

XXII Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática

Versão em Português

1. Dado um inteiro positivo m , define-se a sucessão $\{a_n\}$ da seguinte maneira:

$$a_1 = \frac{m}{2}, \quad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil, \text{ se } n \geq 1.$$

Determine todos os valores de m para os quais a_{2007} é o primeiro inteiro que aparece na sucessão.

Nota: Para um número real x define-se $\lceil x \rceil$ como o menor inteiro que é maior ou igual a x . Por exemplo, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2007 \rceil = 2007$.

2. Sejam ABC um triângulo com incentro I e Γ uma circunferência de centro I , de raio maior que o da circunferência inscrita e que não passa por nenhum dos vértices. Sejam X_1 o ponto de intersecção de Γ com a recta AB mais perto de B , X_2 e X_3 os pontos de intersecção de Γ com a recta BC sendo X_2 o mais perto de B , e X_4 o ponto de intersecção de Γ com a recta CA mais perto de C . Seja K o ponto de intersecção das rectas X_1X_2 e X_3X_4 . Demonstre que AK corta o segmento X_2X_3 no seu ponto médio.
3. Duas equipas, A e B , disputam o território limitado por uma circunferência.

A tem n bandeiras azuis e B tem n bandeiras brancas ($n \geq 2$, fixo). Jogam alternadamente e A começa o jogo. Cada equipa, na sua vez, coloca uma das suas bandeiras num ponto da circunferência que não se tenha usado numa jogada anterior. Cada bandeira, uma vez colocada, não se pode mudar de lugar.

Uma vez colocadas as $2n$ bandeiras reparte-se o território entre as duas equipas. Um ponto do território é da equipa A se a bandeira mais próxima dele é azul, e é da equipa B se a bandeira mais próxima dele é branca. Se a bandeira azul mais próxima de um ponto está à mesma distância que a bandeira branca mais próxima deste ponto, então o ponto é neutro (não é de A nem de B). Uma equipa ganha o jogo se os seus pontos cobrem uma área maior que a área coberta pelos pontos da outra equipa. Há empate se ambos cobrem áreas iguais.

Demonstre que, para todo n , a equipa B tem estratégia para ganhar o jogo.

Duração: 4 horas e 30 minutos