Seja Ω o espaço dos estados e o espaço probabilizado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

Caso discreto: uma medida de probabilidade de risco neutro no espaço dos estados $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ é caracterizada pelo vector de números positivos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tal que:

Medida de probabilidade de risco neutro

Seja Ω o espaço dos estados e o espaço probabilizado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

Caso discreto: uma medida de probabilidade de risco neutro no espaço dos estados $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ é caracterizada pelo vector de números positivos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tal que:

1. $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$

Medida de probabilidade de risco neutro

Seja Ω o espaço dos estados e o espaço probabilizado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

Caso discreto: uma medida de probabilidade de risco neutro no espaço dos estados $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ é caracterizada pelo vector de números positivos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tal que:

1. $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$

2. $s_0^i = e^{-r(T-t)} \sum_{j=1}^{m} p_j s_1^i(\omega_j)$, $i = 1, \ldots, n$

Medida de probabilidade de risco neutro

Caso contínuo: uma medida de probabilidade de risco neutro no espaço dos estados $\Omega = [a, b]$ é caracterizada pela sua função de densidade de probabilidade $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que:

Medida de probabilidade de risco neutro

Caso contínuo: uma medida de probabilidade de risco neutro no espaço dos estados $\Omega = [a, b]$ é caracterizada pela sua função de densidade de probabilidade $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que:

1. $\int_a^b p(\omega) d\omega = 1$

Medida de probabilidade de risco neutro

Caso contínuo: uma medida de probabilidade de risco neutro no espaço dos estados $\Omega = [a, b]$ é caracterizada pela sua função de densidade de probabilidade $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que:

1. $\int_a^b p(\omega) d\omega = 1$

2. $s_0^i = e^{-r(T-t)} \int_a^b p(\omega) s_1^i(\omega) d\omega, \; i = 1, \ldots, n$

Métodos de obtenção das prob. de risco neutro

- Métodos paramétricos: escolhem uma família de distribuições e procuram identificar os parâmetros dessas distribuições de acordo com os preços observados. Por exemplo, misturando 2 funções de densidade de probabilidade lognormais e usando os preços observados para estimar os parâmetros

Métodos de obtenção das prob. de risco neutro

- Métodos paramétricos: escolhem uma família de distribuições e procuram identificar os parâmetros dessas distribuições de acordo com os preços observados. Por exemplo, misturando 2 funções de densidade de probabilidade lognormais e usando os preços observados para estimar os parâmetros

- Métodos não paramétricos: procuram obter as funções de densidade usando funções mais gerais como, por exemplo, a aproximação por funções spline

Teorema fundamental teoria de preços

Teorema:
Uma medida de probabilidade de risco neutro existe se e só se não existirem oportunidades de arbitragem

Objectivo

Encontrar uma f.d.p. de risco neutro para o activo:

Objectivo

Encontrar uma f.d.p. de risco neutro para o activo:

- definindo a função de densidade à custa das splines cúbicas

Objectivo

Encontrar uma f.d.p. de risco neutro para o activo:

- definindo a função de densidade à custa das splines cúbicas
- resolvendo numericamente
  - um problema convexo de programação quadrática
  - um problema convexo de programação semidefinida

Splines

Uma função $S(x)$ definida em $[a, b]$ diz-se função spline de grau $k > 0$, tendo como nós a sequência estritamente crescente $a = t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} = b$, se:

- em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ $S(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a k
- $S(x)$ e as suas $k - 1$ derivadas são contínuas em $[a, b]$

Splines

Uma função $S(x)$ definida em $[a, b]$ diz-se função spline de grau $k > 0$, tendo como nós a sequência estritamente crescente $a = t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} = b$, se:

- em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ $S(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a k
- $S(x)$ e as suas $k - 1$ derivadas são contínuas em $[a, b]$

Seja f uma função definida de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, em relação à qual consideraremos um dado conjunto de nós

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

Splines

Uma função $S(x)$ definida em $[a,b]$ diz-se função spline de grau $k>0$, tendo como nós a sequência estritamente crescente $a=t_1,t_2,\ldots,t_{n+1}=b$, se:

- em cada intervalo $[t_{i-1},t_i]$ $S(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a k
- $S(x)$ e as suas $k-1$ derivadas são contínuas em $[a,b]$

Seja f uma função definida de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, em relação à qual consideraremos um dado conjunto de nós

$$a=x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}=b$$

Pretendemos aproximar a função f usando a função spline $S(x)$. Para cada nó x_j temos:

$$S(x_j)=f(x_j),\ j=1,\ldots,n+1$$

Splines cúbicas

A spline cúbica tem derivadas de segunda ordem em cada nó interior:

- $f_{j-1}(x_j) = f_j(x_j), \qquad j = 2, \ldots, n$
- $f'_{j-1}(x_j) = f'_j(x_j), \qquad j = 2, \ldots, n$
- $f''_{j-1}(x_j) = f''_j(x_j), \qquad j = 2, \ldots, n$

Splines cúbicas

A spline cúbica tem derivadas de segunda ordem em cada nó interior:

- $f_{j-1}(x_j) = f_j(x_j), \qquad j = 2, \ldots, n$
- $f'_{j-1}(x_j) = f'_j(x_j), \qquad j = 2, \ldots, n$
- $f''_{j-1}(x_j) = f''_j(x_j), \qquad j = 2, \ldots, n$

