Resolução do problema do caixeiro viajante assimétrico (e uma variante) através da relaxação Lagrangeana

Ana Maria A.C. Rocha e João Luís C. Soares

Departamento de Produção e Sistemas
Escola de Engenharia
Universidade do Minho
arocha@dps.uminho.pt
http://www.norg.uminho.pt/arocha

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
jsoares@mat.uc.pt
http://www.mat.uc.pt/∼jsoares

Universidade do Minho

Conteúdo

- Motivação
- Relaxação Lagrangeana
- Métodos do tipo Subgradiente
- Resolução do problema do caixeiro viajante assimétrico
- Resolução do problema do reparador viajante
- Conclusões

Universidade do Minho

Conteúdo

- Motivação
- Relaxação Lagrangeana
- Métodos do tipo Subgradiente
- Resolução do problema do caixeiro viajante assimétrico
- Resolução do problema do reparador viajante
- Conclusões

Conteúdo

Universidade do Minho

Conteúdo

Universidade do Minho

Conteúdo

- Motivação
- Relaxação Lagrangeana
- Métodos do tipo Subgradiente
- Resolução do problema do caixeiro viajante assimétrico
- Resolução do problema do reparador viajante
- Conclusões

Universidade do Minho

Conteúdo

- Motivação
- Relaxação Lagrangeana
- Métodos do tipo Subgradiente
- Resolução do problema do caixeiro viajante assimétrico
- Resolução do problema do reparador viajante
- Conclusões

Universidade do Minho

Motivação

Motivação

Alguns problemas de optimização linear originários de aplicações do mundo real têm:

- um grande número de variáveis e/ou
- um grande número de restrições

$$\Downarrow$$

dificilmente podem ser resolvidos por métodos do tipo simplex de uma forma eficiente

Motivação

Alguns problemas de optimização linear originários de aplicações do mundo real têm:

- um grande número de variáveis e/ou
- um grande número de restrições

$\Downarrow$

dificilmente podem ser resolvidos por métodos do tipo simplex de uma forma eficiente

Exemplos:

Motivação

Alguns problemas de optimização linear originários de aplicações do mundo real têm:

- um grande número de variáveis e/ou
- um grande número de restrições

$\Downarrow$

dificilmente podem ser resolvidos por métodos do tipo simplex de uma forma eficiente

Exemplos:

- problema do caixeiro viajante

Universidade do Minho

Motivação

Alguns problemas de optimização linear originários de aplicações do mundo real têm:

- um grande número de variáveis e/ou
- um grande número de restrições

$$\Downarrow$$

dificilmente podem ser resolvidos por métodos do tipo simplex de uma forma eficiente

Exemplos:

- problema do caixeiro viajante

- problema do reparador viajante

Relaxação Lagrangeana

Relaxação Lagrangeana

$$
\begin{aligned}
z^* = \quad & \min \quad cx \\
& \text{s.a} \quad Ax \leq b, \\
& \qquad\quad 0 \leq x \leq 1,
\end{aligned} \tag{1}
$$

Relaxação Lagrangeana

$$
\begin{array}{rll}
z^* = & \min & cx \\
& \text{s.a} & Ax \leq b, \\
& & 0 \leq x \leq 1,
\end{array} \tag{1}
$$

A relaxação Lagrangeana de (1) relativamente às restrições de desigualdade é dada por

$$
z(\pi) \equiv \begin{cases} \min & cx + \pi (Ax - b) \\ \text{s.a} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2}
$$

para um vector dual de multiplicadores $\pi \geq 0$.

Relaxação Lagrangeana

Universidade do Minho

$$
\begin{aligned}
z^* = \quad & \min \quad cx \\
& \text{s.a} \quad Ax \leq b, \\
& \qquad\;\; 0 \leq x \leq 1,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A relaxação Lagrangeana de (1) relativamente às restrições de desigualdade é dada por

$$
z(\pi) \equiv \begin{cases} \min & cx + \pi (Ax - b) \\ \text{s.a} & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
\tag{2}
$$

para um vector dual de multiplicadores $\pi \geq 0$.

Note-se que

- $z(\pi) \leq z^*$ para todo $\pi \geq 0$, ou seja,
- $z(\pi)$ é um limite inferior para o valor óptimo de (1).

O problema que permite determinar o melhor de todos os limites inferiores é o problema Lagrangeano dual de (1).

Problema dual

O problema dual de (1) é definido por

$$\begin{array}{ll} \max & z(\pi) \\ \text{s.a} & \pi \geq 0. \end{array} \tag{3}$$

Universidade do Minho

Problema dual

O problema dual de (1) é definido por

$$\begin{array}{ll} \max & z(\pi) \\ \text{s.a} & \pi \geq 0. \end{array} \tag{3}$$

As principais características do problema dual são:

- côncavo $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Vantagem}}$
- não diferenciável $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Limitação}}$

Vantagens da relaxação Lagrangeana

Porquê resolver o problema dual em vez do primal?

1. o cálculo de $z(\pi)$ pode ser mais simples, em termos computacionais, do que resolver o problema primal;
2. o problema dual é um problema côncavo de maximização que implica que todo o seu máximo local também é máximo global;
3. os limites superiores para o valor óptimo do problema primal encontrados na resolução do problema dual podem ser úteis
   - na resolução de, por exemplo, um problema de optimização combinatória subjacente ao primal ou
   - no contexto da resolução aproximada de um problema primal para definir soluções admissíveis pela via heurística.

