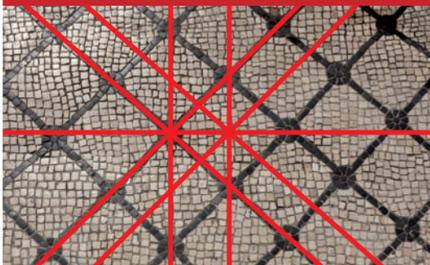


Há **4 aspectos de simetria**, chamados espelhos, rotações, cruzamentos e admirações. Ao apreciar um padrão ou um friso, procuram-se estes aspectos, nesta ordem, e, para abreviar, registam-se com símbolos: \*, algarismos ou  $\infty$ , X e O. Por exemplo, o símbolo \* indica a presença de simetria por reflexão num ou mais espelhos. Cada tipo de simetria tem assim uma **assinatura simbólica**.

## ESPELHOS

\*abc simboliza espelhos que se encontram com ângulos  $\frac{180^\circ}{a}, \frac{180^\circ}{b}, \frac{180^\circ}{c}$ .



Por exemplo, a calçada malha de rede no Chiado é preservada por reflexão em espelhos (linhas vermelhas) que se cruzam em três pontos com ângulos  $\frac{180^\circ}{4}, \frac{180^\circ}{4}, \frac{180^\circ}{2}$ , daí ter a assinatura **\*442**. Tal como num caleidoscópio, três espelhos reproduzem infinitamente a imagem no sector entre eles.

## ROTAÇÕES

abc representa centros de rotação por  $\frac{360^\circ}{a}, \frac{360^\circ}{b}, \frac{360^\circ}{c}$ , onde não passa qualquer espelho.



Por exemplo, a calçada entrançada nos Restauradores é preservada por rotação em torno de três centros por ângulos  $\frac{360^\circ}{4}, \frac{360^\circ}{4}, \frac{360^\circ}{2}$ , daí a assinatura **442**. Qualquer outro centro de rotação para esta calçada é equivalente a um destes três.

## CRUZAMENTOS

X representa uma reflexão com deslizamento.



Por exemplo, a calçada em frente ao Planetário Gulbenkian goza de dois quase-espelhos (daí a assinatura **XX**): a imagem reflectida em cada uma das rectas marcadas deve ser deslizada para que volte a coincidir com a imagem de partida. Note-se as diferentes quatro cores no padrão.

## ADMIRAÇÕES

O simboliza um padrão sem espelhos, nem rotações, nem cruzamentos.



Por exemplo, a calçada imaginária ao lado não apresenta quaisquer dos aspectos anteriores, restando-lhe apenas a repetição do motivo por translação em duas direcções distintas. A assinatura **O** sugere zero (ausência de outros aspectos) ou uma interjeição de admiração (Oh, não há outros aspectos!).

Imagine-se o **Restaurante Simetria** para satisfazer o apetite simétrico. Pensando nos símbolos como pratos do dia, podem compor-se menus.

Pratos do dia	Preço	Preço para combinados <sup>†</sup>
O	2	—
*	1	—
X	1	—
número n	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{2n}$
$\infty$	1	$\frac{1}{2}$

<sup>†</sup> 2, 3, 4, ...  $\infty$  têm desconto de 50% quando à direita de \*.

Por exemplo, o número 3 custa normalmente  $\frac{2}{3}$  €, mas o combinado \*3 custa apenas  $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$  €.

A conta do almoço simétrico é uma soma de frações.

Por exemplo, o menu **\*442** custa  $1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 2$  €.

\* 4 4 2

Por exemplo, o menu **22 $\infty$**  também custa  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$  €.

2 2  $\infty$

Pensa-se numa simetria de um padrão ou de um friso como um menu com um certo custo.

## TEOREMA MÁGICO

Os tipos de padrões ou frisos que podem existir correspondem às combinações de símbolos – os menus – com custo total 2. Pode-se concluir (exercício!) que há apenas

17 TIPOS DE PADRÕES <small>[menus que não envolvem o símbolo <math>\infty</math>]</small>					7 TIPOS DE FRISOS <small>[menus que envolvem o símbolo <math>\infty</math>]</small>		
*632	632	*442	442	*333	*22 $\infty$	22 $\infty$	2* $\infty$
333	*2222	2222	4*2	3*3	2*22	* $\infty\infty$	$\infty\infty$
22*	**	*X	XX	22X	O	$\infty*$	$\infty X$

**Mas donde vem o teorema mágico?** Imagine-se um padrão estampado num pano e que se enrola esse pano de maneira a sobrepôr as repetições do padrão.



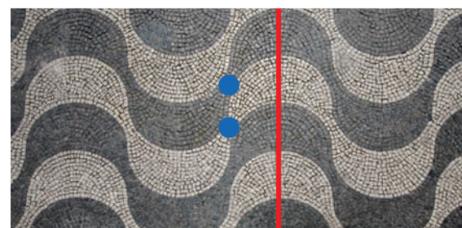
Por exemplo, um pano com o padrão dos ramos de oliveira ao lado seria enrolado verticalmente, obtendo-se um cilindro com uma fila de ramos lado a lado, e depois horizontalmente, obtendo-se um pneu com apenas um ramo estampado.