Se considerarmos splines naturais temos:

$$f''_1(a) = 0 \text{ and } f''_n(b) = 0$$

Formulação básica usando splines

Consideremos um conjunto $\mathcal{C}$ constituído por opções call:

- C_K é o preço de mercado (prémio) ($K \in \mathcal{C}$)

Formulação básica usando splines

Consideremos um conjunto $\mathcal{C}$ constituído por opções call:

- C_K é o preço de mercado (prémio) ($K \in \mathcal{C}$)
- K é o preço de exercício, ($K \in \mathcal{C}$)

Formulação básica usando splines

Consideremos um conjunto $\mathcal{C}$ constituído por opções call:

- C_K é o preço de mercado (prémio) ($K \in \mathcal{C}$)
- K é o preço de exercício, ($K \in \mathcal{C}$)

Consideremos um conjunto $\mathcal{P}$ de opções put:

- P_K é o preço de mercado (prémio) ($K \in \mathcal{P}$)

Formulação básica usando splines

Consideremos um conjunto $\mathcal{C}$ constituído por opções call:

- C_K é o preço de mercado (prémio) ($K \in \mathcal{C}$)
- K é o preço de exercício, ($K \in \mathcal{C}$)

Consideremos um conjunto $\mathcal{P}$ de opções put:

- P_K é o preço de mercado (prémio) ($K \in \mathcal{P}$)
- K é o preço de exercício, ($K \in \mathcal{P}$)

Formulação básica usando splines

Para estimar a f.d.p. de risco neutro precisamos de:

- definir um prazo de vencimento para as opções

Formulação básica usando splines

Para estimar a f.d.p. de risco neutro precisamos de:

- definir um prazo de vencimento para as opções
- escolher um intervalo $[a, b]$ para os valores possíveis do activo no fim do período

Formulação básica usando splines

Para estimar a f.d.p. de risco neutro precisamos de:

- definir um prazo de vencimento para as opções
- escolher um intervalo $[a, b]$ para os valores possíveis do activo no fim do período
- escolher uma taxa de juro

Formulação básica usando splines

Para estimar a f.d.p. de risco neutro precisamos de:

- definir um prazo de vencimento para as opções
- escolher um intervalo $[a, b]$ para os valores possíveis do activo no fim do período
- escolher uma taxa de juro
- escolher o número de nós $(n + 1)$

Formulação básica usando splines

Para estimar a f.d.p. de risco neutro precisamos de:

- definir um prazo de vencimento para as opções
- escolher um intervalo $[a, b]$ para os valores possíveis do activo no fim do período
- escolher uma taxa de juro
- escolher o número de nós $(n + 1)$
- escolher a localização dos nós

Formulação básica usando splines

As variáveis do problema de estimação são os parâmetros dos polinómios:

$$n + 1 \text{ nós} \Rightarrow n \text{ intervalos} \Rightarrow 4n \text{ variáveis}$$

Formulação básica usando splines

As variáveis do problema de estimação são os parâmetros dos polinómios:

$$n + 1 \text{ nós} \Rightarrow n \text{ intervalos} \Rightarrow 4n \text{ variáveis}$$

$y \in \mathbb{R}^{4n}$ representa as variáveis

Formulação básica usando splines

As variáveis do problema de estimação são os parâmetros dos polinómios:

$$n + 1 \text{ nós} \Rightarrow n \text{ intervalos} \Rightarrow 4n \text{ variáveis}$$

$y \in \mathbb{R}^{4n}$ representa as variáveis

p_y designa a função spline cúbica que aproxima a f.d.p. de risco neutro em $[a, b]$

Formulação básica usando splines

Precisamos de garantir que p_y é uma função de densidade de probabilidade:

Formulação básica usando splines

Precisamos de garantir que p_y é uma função de densidade de probabilidade:

$$\boxed{\int_a^b p_y(\omega) d\omega = 1} \longrightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(\omega) d\omega = 1}$$

Formulação básica usando splines

Precisamos de garantir que p_y é uma função de densidade de probabilidade:

$$\boxed{\int_a^b p_y(\omega)d\omega = 1} \longrightarrow \boxed{\sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(\omega)d\omega = 1}$$

$$\boxed{p_y(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in [a,b]}$$

Formulação QP (desigualdades lineares)

Formulação SDP

Formulação básica usando splines

- Valor esperado, descontado à taxa de juro, usando p_y como a f.d.p. de risco neutro:

Formulação básica usando splines

- Valor esperado, descontado à taxa de juro, usando p_y como a f.d.p. de risco neutro:

$$C_K(y) = e^{-r(T-t)} \int_a^b p_y(\omega)(\omega - K)^+ d\omega$$

Formulação básica usando splines

- Valor esperado, descontado à taxa de juro, usando p_y como a f.d.p. de risco neutro:

$$C_K(y) = e^{-r(T-t)} \int_a^b p_y(\omega)(\omega - K)^+ d\omega$$

$$P_K(y) = e^{-r(T-t)} \int_a^b p_y(\omega)(K - \omega)^+ d\omega$$

Formulação básica usando splines

- Valor esperado, descontado à taxa de juro, usando p_y como a f.d.p. de risco neutro:

$$C_K(y) = e^{-r(T-t)} \int_a^b p_y(\omega)(\omega - K)^+ d\omega$$

$$P_K(y) = e^{-r(T-t)} \int_a^b p_y(\omega)(K - \omega)^+ d\omega$$

- $(C_K - C_K(y))^2$ mede a diferença entre o valor observado e o valor aproximado

