OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/~opm

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos. Não é permitido o uso de calculadoras.

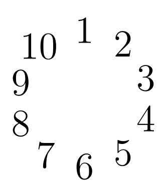
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos.

---

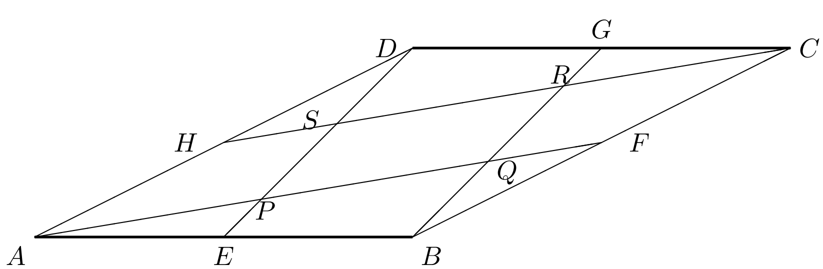
4. Com pequenos cubos de madeira todos iguais constrói-se um cubo e pintam-se algumas das suas faces. Se há exactamente 45 cubos pequenos sem nenhuma face pintada, quantas faces do cubo construído se pintaram? Solução

5. Num círculo formado por 10 pessoas cada pessoa escolhe um número e revela esse número aos seus vizinhos no círculo. Cada pessoa diz em voz alta a soma dos números dos seus 2 vizinhos. A figura mostra os números ditos em voz alta. Qual foi o número escolhido pela pessoa que disse o número 7?

Solução



6. Na figura seguinte $[ABCD]$ é um paralelogramo cujos lados têm como pontos médios E, F, G e H. Sabendo que a área deste paralelogramo mede 5 m^2, quanto mede a área do paralelogramo $[PQRS]$? Solução



SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

4. Para a construção de um cubo grande são necessários n^3 pequenos cubos de madeira todos iguais, para algum número inteiro n. Há pelo menos $(n-2)^3$ cubos pequenos sem nenhuma face pintada, logo $(n-2)^3 \leq 45 \leq n^3$. Como $3^3 < 45 < 4^3$, tem-se $n-2 < 4$ e $n > 3$, ou seja, $4 \leq n \leq 5$.

   Assim, se fosse $n = 4$, o número de cubos sem nenhuma face pintada seria:

   - $4^3 - 4^2 = 48$, se houvesse apenas uma face pintada,
   - $4^3 - 4^2 - 3 \times 4 = 36$, se houvesse duas faces adjacentes pintadas,
   - $4^3 - 2 \times 4^2 = 32$, se houvesse duas faces opostas pintadas,
   - inferior a 32 nos outros casos.

   Se for $n = 5$, o número de cubos sem nenhuma face pintada será:

   - $3^2 \times 4 = 36$, se houver apenas uma face por pintar,
   - $3^2 \times 5 = 45$, se houver duas faces opostas por pintar,
   - $3 \times 4^2 = 48$, se houver duas faces adjacentes por pintar,
   - superior a 48 nos outros casos.

   Portanto, pintaram-se exactamente quatro faces do cubo grande e as duas faces que não foram pintadas eram opostas.

Enunciado da Prova

XX OPM - Categoria A (8º, 9º anos)
Final Nacional 2002 - 2º dia

13/4/02

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

5. Denote-se por a_i, $i = 1, \ldots, 10$, o número escolhido pela pessoa que disse o número i. Pretende-se determinar a_7. A pessoa que disse o número 8 somou os números escolhidos pelos seus dois vizinhos (a_7 e a_9) e obteve 8, logo $a_9 = 8 - a_7$. Analogamente, a pessoa que disse o número 10 somou os números escolhidos pelos seus dois vizinhos (a_9 e a_1) e obteve 10, logo $a_1 = 10 - a_9 = 2 + a_7$.

   Repetindo este raciocínio, obtém-se $a_3 = 2 - a_1 = -a_7$, $a_5 = 4 - a_3 = 4 + a_7$ e $a_7 = 6 - a_5 = 2 - a_7$, donde se conclui que $a_7 = 1$.

   Assim, a pessoa que disse o número 7 tinha escolhido o número 1.

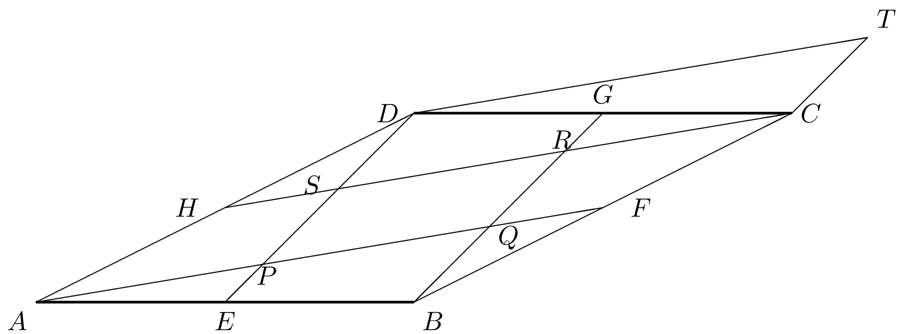
Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

6. Trace-se uma paralela a $[CH]$ que passe por D e uma paralela a $[DE]$ que passe por C. Estas duas rectas intersectam-se num ponto T.



O paralelogramo $[SCTD]$ tem os lados paralelos a $[PQRS]$. Determine-se a relação entre as medidas dos lados dos dois paralelogramos.

Os triângulos $[DHS]$ e $[DAP]$ são semelhantes, porque têm um ângulo em comum e os lados opostos paralelos. Como $\overline{DA} = 2\overline{DH}$, também $\overline{DP} = 2\overline{DS}$, ou seja, $\overline{DS} = \overline{SP}$. Analogamente tem-se $\overline{SC} = 2\overline{SR}$. Assim, a área de $[SCTD]$ mede o dobro da de $[PQRS]$. Como a área de $[SCTD]$ também mede o dobro da do triângulo $[DSC]$, conclui-se que as áreas de $[PQRS]$ e $[DSC]$ têm a mesma medida. Da mesma forma se mostra que a medida da área de $[PQRS]$ é a mesma que as medidas das áreas dos triângulos $[BCR]$, $[ABQ]$ e $[APD]$. Logo a área de $[ABCD]$ mede 5 vezes a área de $[PQRS]$, pelo que a medida da área de $[PQRS]$ é 1 m^2.

Enunciado da Prova