Limitações da relaxação Lagrangeana

Dificuldades na resolução do problema dual

1. a avaliação de $z(\pi)$ requer a resolução de um problema de optimização;
2. a função z é, em geral, não diferenciável e, por isso, os métodos clássicos de Optimização Não Linear não podem ser usados na resolução do problema dual.

Existem vários métodos que permitem resolver o problema dual, como por exemplo,

- Algoritmo do subgradiente (*Subgradient algorithm*)
- Geração de colunas (*Column generation*)
- Métodos de feixe (*Bundle methods*)
- Algoritmo volumétrico (*Volume algorithm*)

Métodos do tipo Subgradiente

Algoritmo do Subgradiente

Desde os inícios dos anos 70 que o algoritmo do subgradiente, inicialmente proposto por Polyak (1969), é usado para produzir limites inferiores de problemas lineares de grandes dimensões.

Existem muitas experiências feitas com este algoritmo produzindo muito boas aproximações à solução dual.

Vantagens

- é um método simples de implementar;
- necessita de pouca memória de armazenamento;
- funciona bem, fornecendo boas aproximações à solução em dezenas ou centenas de iterações.

Algoritmo do Subgradiente

Desvantagens

- não tem um critério de paragem bem definido; baseia-se
  - no limite máximo do número de iterações ou
  - no limite do número de passos em que não se verifique melhoria na aproximação;
- tem um comportamento de ziguezague tornando a procura do óptimo mais lenta; que se deve ao facto de
  - o algoritmo não ser de subida
  - não preservar em memória os subgradientes anteriores;
- não produz soluções para as variáveis primais, o que leva à aplicação de um procedimento diferente para a sua computação.

Algoritmo volumétrico

- O Algoritmo Volumétrico (AV), introduzido por Barahona e Anbil (2000), é uma extensão do método do subgradiente que foi desenvolvido para produzir simultaneamente
  - limites inferiores
  - soluções duais admissíveis
  - boas aproximações às soluções primais.
- O algoritmo volumétrico além de ser muito rápido a produzir boas aproximações à solução primal requer também pouca memória de armazenamento.
- Pertence ao projecto COIN-OR (*Common Optimization Interface for Operations Research*).
- Disponível em `http://www.coin-or.org`.

Algoritmo volumétrico

Vantagens

- tem um critério de paragem bem definido, baseado
  - no limite máximo do número de iterações ou
  - na violação máxima das restrições ser inferior a uma pequena quantidade positiva (≈ 0) e
  - a diferença relativa entre o limite inferior e a aproximação primal ser inferior a uma pequena quantidade (≈ 0);
- não tem um comportamento de ziguezague porque se garante que
  - o algoritmo é de subida
  - os subgradientes são calculados como combinação linear dos subgradientes anteriores;
- produz aproximações às soluções primais como combinação linear das soluções anteriores.

Algoritmo volumétrico

Entrada: π^0

Inicialização: Obter y^0 uma solução óptima em $z(\pi^0)$ e definir $v^0 = b - Ay^0 \in \partial z(\pi^0)$.
Iniciar $\bar{\pi}^1 = \pi^0$, $x^1 = y^0$, $w^1 = v^0$, $j = 1$ e $k = 1$.

Iteração Genérica j:

Passo 1: Para algum comprimento do passo $s_j > 0$, definir $\pi^j = [\bar{\pi}^k + s_j w^j]^+$.
Passo 2: Obter y^j uma solução óptima em $z(\pi^j)$ e definir $v^j = b - Ay^j \in \partial z(\pi^j)$.
Passo 3: Para algum $\alpha_j \in [0, 1]$, definir

$$x^{j+1} = \alpha_j y^j + (1 - \alpha_j)\, x^j$$
$$w^{j+1} = \alpha_j v^j + (1 - \alpha_j)\, w^j.$$

Passo 4: Se $z(\pi^j) > z(\bar{\pi}^k)$ então
definir $\bar{\pi}^{k+1} = \pi^j$ e fazer $k \leftarrow k + 1$.
Passo 5: Testar critério de paragem. Fazer $j \leftarrow j + 1$ e voltar ao *Passo 1*.

Combinar o Algoritmo volumétrico com ...

... outras técnicas de optimização na resolução de problemas lineares difíceis:

★ métodos do tipo simplex para resolver

o problema do caixeiro viajante assimétrico

- ▶ modelo relaxado
- ▶ modelo inteiro

Combinar o Algoritmo volumétrico com ...

... outras técnicas de optimização na resolução de problemas lineares difíceis:

★ métodos do tipo simplex para resolver

o problema do caixeiro viajante assimétrico

▶ modelo relaxado

▶ modelo inteiro

★ métodos do tipo simplex para resolver

o problema do reparador viajante

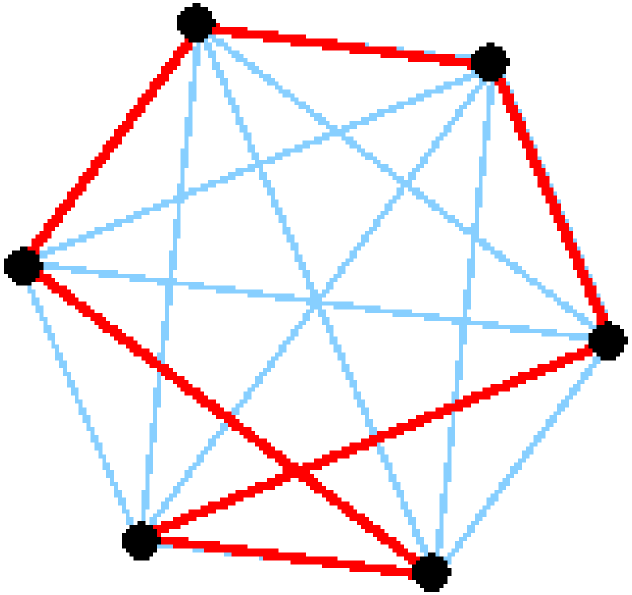
▶ modelo relaxado

▶ modelo inteiro

Resolução do problema do caixeiro viajante assimétrico

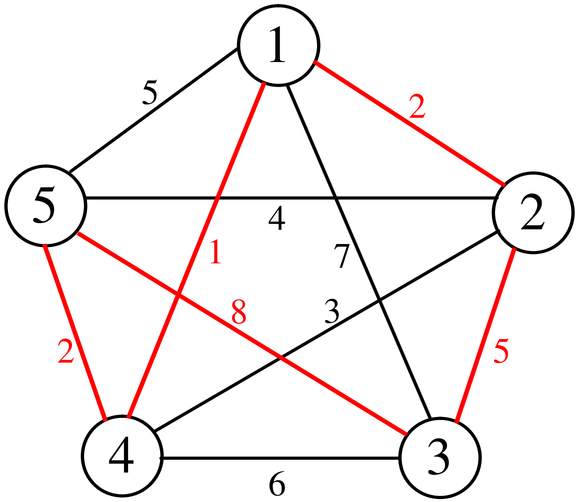
Problema do caixeiro viajante

Dado um conjunto de cidades e conhecidas as distâncias entre cada uma delas, pretende-se determinar o circuito de menor comprimento que passa por todas as cidades, exactamente uma vez, e que termina na cidade de onde partiu.



Problema do caixeiro viajante

- A estrutura matemática do problema do caixeiro viajante é um grafo em que cada cidade é um nó e as linhas que unem todos os nós são denominadas por arcos. Associada a cada linha está uma distância ou custo.
- Uma viagem, que passe por todas as cidades uma única vez, corresponde a qualquer subconjunto de linhas do grafo e é designado por circuito Hamiltoniano, na teoria de grafos. O comprimento de um circuito é a soma do comprimento das linhas que fazem parte da viagem.



Circuito óptimo
1 - 4 - 5 - 3 - 2 - 1

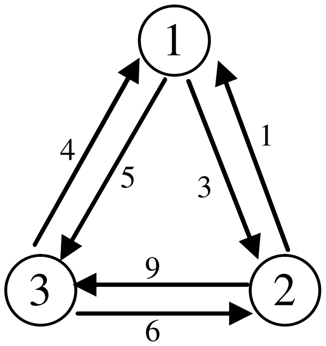
Comprimento do circuito
$1 + 2 + 8 + 5 + 2 = 18$

Universidade do Minho

Problema do caixeiro viajante

Problema simétrico $\neq$ Problema assimétrico

No caso do **problema assimétrico** as distâncias entre duas cidades podem ser diferentes, consoante os trajectos são percorridos num ou noutro sentido.



Universidade do Minho

Problema do caixeiro viajante

Aplicações:

- Determinação de percursos óptimos em transporte de pessoas ou mercadorias

$\Updownarrow$

ex: autocarro de escola

- Subproblema de problemas de distribuição e planeamento de rotas de veículos

$\Updownarrow$

ex: determinar, para um dado conjunto de veículos, qual o percurso que cada veículo deve efectuar, de modo a, no seu conjunto, servir todos os clientes

Problema do caixeiro viajante assimétrico

Universidade do Minho

Matematicamente, o PCVA pode ser definido por

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

s.a

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} x_{ij} = 1 \qquad (i \in V)$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(j)} x_{ij} = 1 \qquad (j \in V)$$

eliminação de subcircuitos

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad ((i,j) \in A)$$

- $V = \{1, \ldots, n\}$ representa o conjunto de vértices
- $A = \{(i,j) : i,j \in V; i \neq j\}$ o conjunto de arcos
- $\delta^-(j)$ denota o conjunto dos arcos que convergem para o vértice j
- $\delta^+(i)$ denota o conjunto dos arcos que divergem do vértice i

Problema do caixeiro viajante assimétrico

As restrições de **eliminação de subcircuitos** podem ser modeladas de várias formas:

- usando desigualdades que envolvem apenas as variáveis x_{ij}

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{formulação natural}}$$

ou

- variáveis adicionais que podem ou não estar associadas aos arcos

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{formulação estendida}}$$

Eliminação de subcircuitos

Formulação clássica - DFJ

A representação das restrições de eliminação de subcircuitos mais conhecida, proposta por Dantzig, Fulkerson e Johnson (1954), que é uma formulação natural, é

$$\sum_{(i,j)\in A(S)} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad (S \subseteq V \setminus \{1\}) \, .$$

Esta formulação envolve $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ variáveis e $\mathcal{O}\left(2^n\right)$ restrições.

$\Updownarrow$

$\boxed{\text{envolve um número exponencial de restrições}}$

Eliminação de subcircuitos

Vários investigadores propuseram formulações que envolvem um número polinomial de restrições, à custa da introdução de variáveis auxiliares (formulações estendidas).