Formulação básica usando splines

A estimação envolve a minimização da função de mínimos quadrados:

$$E(y) = \sum_{K\in\mathcal{C}} (C_K - C_K(y))^2 + \sum_{K\in\mathcal{P}} (P_K - P_K(y))^2$$

Formulação básica usando splines

O problema de estimação é um problema convexo de programação quadrática :

$$\min \quad E(y) = \sum_{K \in \mathcal{C}} (C_K - C_K(y))^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}} (P_K - P_K(y))^2 \qquad \text{tal que}$$

Formulação básica usando splines

O problema de estimação é um problema convexo de programação quadrática :

$$\min \quad E(y) = \sum_{K \in \mathcal{C}} (C_K - C_K(y))^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}} (P_K - P_K(y))^2 \qquad \text{tal que}$$

- $f_{j-1}(x_j) = f_j(x_j), \quad j = 2, \ldots, n$
- $f'_{j-1}(x_j) = f'_j(x_j) \quad j = 2, \ldots, n,$
- $f''_{j-1}(x_j) = f''_j(x_j) \quad j = 2, \ldots, n,$
- $f''_1(a) = 0, f''_n(b) = 0$

Formulação básica usando splines

O problema de estimação é um problema convexo de programação quadrática :

$$\min \quad E(y) = \sum_{K \in \mathcal{C}} (C_K - C_K(y))^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}} (P_K - P_K(y))^2 \qquad \text{tal que}$$

- $f_{j-1}(x_j) = f_j(x_j), \quad j = 2, \ldots, n$
- $f'_{j-1}(x_j) = f'_j(x_j) \quad j = 2, \ldots, n,$
- $f''_{j-1}(x_j) = f''_j(x_j) \quad j = 2, \ldots, n,$
- $f''_1(a) = 0, f''_n(b) = 0$
- $\sum_{j=1}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_j(\omega) d\omega = 1$
- $f_j(x_j) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \quad f_n(x_{n+1}) \geq 0$

Formulação básica usando splines

Consideremos uma opção call C_K tal que $x_\ell \leq K \leq x_{\ell+1}$, $1 \leq \ell \leq n$

Formulação básica usando splines

Consideremos uma opção call C_K tal que $x_\ell \leq K \leq x_{\ell+1}$, $1 \leq \ell \leq n$

$$\begin{aligned}
e^{r(T-t)} C_K(y) &= \int_a^b p_y(\omega)(\omega - K)^+ d\omega \\
&= \sum_{j=\ell}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_y(\omega)(\omega - K)^+ d\omega \\
&= \int_K^{x_{\ell+1}} p_y(\omega)(\omega - K) d\omega + \sum_{j=\ell+1}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_y(\omega)(\omega - K) d\omega \\
&= \int_K^{x_{\ell+1}} (\alpha_\ell \omega^3 + \beta_\ell \omega^2 + \gamma_\ell \omega + \delta_\ell)(\omega - K) d\omega + \\
&\quad \sum_{j=\ell+1}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\alpha_j \omega^3 + \beta_j \omega^2 + \gamma_j \omega + \delta_j)(\omega - K) d\omega
\end{aligned}$$

Formulação básica usando splines

- A expressão $C_K(y)$ é linear relativamente às componentes $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) \Rightarrow (C_K - C_K(y))^2$ é quadrática

Formulação básica usando splines

- A expressão $C_K(y)$ é linear relativamente às componentes $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) \Rightarrow (C_K - C_K(y))^2$ é quadrática
- De modo semelhante se deduz uma fórmula para $P_K(y)$

Formulação básica usando splines

- A expressão $C_K(y)$ é linear relativamente às componentes $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) \Rightarrow (C_K - C_K(y))^2$ é quadrática
- De modo semelhante se deduz uma fórmula para $P_K(y)$
- Sendo assim, a função objectivo $E(y)$ é convexa e quadrática

Formulação básica usando splines

- A expressão $C_K(y)$ é linear relativamente às componentes $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) \Rightarrow (C_K - C_K(y))^2$ é quadrática
- De modo semelhante se deduz uma fórmula para $P_K(y)$
- Sendo assim, a função objectivo $E(y)$ é convexa e quadrática
- Todas as restrições são lineares

Formulação QP

$$\boxed{p_y(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in [a,b]}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_j(x_j) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad f_n(x_{n+1}) \geq 0}$$

Formulação QP

$$\boxed{p_y(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in [a, b]}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_j(x_j) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad f_n(x_{n+1}) \geq 0}$$

- Ao juntarmos estas restrições à formulação QP básica mantemos a estrutura do problema (QP convexo)

Formulação QP

$$\boxed{p_y(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in [a, b]}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{f_j(x_j) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad f_n(x_{n+1}) \geq 0}$$

- Ao juntarmos estas restrições à formulação QP básica mantemos a estrutura do problema (QP convexo)