Em geral, obtém-se uma superfície que pode ter bicos e/ou que não se consegue visualizar nas nossas três dimensões espaciais.

O teorema mágico resulta do estudo matemático do que essas superfícies, ditas *orbivariiedades*, podem ser.

O primeiro a compreender esta relação de simetria com orbivariiedades foi o geômetra americano **Bill Thurston**. Quem popularizou este novo olhar sobre simetria e criou o sistema de símbolos aqui apresentado para a descrever foi o matemático britânico **John H. Conway**.

**Nas calçadas de Lisboa** já foram detectados representantes de 11 dos 17 tipos de padrões e todos os tipos de frisos. No verso desta brochura propõe-se um passeio que pisa pelo menos 4 tipos de padrões e 4 tipos de frisos.



Por exemplo, a calçada mar largo no Rossio pode ser reflectida ao longo de um espelho (a vermelho) e rodada em torno de dois centros (a azul) ambos por ângulo  $\frac{360^\circ}{2}$ .

22\*



As ondas da calçada à entrada do CAM da Fundação Gulbenkian têm uma simetria diferente – exibindo quatro centros de rotação por  $\frac{360^\circ}{2}$  – graças à variação da sua espessura.

2222



A calçada grega na Rua Áurea goza de um conjunto de infinitos espelhos paralelos que se cruzam num ponto no infinito, como se o ângulo entre eles fosse  $\frac{360^\circ}{\infty}$ , e um centro de rotação por ângulo  $\frac{360^\circ}{2}$ .

2\* $\infty$



O tipo de simetria 2\* $\infty$  também se encontra presente na calçada da esquina da Rua Vitor Cordon com o Largo da Academia Nacional de Belas Artes.

2\* $\infty$

Os tipos de padrões ainda não detectados em calçadas de Lisboa são

632

333

\*333

22X

4\*2

O

Assim se lança o desafio de os descobrir ou produzir!

Encontra-se uma galeria de fotografias de calçadas simétricas e outras informações em

[www.math.ist.utl.pt/simetria/](http://www.math.ist.utl.pt/simetria/)

Projecto apoiado pela Fundação Gulbenkian no âmbito do Programa Novos Talentos em Matemática. Em 2004, Bruno Montalto e Luís Alexandre Pereira colaboraram no primeiro levantamento de simetria em calçadas de Lisboa enquanto bolsiros do programa NTM. Em 2007, a Câmara Municipal de Lisboa e a Sociedade Portuguesa de Matemática firmaram um protocolo de cooperação no sentido de completar e enaltecere os tipos de simetria nas calçadas de Lisboa.

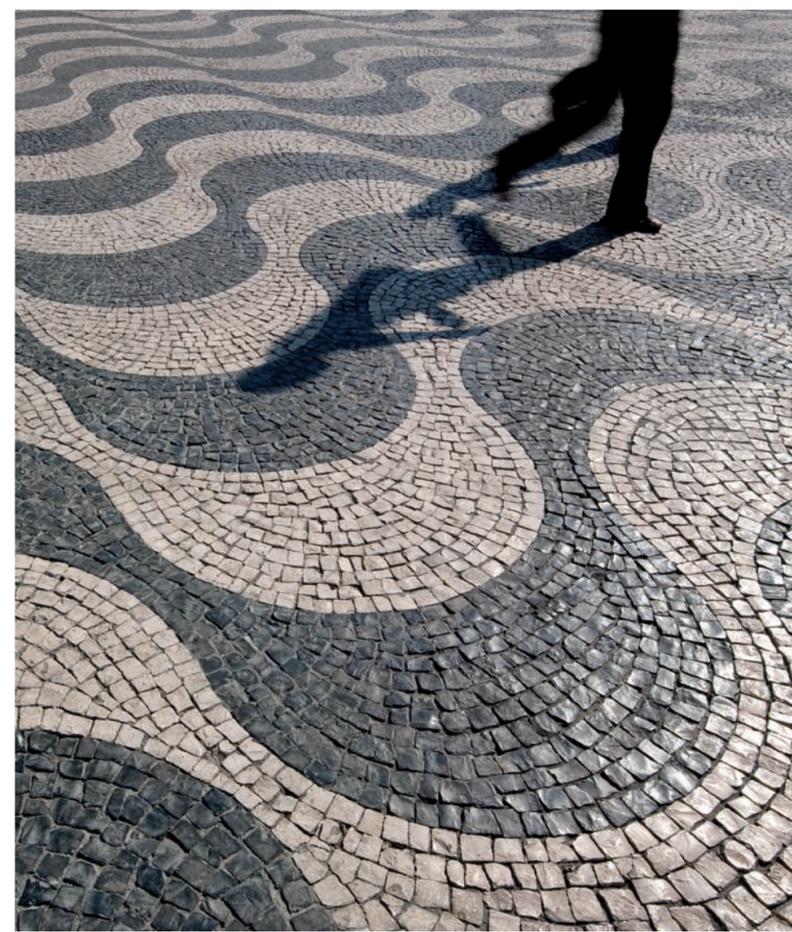
Textos/conteúdos: Ana Cannas Fotografia: Atelier João Ferrand Design: Atelier António Modesto Lda. Impressão: Papelmunde Junho 2010