É o caso, por exemplo, das formulações de:

- Miller, Tucker e Zemlin (1960),
- Gavish e Graves (1978),
- Wong (1980) e
- Claus (1984).

Eliminação de subcircuitos

Universidade do Minho

Formulação de fluxo desagregado

A formulação (estendida) de fluxo desagregado, proposta por Claus (1984), que usa o conceito de redes de fluxos é dada por

$$\sum_{(1,j)\in\delta^+(1)} y_{1j}^k - \sum_{(j,1)\in\delta^-(1)} y_{j1}^k = -1 \qquad (k \in V \setminus \{1\})$$

$$\sum_{(k,j)\in\delta^+(k)} y_{kj}^k - \sum_{(j,k)\in\delta^-(k)} y_{jk}^k = 1 \qquad (k \in V \setminus \{1\})$$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^+(i)} y_{ij}^k - \sum_{(j,i)\in\delta^-(i)} y_{ji}^k = 0 \qquad (k \in V \setminus \{1\}, i \in V \setminus \{1,k\})$$

$$0 \leq y_{ij}^k \leq x_{ij} \qquad ((i,j) \in A, k \in V \setminus \{1\})$$

Esta formulação envolve $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ variáveis binárias, $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ variáveis contínuas e $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ restrições.

$$\Updownarrow$$

envolve um número polinomial de restrições

Problema do caixeiro viajante assimétrico

Em notação matricial, o PCVA é definido por

$$
\begin{array}{llll}
\min & cx & & \\
\text{s.a} & Dx = \mathbb{1} & & \\
& By^k = b^k & & (k \in V_1) \\
& x \geq y^k \geq 0 & & (k \in V_1) \\
& (x, y) \text{ inteiros} & &
\end{array} \tag{4}
$$

em que:

- D é a matriz de incidência nó-aresta do grafo bipartido não orientado $G' = (V \times V, A)$;
- $\mathbb{1}$ é um vector coluna de tudo uns;
- B é a matriz de incidência nó-arco do grafo orientado G e para cada $k \in V_1 \equiv V \setminus \{1\}$;
- b^k é um vector coluna de tudo zeros excepto para $b_1^k = -1$ e $b_k^k = 1$.

Problema Lagrangeano

A relaxação Lagrangeana do problema (4), relativamente às restrições de conservação de fluxo, é dada por

$$z(\pi) = \begin{cases} \min & cx + \sum_{k \in V_1} \pi^k \left(b^k - By^k\right) \\ \text{s.a} & Dx = \mathbb{1} \\ & x - y^k \geq 0 \quad (k \in V_1) \\ & y^k \geq 0 \quad (k \in V_1) \\ & x \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

para um dado vector de multiplicadores π.

O problema dual de (4) é definido por

$$z_L^* = \max \left\{ z(\pi) : \pi = \left[\pi^k\right] \in \mathbb{R}^{(|V|-1) \times |V|} \right\} \tag{6}$$

Uma solução óptima do problema (5) pode ser obtida através da resolução de um adequado problema de afectação.

Universidade do Minho

Resolução do modelo relaxado

Para um vector $\bar{c}$ definido, componente a componente, por

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \sum_{k \in V_1} \max\left((\pi_i^k - \pi_j^k), 0\right),$$

o problema Lagrangeano (5) é equivalente ao problema de afectação

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & \bar{c}x \\ \text{s.a} & Dx = 1\!\!1, x \geq 0 \end{array}} \qquad (7)$$

Se $\bar{x}$ é uma solução óptima de (7) então $(\bar{x}, \bar{y})$, com $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ definido por

$$\bar{y}_{ij}^k(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x_{ij} & \text{se } \pi_i^k - \pi_j^k \geq 0, \\ 0 & \text{se } \pi_i^k - \pi_j^k < 0. \end{array} \right\} \quad ((i,j) \in A, k \in V_1)$$

é solução óptima para o problema Lagrangeano (5).

Resolução do modelo relaxado

Em cada iteração do algoritmo volumétrico resolve-se o problema de afectação.

Entrada: $\pi^0 \in \mathbb{R}^{(|V|-1)\times|V|}$.

Inicialização: Resolver (5) com $\pi = \pi^0$ para obter a solução (x^0, y^0).
Definir $v^0 = b - By^0 \in \partial z(\pi^0)$.
Iniciar $\bar{\pi}^1 = \pi^0$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (x^0, y^0)$, $\bar{w} = v^0$, $j = 1$ e $l = 1$.

Iteração Genérica j:

Passo 1: Para algum comprimento do passo $s_j > 0$, definir $\pi^j = \bar{\pi}^l + s_j \bar{w}$.
Passo 2: Obter (x^j, y^j) uma solução óptima de (5).
Definir $v^j = [v^{k,j}] \in \partial z(\pi^j)$ com $v^{k,j} = b^k - By^{k,j}$.
Passo 3: Para algum $\alpha_j \in [0, 1]$, definir

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \alpha_j (x^j, y^j) + (1 - \alpha_j)(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{w} &= \alpha_j v^j + (1 - \alpha_j)\bar{w}. \end{aligned}$$

Passo 4: Se $z(\pi^j) > z(\bar{\pi}^l)$, então definir $\bar{\pi}^{l+1} = \pi^j$ e fazer $l \leftarrow l + 1$.
Passo 5: Testar critério de paragem. Fazer $j \leftarrow j + 1$ e voltar para *Passo 1*.