- A desvantagem é a falta de garantia de não negatividade entre os nós

Formulação SDP

- Precisamos garantir que $p_y(\omega) \geq 0, \forall \omega \in [a, b]$

Formulação SDP

- Precisamos garantir que $p_y(\omega) \geq 0, \forall \omega \in [a, b]$
- O polinómio $f_s(x) = \alpha_s x^3 + \beta_s x^2 + \gamma_s x + \delta_s$ verifica $f_s(x) \geq 0,\ \forall x \in [x_s, x_{s+1}]$ se e só se existe uma matriz 4x4 $X^s = [x^s_{ij}]_{i,j=0,\ldots,3}$ tal que

$$
\begin{array}{rcl}
x^s_{ij} & = & 0,\ \text{se } i + j = 1 \text{ ou } 5 \\
x^s_{03} + x^s_{12} + x^s_{21} + x^s_{30} & = & 0 \\
x^s_{00} & = & \alpha_s x_s^3 + \beta_s x_s^2 + \gamma_s x_s + \delta_s \\
x^s_{02} + x^s_{11} + x^s_{20} & = & 3\alpha_s x_s^2 + x_{s+1} + \beta_s(2x_s x_{s+1} + x_s^2) \\
 & & +\gamma_s(x_{s+1} + 2x_s) + 3\delta_s \\
x^s_{13} + x^s_{22} + x^s_{31} & = & 3\alpha_s x_s x_{s+1}^2 + \beta_s(2x_s x_{s+1} + x_{s+1}^2) + \\
 & & +\gamma_s(x_s + 2x_{s+1}) + 3\delta_s \\
x^s_{33} & = & \alpha_s x_{s+1}^3 + \beta_s x_{s+1}^2 + \gamma_s x_{s+1} + \delta_s \\
X^s & \succeq & 0
\end{array}
$$

Bertsimas e Popescu (2002)

Formulação SDP

- Todas as restrições são lineares relativamente às variáveis de optimização $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ excepto as restrições semidefinidas positivas

Formulação SDP

- Todas as restrições são lineares relativamente às variáveis de optimização $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ excepto as restrições semidefinidas positivas

- O problema resultante é um problema convexo de programação semidefinida, com uma função objectivo quadrática

Formulação SDP

- Todas as restrições são lineares relativamente às variáveis de optimização $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ excepto as restrições semidefinidas positivas
- O problema resultante é um problema convexo de programação semidefinida, com uma função objectivo quadrática
- Passamos a ter o seguinte problema

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\min_{y, X^1, \ldots, X^{ns}} & c^T y + \frac{1}{2} y^T Q y \\
& \text{s.a} \\
& f_i^T y = b_i, i = 1, \ldots, 3n_s, \\
& H_k^s \bullet X^s = 0, k = 1, 2, s = 1, \ldots, n_s, \\
& (g_k^s)^T y + H_k^s \bullet X^s, k = 3, 4, 5, 6, s = 1, \ldots, n_s \\
& X^s \succeq 0, s = 1, \ldots, n_s
\end{array}
$$

Formulação SDP

- Software para optimização semidefinida resolve apenas problemas com funções objectivo lineares

Formulação SDP

- Software para optimização semidefinida resolve apenas problemas com funções objectivo lineares

- Reformulámos o problema SDP:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ & z = L^T y + L^{-1} c, \quad (t, z) \in SOC \\ & \text{restrições anteriores} \end{aligned}$$

introduzindo restrições cónicas de segunda ordem

Detalhes numéricos

- Escalonámos ambos os problemas, QP e SDP, substituindo x_s por $x_s = x_s/x_{avg}$, em que x_{avg} é o valor médio das componentes do vector dos nós

Detalhes numéricos

- Escalonámos ambos os problemas, QP e SDP, substituindo x_s por $x_s = x_s/x_{avg}$, em que x_{avg} é o valor médio das componentes do vector dos nós

- Usámos o MATLAB para resolver o problema QP convexo e SDPT3, escrito em MATLAB, para resolver o problema SDP

Detalhes numéricos

- Escalonámos ambos os problemas, QP e SDP, substituindo x_s por $x_s = x_s/x_{avg}$, em que x_{avg} é o valor médio das componentes do vector dos nós
- Usámos o MATLAB para resolver o problema QP convexo e SDPT3, escrito em MATLAB, para resolver o problema SDP
- Considerámos dois conjuntos de dados:

Detalhes numéricos

- Escalonámos ambos os problemas, QP e SDP, substituindo x_s por $x_s = x_s/x_{avg}$, em que x_{avg} é o valor médio das componentes do vector dos nós
- Usámos o MATLAB para resolver o problema QP convexo e SDPT3, escrito em MATLAB, para resolver o problema SDP
- Considerámos dois conjuntos de dados:
  - um gerado a partir do modelo de Black-Scholes

Detalhes numéricos

- Escalonámos ambos os problemas, QP e SDP, substituindo x_s por $x_s = x_s/x_{avg}$, em que x_{avg} é o valor médio das componentes do vector dos nós
- Usámos o MATLAB para resolver o problema QP convexo e SDPT3, escrito em MATLAB, para resolver o problema SDP
- Considerámos dois conjuntos de dados:
  - um gerado a partir do modelo de Black-Scholes
  - o outro extraído a partir do índice S&P 500

Dados de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções segundo o modelo de Black-Scholes usando a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB:

Dados de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções segundo o modelo de Black-Scholes usando a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB:

- Valor actual do activo é 50

Dados de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções segundo o modelo de Black-Scholes usando a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB:

