XX OPM - Categoria B ($10^{\underline{o}}$, $11^{\underline{o}}$, $12^{\underline{o}}$ anos)
Final Nacional 2002 - $2^{\underline{o}}$ dia

13/4/02

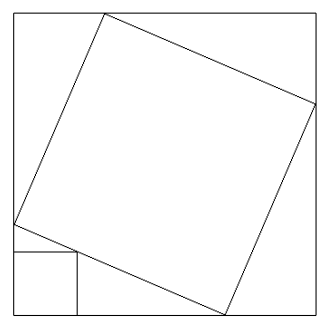
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos.

4. O conjunto *Blablabla* contém todos os números de sete dígitos diferentes que se podem formar com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Mostra que não existem dois números de *Blablabla* tais que um deles seja divisível pelo outro.

Solução

5. Considerem-se os três quadrados indicados na figura. Mostra que se as medidas dos lados do quadrado menor e do quadrado maior forem números inteiros, então, adicionando à medida da área do quadrado menor a medida da área do quadrado inclinado, obtém-se um quadrado perfeito.



Solução

6. No dia 6 de Março de 2002 decorreram em Coimbra as comemorações dos 500 anos do nascimento do matemático Pedro Nunes. Nessa manhã entraram apenas dez pessoas na livraria *Viva a Ciência*. Cada uma destas pessoas comprou exactamente 3 livros diferentes. Além disso, quaisquer duas pessoas compraram pelo menos um exemplar de um mesmo livro. *As Aventuras Matemáticas de Pedro Nunes* foi um dos livros que obteve o maior número de vendas nessa manhã. Qual é o menor valor que este número pode ter tomado?

Solução

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

4. Supõe-se que $x = ky$, com x e y pertencentes ao conjunto *Blablabla* e $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Dividindo o maior número de *Blablabla* pelo menor, obtém-se

$$\frac{8765432}{2345678} \cong 3,74.$$

Portanto, $k \in \{2, 3\}$.

Solução 1:

Se fosse $k = 3$ ter-se-ia $x = 3y$, ou seja, x teria de ser múltiplo de 3. No entanto, uma vez que $8+7+6+5+4+3+2 = 35 = 3 \times 11 + 2$, cada número de *Blablabla* é da forma $3t + 2$ para algum $t \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, x não pode ser múltiplo de 3.

Por outro lado, se fosse $k = 2$, ter-se-ia $x = 2y$, ou, de forma equivalente, $x + y = 3y$. Portanto, $x + y$ seria múltiplo de 3, o que não pode acontecer pois $x + y$ é da forma $3t + 1$, para algum $t \in \mathbb{N}$.

Em conclusão, não existem dois números de *Blablabla* tais que um deles seja divisível pelo outro.

Nota: Por exemplo,

$8765432 = 8 \times 1000000 + 7 \times 100000 + 6 \times 10000 + 5 \times 1000 + 4 \times 100 + 3 \times 10 + 2$

$= 8 \times (999999+1) + 7 \times (99999+1) + 6 \times (9999+1) + 5 \times (999+1) + 4 \times (99+1) + 3 \times (9+1) + 2$

$= 8 \times 999999 + 7 \times 99999 + 6 \times 9999 + 5 \times 999 + 4 \times 99 + 3 \times 9 + (8+7+6+5+4+3+2)$

$= 8 \times 999999 + 7 \times 99999 + 6 \times 9999 + 5 \times 999 + 4 \times 99 + 3 \times 9 + 35.$

Logo, visto que os números escritos apenas com o algarismo nove são todos divisíveis por 3, o resto da divisão de 8765432 por 3 é 2 (pois $35 = 3 \times 11 + 2$).

Solução 2:

Se fosse $k = 2$ ter-se-ia $x = 2y$. Dado que y contém o algarismo 5, $2 \times 5 = 10$ e $2 \times 8 = 16$, o número x teria o algarismo 0 ou o algarismo 1 e não pertenceria a *Blablabla*.

Se fosse $k = 3$ ter-se-ia $x = 3y$. Dado que y contém o algarismo 3, $3 \times 3 = 9$ e $3 \times 8 = 24$, o número x teria o algarismo 9, o algarismo 0 ou o algarismo 1 e não pertenceria a *Blablabla*.

Em conclusão, não existem dois números de *Blablabla* tais que um deles seja divisível pelo outro.