Estratégia para o modelo relaxado

Resolver relaxação linear do
problema do caixeiro viajante assimétrico através de:

algoritmo volumétrico

+

CPLEX

Comparar os resultados desta estratégia com:

- CPLEX

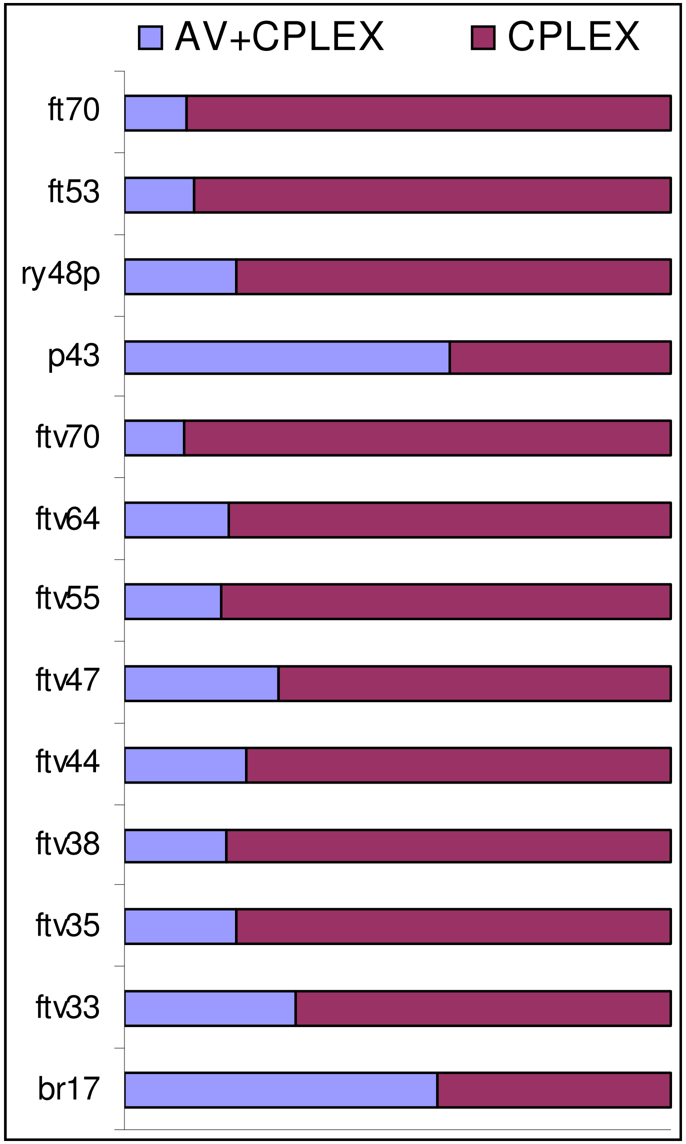
Resultados obtidos com o modelo relaxado

PROBLEMA				
PCVA	Núm. vértices	Núm arcos	Núm. variáveis	Óptimo Frácc.
ftv33	34	1122	38148	1286

CPLEX (dualopt)	
Núm. Iterações	Tempo (seg.)
24231	42.7

VOLUMÉTRICO				CPLEX		Tempo Total
Núm. It.	L (dual)	Violação Máx.	Tempo (seg.)	Núm. It.	Tempo (seg.)	
1000	1281.85	0.036116	5.48	2700	13.83	19.31

Resultados obtidos com o modelo relaxado



Estratégia para o modelo inteiro

Resolver problema do caixeiro viajante assimétrico (inteiro) através de:

algoritmo volumétrico

+

heurísticas

+

CPLEX-MIP

Comparar os resultados desta estratégia com:

- CPLEX-MIP

Estratégia para o modelo inteiro

As heurísticas utilizadas tinham como objectivo:

averiguar a adequação do AV como mecanismo de identificação de arcos que não participam na solução óptima inteira.

As ideias utilizadas foram:

1. executar o algoritmo volumétrico ao problema
2. com a solução do AV, fixar a zero todas as variáveis cujo
   - valor da solução primal fosse igual ou inferior a 0.0005
   - custo reduzido associado à restrição dual correspondente fosse superior ou igual a 0.5
3. executar o CPLEX MIP ao problema reduzido