- Valor actual do activo é 50
- Taxa de juro isenta de risco é 0.1

Dados de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções segundo o modelo de Black-Scholes usando a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB:

- Valor actual do activo é 50
- Taxa de juro isenta de risco é 0.1
- Prazo de vencimento das opções é 0.5

Dados de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções segundo o modelo de Black-Scholes usando a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB:

- Valor actual do activo é 50
- Taxa de juro isenta de risco é 0.1
- Prazo de vencimento das opções é 0.5
- Volatilidade 0.2

Dados de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções segundo o modelo de Black-Scholes usando a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB:

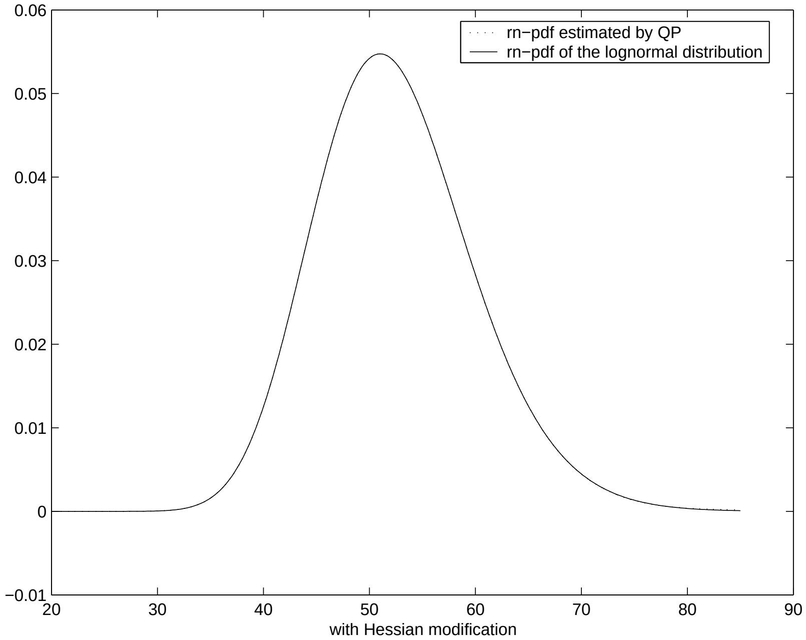
- Valor actual do activo é 50
- Taxa de juro isenta de risco é 0.1
- Prazo de vencimento das opções é 0.5
- Volatilidade 0.2
- Não se consideram dividendos

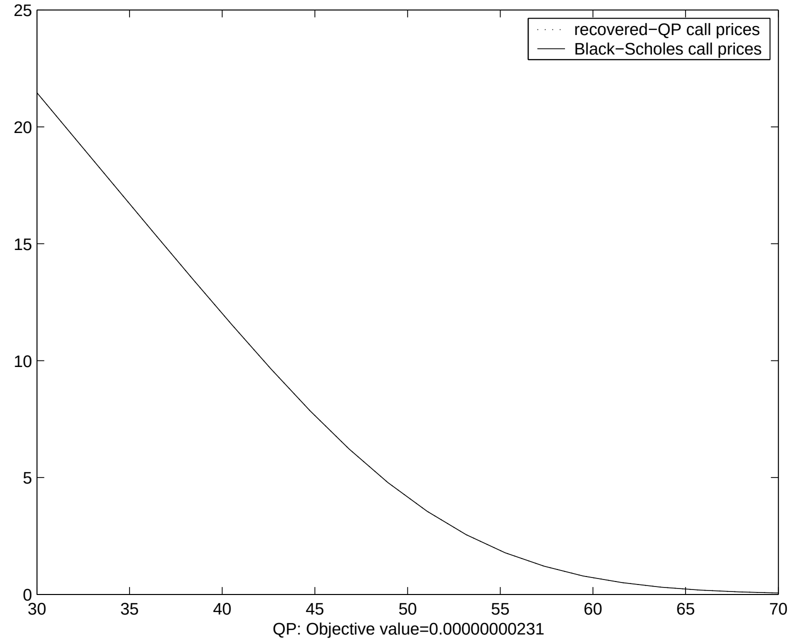
Dados de Black-Scholes

Gerámos dados relativos a preços de opções segundo o modelo de Black-Scholes usando a função BLSPRICE pertencente à Financial Toolbox do MATLAB:

- Valor actual do activo é 50
- Taxa de juro isenta de risco é 0.1
- Prazo de vencimento das opções é 0.5
- Volatilidade 0.2
- Não se consideram dividendos
- 20 calls