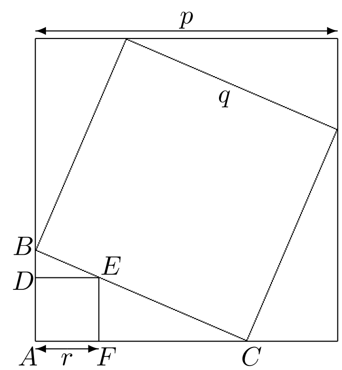
Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

5. **Solução 1:**



Considerem-se os pontos A, B, C, D, E e F e as distâncias p, q e r indicados na figura. Sejam ainda $x = \overline{BD}$ e $y = \overline{FC}$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABC]$ vem

$$q^2 = (r+x)^2 + (r+y)^2 = 2r^2 + 2r(x+y) + x^2 + y^2.$$

Como os triângulos $[BED]$ e $[ECF]$ são semelhantes tem-se $\frac{y}{r} = \frac{r}{x}$, isto é, $xy = r^2$. Logo,

$$q^2 = 2xy + 2r(x+y) + x^2 + y^2 = (x+y)^2 + 2r(x+y) = (x+y)(x+y+2r).$$

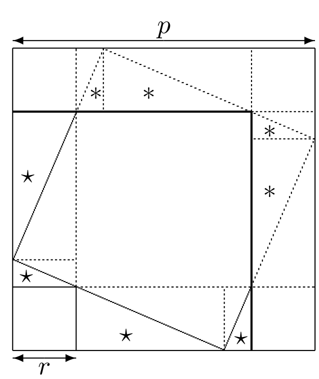
Uma vez que $x + y + 2r = p$,

$$q^2 = (p-2r)p = p^2 - 2pr \quad \text{e} \quad q^2 + r^2 = p^2 - 2pr + r^2 = (p-r)^2.$$

Visto que p e r são inteiros, também $p - r$ é inteiro e, portanto, $q^2 + r^2$ é um quadrado perfeito.

Solução 2:

Considerem-se as distâncias p e r e o quadrado de lado $p - r$ indicados na figura. Os quatros triângulos rectângulos assinalados com $*$ têm a mesma medida de área que os quatros triângulos rectângulos assinalados com $\star$. Logo a soma da medida da área do quadrado menor com a medida da área do quadrado inclinado é igual à medida da área do quadrado de lado $p - r$, isto é, $(p-r)^2$ e, visto que p e r são inteiros, também $p - r$ é inteiro.



Enunciado da Prova

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

Cada questão vale 10 pontos.

---

6. Designe-se por N o número de pessoas que compraram algum exemplar de *As Aventuras Matemáticas de Pedro Nunes*. Fixada uma das 10 pessoas, digamos, P, então cada uma das restantes 9 pessoas comprou pelo menos algum exemplar de algum dos livros de P, logo (pelo *Princípio de Dirichlet*) pelo menos 4 pessoas (incluindo P) compraram exemplares de um mesmo livro. Logo $N \geq 4$.

   Prove-se que não pode ser $N = 4$. De facto, se fosse $N = 4$ então teriam sido comprados exactamente 4 exemplares de *As Aventuras Matemáticas de Pedro Nunes*, e não poderiam ter sido comprados mais de 4 exemplares de nenhum dos restantes livros comprados. Mas então, teriam sido comprados exactamente 4 exemplares de cada livro. Com efeito, designe-se por $P_1, \ldots, P_{10}$ as 10 pessoas. Seja $i \in \{1, \ldots, 10\}$. Considere-se a correspondente pessoa P_i, e designe-se por α, β e γ os 3 livros (distintos) por ela comprados. Então, pelo menos um exemplar destes livros, digamos, α, foi comprado por mais 3 pessoas, digamos, por P_q, P_r e P_s. Como P_i e cada uma das restantes seis P_j's ($j \neq i, q, r, s$) têm que ter pelo menos um exemplar em comum de um mesmo livro, e cada exemplar de cada livro não pode ser comprado por mais de 4 pessoas (pois estamos a assumir que $N = 4$), então 3 das restantes 6 pessoas P_j's teriam que ter comprado algum exemplar do livro β, e as outras 3 pessoas teriam que ter comprado algum exemplar do livro γ. Assim, de cada livro de P_i foram comprados exemplares por exactamente mais 3 pessoas, ou seja, para cada um dos 3 livros de P_i foram comprados exemplares por exactamente 4 pessoas. Como P_i foi fixado arbitrariamente, deduz-se que por cada livro distinto comprado pela totalidade das 10 pessoas foram comprados exemplares por exactamente 4 destas pessoas. Mas isto é impossível, pois como cada uma das 10 pessoas comprou exactamente 3 livros, então no total foram comprados 30 exemplares (eventualmente vários exemplares do mesmo livro), e não é possível particionar estes 30 exemplares em grupos de 4 (para se obter 4 exemplares de cada um dos livros distintos), já que 30 não é divisível por 4.

   Decorre que $N \geq 5$. Para concluir que é 5 o menor número de pessoas que poderiam ter comprado algum exemplar de *As Aventuras Matemáticas de Pedro Nunes*, basta observar que com um total de 7 livros distintos é possível distribuir 3 exemplares distintos (escolhidos de entre os 7 livros) a cada uma das 10 pessoas nas condições observadas, como se constata de imediato pelo quadro abaixo, onde para cada $i = 1, 2, \ldots, 7$, ℓ_i designa cada um dos livros e na coluna correspondente a cada P_j estão assinalados os livros cujos exemplares essa pessoa comprou.

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
ℓ_1	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_2
ℓ_2	ℓ_4	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_5	ℓ_4	ℓ_2	ℓ_4	ℓ_4
ℓ_3	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_7	ℓ_7	ℓ_3	ℓ_5	ℓ_6

Enunciado da Prova