## SIMETRIA PASSO A PASSO

### MATEMÁTICA NAS CALÇADAS DE LISBOA

### PROGRAMA NOVOS TALENTOS EM MATEMÁTICA



FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN



Largo do Chiado [friso em torno do monumento]

FRISO \*∞∞



Praça Luís de Camões

PADRÃO #442



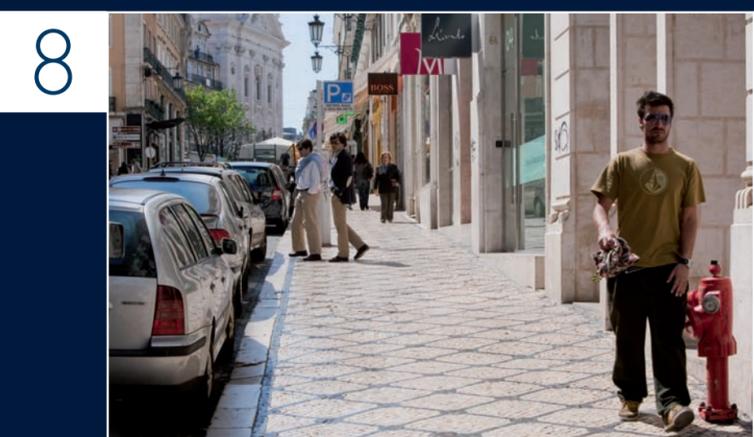
Restauradores

PADRÃO 442



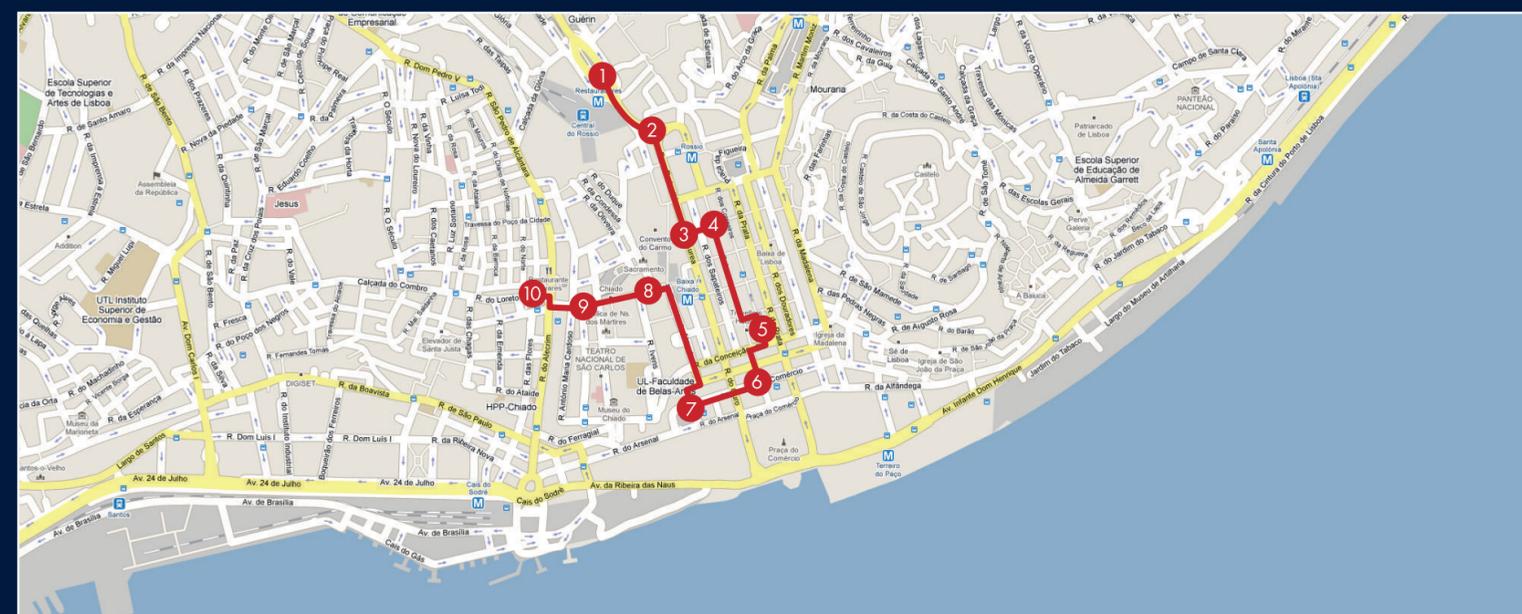
Rossio

PADRÃO 22\*



Rua Garrett

PADRÃO #442



ROTA DA SIMETRIA



Rua Áurea

FRISO 2\*∞



Praça do Município

PADRÃO #442



Rua do Comércio

FRISO #22∞



Rua dos Correios [note-se a variação da espessura das cunhas]

FRISO ∞∞



Rua Augusta [note-se que são losangos, não quadrados]

PADRÃO 2\*2