f.d.p. estimada - dados de Black-Scholes - QP

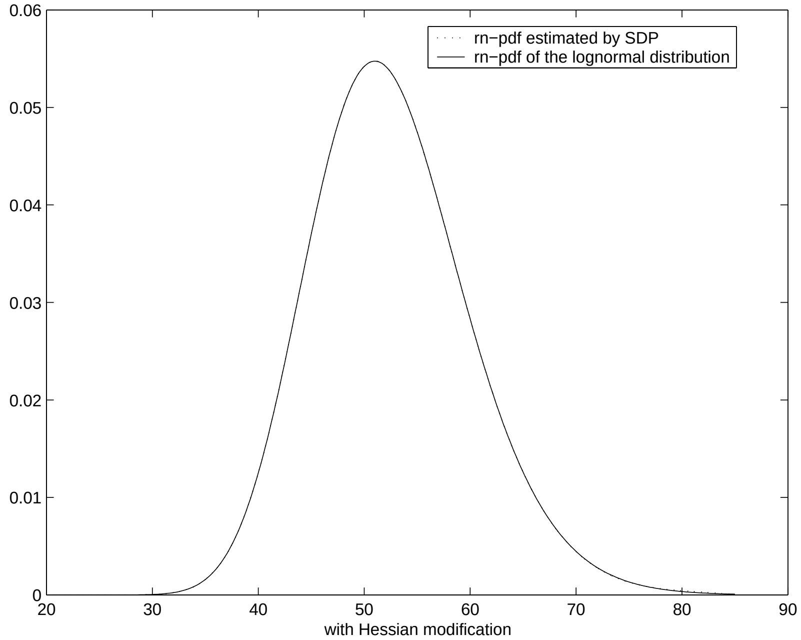


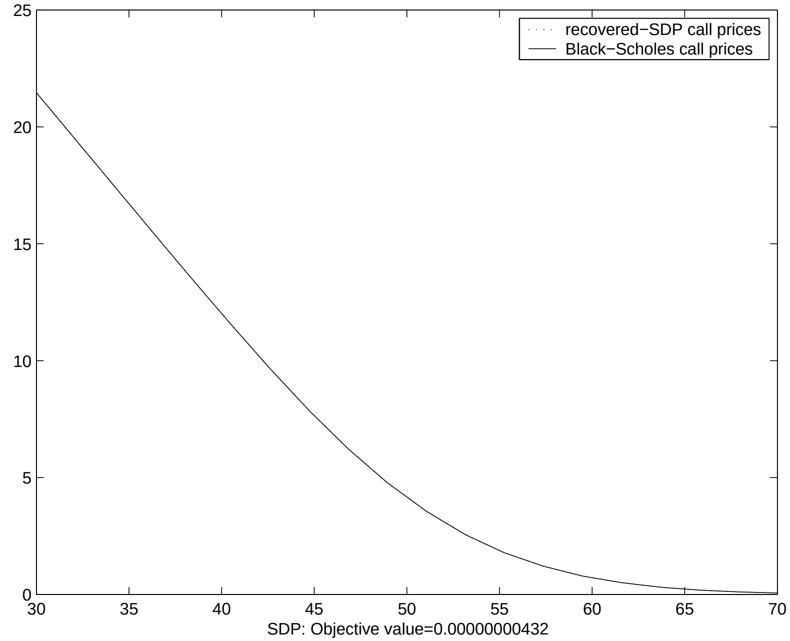


Função de densidade de probabilidade estimada a partir de dados de Black-Scholes, usando QP

Ajuste dos preços estimados

f.d.p. estimada - dados de Black-Scholes - SDP





Função de densidade de probabilidade estimada a partir de dados de Black-Scholes, usando SDP

Ajuste dos preços estimados

Dados S&P 500

- Opções call e put (europeias) transaccionadas no Chicago Board of Options Exchange (CBOE) , em
  - 29 de Abril de 2003 com prazo de vencimento em 17 de Maio

Dados S&P 500

- Opções call e put (europeias) transaccionadas no Chicago Board of Options Exchange (CBOE) , em
  - 29 de Abril de 2003 com prazo de vencimento em 17 de Maio

- Taxa de juro obtida a partir de Federal Reserve Bank of New York

  Considerámos Treasury Bill com um prazo de vencimento o mais próximo possível do prazo de vencimento das opções

Arbitragem- dados S&P 500

Eliminámos oportunidades de arbitragem:

Arbitragem- dados S&P 500

Eliminámos oportunidades de arbitragem:

- retirámos opções cujo preço de mercado se situava fora do intervalo bid-ask

Arbitragem- dados S&P 500

Elimінámos oportunidades de arbitragem:

- retirámos opções cujo preço de mercado se situava fora do intervalo bid-ask
- transformámos puts em calls usando a paridade put-call

Arbitragem- dados S&P 500

Eliminámos oportunidades de arbitragem:

- retirámos opções cujo preço de mercado se situava fora do intervalo bid-ask
- transformámos puts em calls usando a paridade put-call
- eliminámos um dos preços (baseado no volume de transacções) no caso de existir uma call com o mesmo preço de exercício

Arbitragem- dados S&P 500

Eliminámos oportunidades de arbitragem:

- retirámos opções cujo preço de mercado se situava fora do intervalo bid-ask
- transformámos puts em calls usando a paridade put-call
- eliminámos um dos preços (baseado no volume de transacções) no caso de existir uma call com o mesmo preço de exercício
- verificámos a monotonicidade e a convexidade

Pesos - dados S&P 500

Redefinimos a função objectivo de forma ponderada:

$$E(y) = \sum_{K \in \mathcal{C}} \theta_K (C_K - C_K(y))^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}} \mu_K (P_K - P_K(y))^2$$

Pesos - dados S&P 500

Redefinimos a função objectivo de forma ponderada:

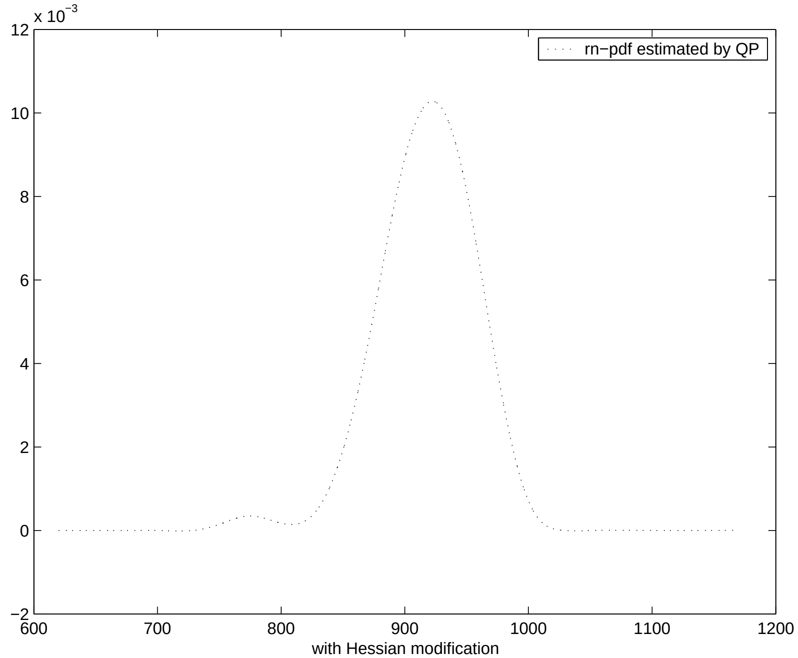
$$E(y) = \sum_{K \in \mathcal{C}} \theta_K (C_K - C_K(y))^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}} \mu_K (P_K - P_K(y))^2$$

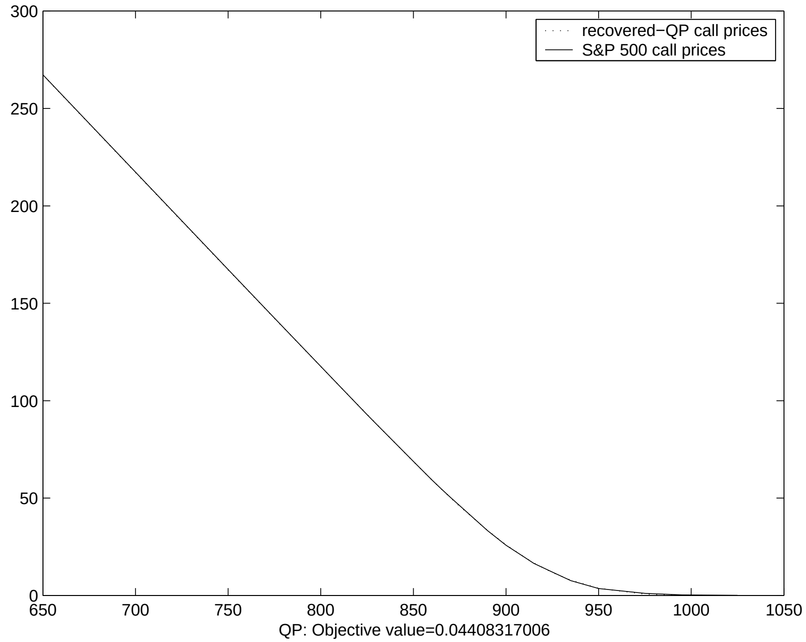
sendo

$$\theta_K = \frac{\text{volume de transacção de } C_K}{\text{volume de transacções para todas as opções de compra}}$$

$$\mu_K = \frac{\text{volume de transacção de } P_K}{\text{volume de transacções para todas as opções de venda}}$$