Resultados obtidos com o modelo inteiro

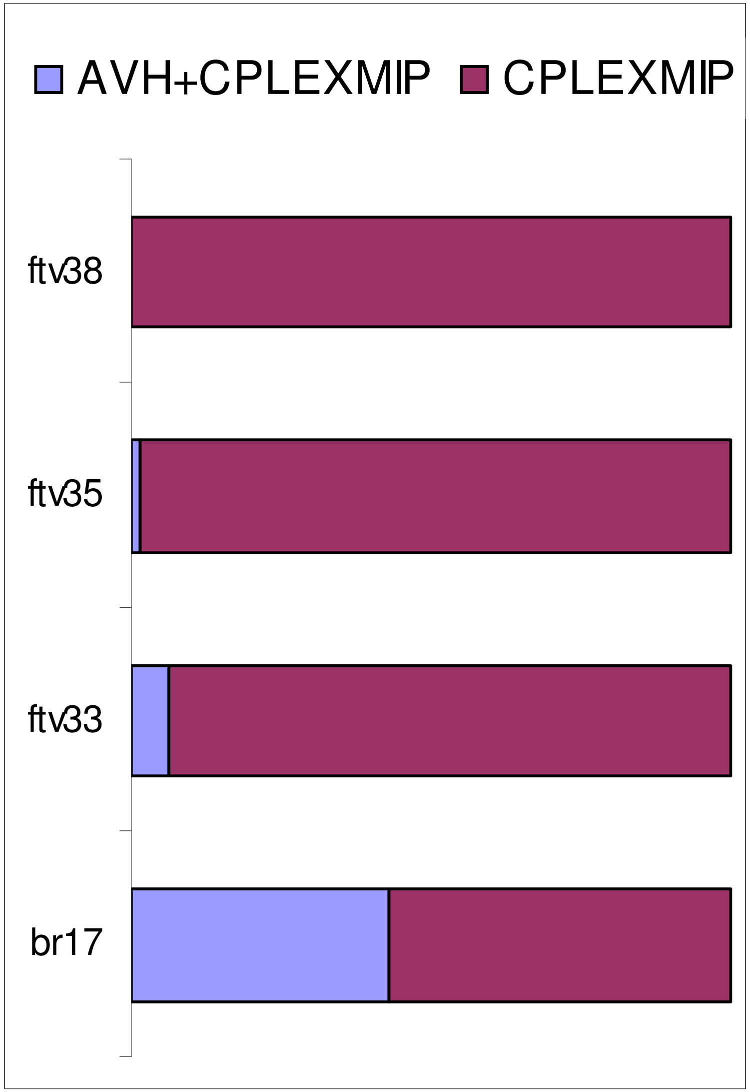
Universidade do Minho

PROBLEMA				
PCVA	Núm. vértices	Núm arcos	Núm. var.	Óptimo Inteiro
ftv33	34	1122	38148	1286

CPLEX-MIP	
Núm. Iterações	Tempo (seg.)
24226	56.8

VOLUMÉTRICO		HEURÍSTICA	CPLEX-MIP		Tempo Total
Núm. It.	Tempo (seg.)	Redução var.	Núm. It.	Tempo (seg.)	
1000	5.48	7779	2879	1.36	6.84

Resultados obtidos com o modelo inteiro



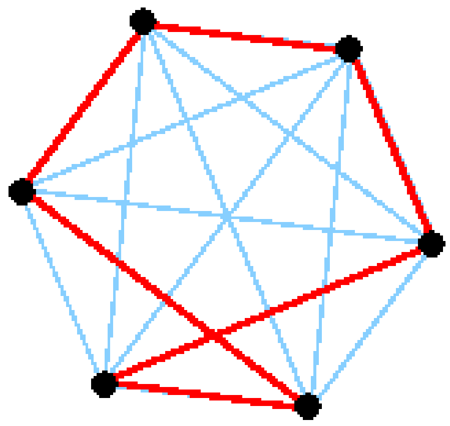
Universidade do Minho

Resolução do problema do reparador viajante

Problema do reparador viajante

Dado um conjunto de cidades e conhecidas as distâncias entre cada uma delas, pretende-se determinar o circuito que minimiza a soma acumulada das distâncias (ao longo do circuito) que passa por todas as cidades, exactamente uma vez, e que termina na cidade de onde partiu.

A estrutura matemática do problema do reparador viajante é semelhante à do problema do caixeiro viajante. Neste caso, o comprimento de um circuito é o total da soma dos acumulados das linhas até cada nó que faz parte da viagem.



Problema do reparador viajante

Universidade do Minho

Motivação

Relaxação Lagrangeana

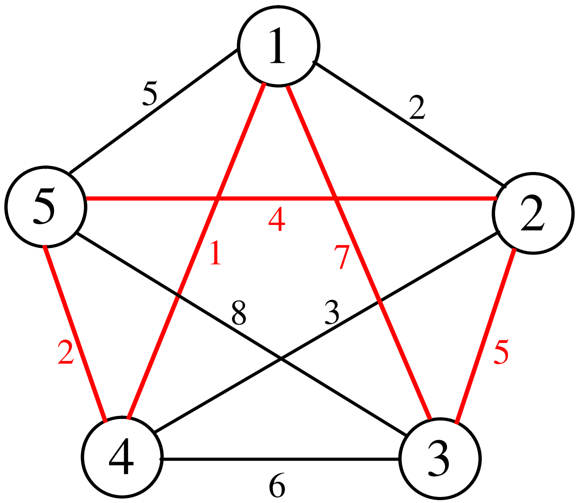
Métodos do tipo Subgradiente

Resolver PCVA

Resolver PRV
- PRV
- Formulação
- Modelo relaxado
- Modelo inteiro

Conclusões

Suponhamos que temos um grafo com n nós. Em cada nó existe uma máquina para ser reparada, e existe apenas um reparador. Dado o tempo requerido pelo reparador para viajar entre nós, pretende-se encontrar um circuito que minimize o tempo total de espera para todas as máquinas.



Circuito óptimo
1 - 4 - 5 - 2 - 3 - 1

Comprimento do circuito

1

$1+2$

$1+2+4$

$1+2+4+5$

$1+2+4+5+7$

$=42$

Problema do reparador viajante

Universidade do Minho

O problema do reparador viajante é também conhecido por

- problema do distribuidor (*delivery man problem*)
- problema da latência mínima (*minimum latency problem*)
- problema do caixeiro viajante com custos acumulados (*traveling salesman problem with cumulative costs*)

Aplicações:

- Problemas de distribuição em que se pretende minimizar o tempo de espera de cada cliente

$\Updownarrow$

$\boxed{\textbf{ex: distribuição de pizzas}}$

Universidade do Minho

Formulação do reparador viajante

Seja $G = (V, A)$ um grafo não orientado.