f.d.p. estimada-dados S&P 500-QP

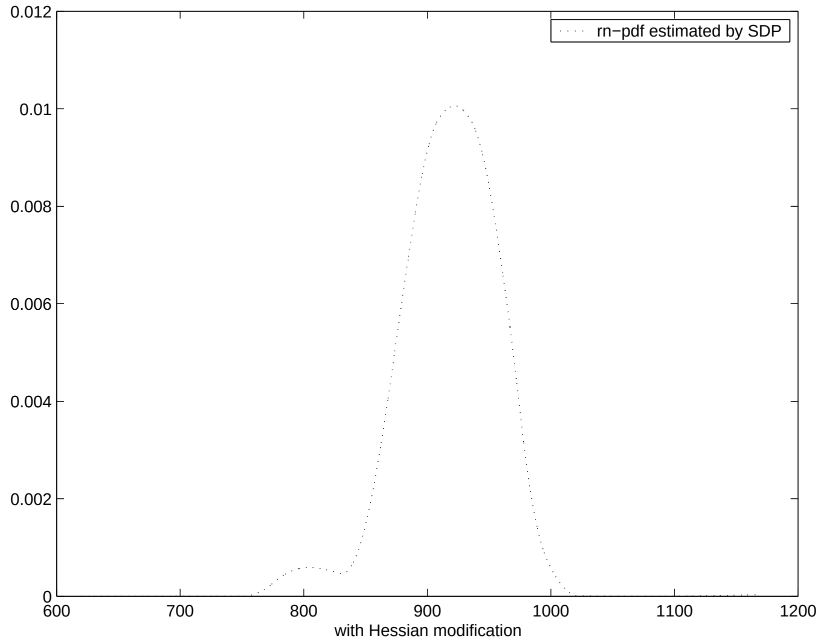


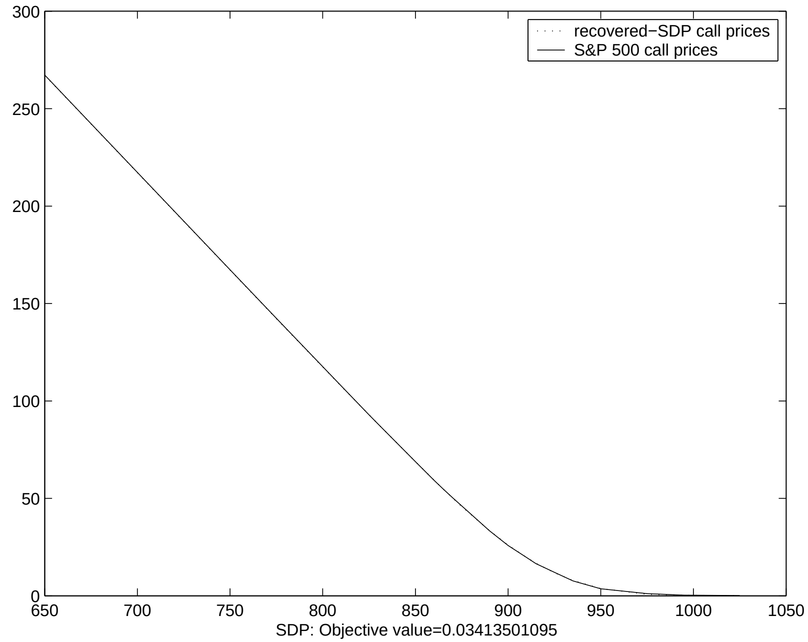


Função de densidade de probabilidade estimada a partir de dados do índice S&P 500, usando QP

Ajuste dos preços estimados

f.d.p. estimada dados S&P 500 data-SDP

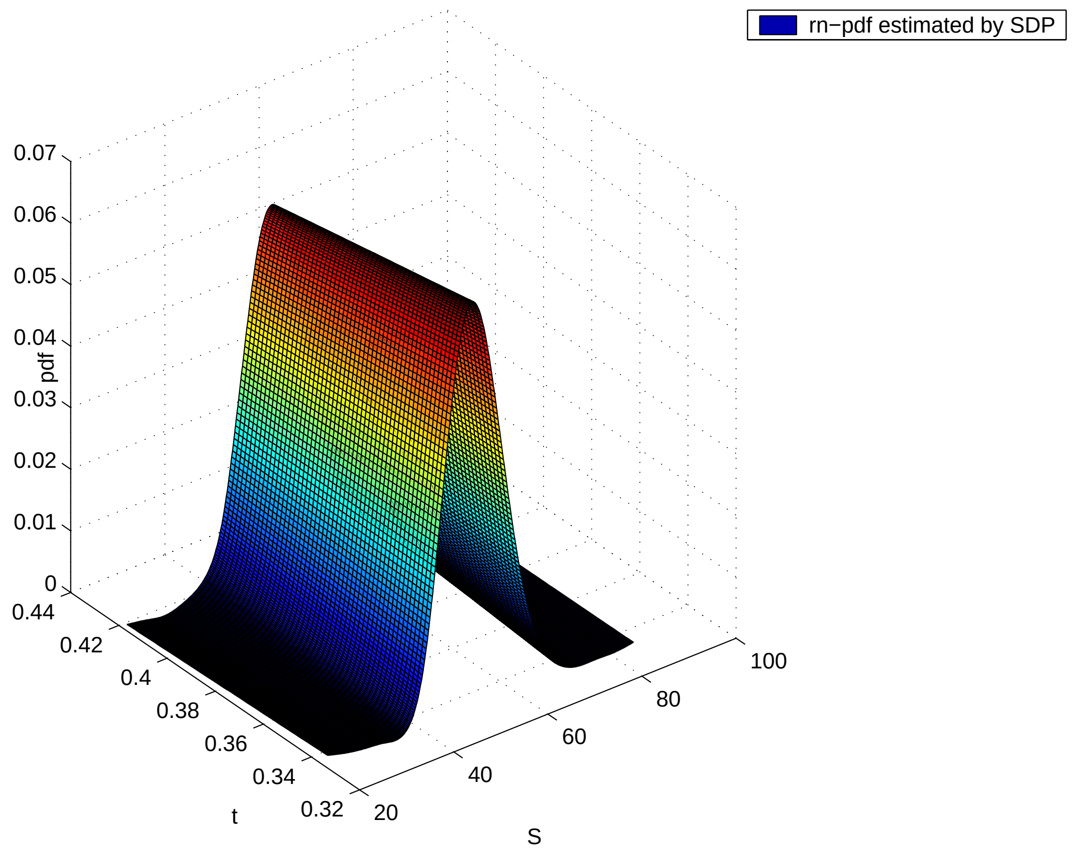




Função de densidade de probabilidade estimada a partir de dados do índice S&P 500, usando SDP

Ajuste dos preços estimados

f.d.p. estimada, dados B-S -3 maturidades



Evolução temporal para a função de densidade de probabilidade

Investigação em curso e futura

- Completar o trabalho considerando preços de opções com diferentes prazos de vencimento e preços de exercício, com vista à obtenção de f.d.p.'s com evolução temporal

- Fazer a estimação numérica da volatilidade