O objectivo do problema do reparador viajante com tempo de espera diferenciados é

- determinar um percurso H em G definido por $H = \{1, (1 \equiv i_1, i_2), i_2, (i_2, i_3), i_3 \ldots, i_n, (i_n, i_{n+1} \equiv 1), 1\}$,
- que minimiza a soma do tempo de viagem mais a soma do total da percepção do tempo de espera para cada cliente.

Matematicamente, a função custo total é dada por

$$\sum_{(i,j)\in A(H)} c_{ij}^1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k-1} c_{i_l i_{l+1}}^k \right)$$

Problema do reparador viajante

Formulação em notação matricial:

$$
\begin{array}{llcll}
\min & c^1 x & + & \sum_{k \in V_1} c^k y^k & \\
\text{s.a} & Dx & = & \mathbb{1} & \\
 & By^k & = & b^k & (k \in V_1) \\
 & x \geq & y^k & \geq 0 & (k \in V_1) \\
 & (x, y) & & \text{inteiros} &
\end{array}
\tag{8}
$$

Problema Lagrangeano

A relaxação Lagrangeana do problema (8), relativamente às restrições de conservação de fluxo, é dada por

$$z(\pi) = \begin{cases} \min & c^1 x + \sum_{k \in V_1} c^k y^k + \sum_{k \in V_1} \pi^k \left(b^k - B y^k \right) \\ \text{s.a} & Dx = \mathbb{1} \\ & x - y^k \geq 0 \quad (k \in V_1) \\ & y^k \geq 0 \quad (k \in V_1) \\ & x \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

para um dado vector de multiplicadores π.

O problema dual de (8) é definido por

$$z_L^* = \max \left\{ z\left(\pi\right) : \pi = \left[\pi^k\right] \in \mathbb{R}^{(|V|-1) \times |V|} \right\} \tag{10}$$

Uma solução óptima do problema (9) pode ser obtida através da resolução de um adequado problema de afectação.

Resolução do modelo relaxado

Para um vector $\bar{c}$ definido, componente a componente, por

$$\bar{c} = \bar{c}_{ij} \equiv c_{ij}^1 + \sum_{k \in V_1} \left(c_{ij}^k - \pi_i^k + \pi_j^k \right)^- ,$$

o problema Lagrangeano (9) é equivalente ao problema de afectação

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & \bar{c}x \\ \text{s.a} & Dx = 1\!\!1, x \geq 0 \end{array}} \qquad (11)$$

Se $\bar{x}$ é uma solução óptima de (11) então $(\bar{x}, \bar{y})$, com $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ definido por

$$\bar{y}_{ij}^k = \left\{ \begin{array}{ll} \bar{x}_{ij} & \text{se } c_{ij}^k - \pi_i^k + \pi_j^k < 0 \\ \xi \in [0, \bar{x}_{ij}] & \text{se } c_{ij}^k - \pi_i^k + \pi_j^k = 0 \\ 0 & \text{se } c_{ij}^k - \pi_i^k + \pi_j^k > 0 \end{array} \right\} \quad ((i,j) \in E, k \in V_1)$$

é solução óptima para o problema Lagrangeano (9).

Resolução do modelo relaxado

Em cada iteração do algoritmo volumétrico resolve-se o problema de afectação.

Entrada: $\pi^0 \in \mathbb{R}^{(|V|-1)\times|V|}$.

Inicialização: Resolver (9) com $\pi = \pi^0$ para obter a solução (x^0, y^0).
Definir $v^0 = b - By^0 \in \partial z(\pi^0)$.
Iniciar $\bar{\pi}^1 = \pi^0$, $(\bar{x}, \bar{y}) = (x^0, y^0)$, $\bar{w} = v^0$, $j = 1$ e $l = 1$.

Iteração Genérica j:

Passo 1: Para algum comprimento do passo $s_j > 0$, definir $\pi^j = \bar{\pi}^l + s_j \bar{w}$.

Passo 2: Obter (x^j, y^j) uma solução óptima de (9).
Definir $v^j = [v^{k,j}] \in \partial z(\pi^j)$ com $v^{k,j} = b^k - By^{k,j}$.

Passo 3: Para algum $\alpha_j \in [0, 1]$, definir

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) &= \alpha_j (x^j, y^j) + (1 - \alpha_j)(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{w} &= \alpha_j v^j + (1 - \alpha_j)\bar{w}. \end{aligned}$$

Passo 4: Se $z(\pi^j) > z(\bar{\pi}^l)$, então definir $\bar{\pi}^{l+1} = \pi^j$ e fazer $l \leftarrow l + 1$.

Passo 5: Testar critério de paragem. Fazer $j \leftarrow j + 1$ e voltar para *Passo 1*.

Estratégia para o modelo relaxado

As instâncias do problema do reparador viajante com tempos de espera diferenciados são baseadas em

- instâncias do caixeiro viajante assimétrico retiradas da TSPLib
- com custos adicionais (percepção dos tempos de espera) na função objectivo.

Os custos associados à percepção do tempo de espera para cada cliente foram definidos por

$$c^k_{i_j i_{j+1}} = \left\lfloor c^1_{i_j i_{j+1}} \xi / 100 \right\rfloor$$

em que para cada par $(k, (i_j, i_{j+1}))$ foi gerado ξ como sendo um número aleatório pertencente ao intervalo [80,120] usando o zero como semente.

Estratégia para o modelo relaxado

Resolver relaxação linear do $\boxed{\text{problema do reparador viajante}}$ através de:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{algoritmo volumétrico} \\ + \\ \text{CPLEX}\end{array}}$$

Comparar os resultados desta estratégia com:

- $\boxed{\text{CPLEX}}$

Universidade do Minho

- Motivação
- Relaxação Lagrangeana
- Métodos do tipo Subgradiente
- Resolver PCVA
- Resolver PRV
  - ❖ PRV
  - ❖ Formulação
  - ❖ Modelo relaxado
  - ❖ Modelo inteiro
- Conclusões

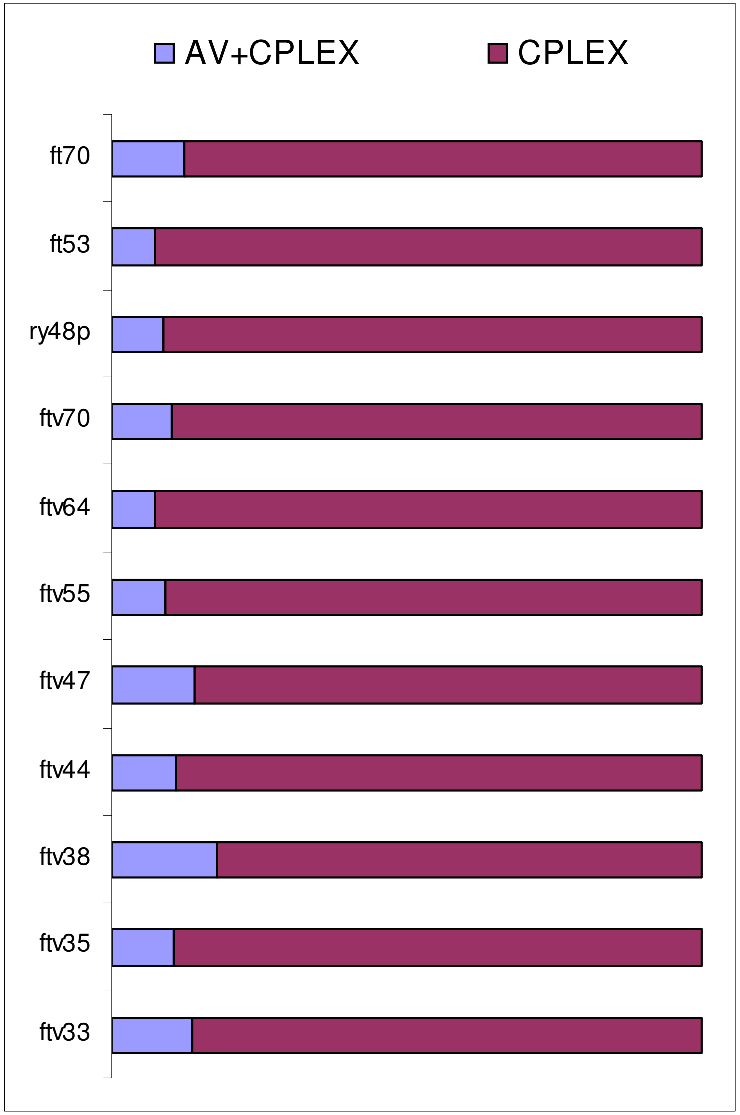
Estratégia para o modelo relaxado

PROBLEMA				
PRV	Núm. vértices	Núm arcos	Núm var.	Óptimo Frácc.
ftv33	34	1122	38148	6884.3

CPLEX (dualopt)	
Núm. Iterações	Tempo (seg.)
17982	107.1

VOLUMÉTRICO				CPLEX		Tempo Total
Núm. It.	L (dual)	Violação Máx.	Tempo (seg.)	Núm. It.	Tempo (seg.)	
807	6872.5	0.0099987	6.0	1285	11.2	17.2

Estratégia para o modelo relaxado



Estratégia para o modelo inteiro

Resolver $\boxed{\text{problema do reparador viajante}}$ (inteiro) através de:

algoritmo volumétrico
+
heurísticas
+
CPLEX-MIP

Comparar os resultados desta estratégia com:

- $\boxed{\text{CPLEX-MIP}}$

Estratégia para o modelo inteiro

Resolver $\boxed{\text{problema do reparador viajante}}$ (inteiro) através de:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{algoritmo volumétrico}\\ \\ + \\ \\ \text{Branch-and-Bound}\end{array}}$$

Comparar os resultados desta estratégia com:

- $\boxed{\text{CPLEX-MIP}}$

Universidade do Minho

Conclusões

Conclusões

O algoritmo volumétrico pode ajudar:

- na identificação de uma boa base inicial

  para a resolução $\left\{ \begin{array}{c} \text{aproximada} \\ \text{exacta} \end{array} \right\}$

  de formulações do $\left\{ \begin{array}{c} \text{PCVA} \\ \text{PRV} \end{array} \right\}$;

- na obtenção de soluções óptimas, quando combinado com outras técnicas.