



# Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XXI OPM - Final - 1º dia - 11.04.2003 - Categoria B

<http://www.spm.pt/~opm>

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução de problemas

1. A camada de espuma deve, no mínimo, ser constituída por 6 paralelepípedos de dimensões  $0,5 \times 1 \times 1$ , contíguos a cada uma das 6 faces do cubo, 12 quartos de cilindro com 1 de altura e  $0,5$  de raio de base, alinhados com cada uma das 12 arestas do cubo e 8 oitavos de esfera de raio  $0,5$  centrados em cada um dos oito vértices do cubo. Assim, o volume mínimo de espuma mede

$$6 \times 0,5 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times \pi \times (0,5)^2 + \frac{4}{3} \times \pi \times (0,5)^3 = 3 + \frac{11}{12} \pi \text{ km}^3.$$

2. Denote-se por  $t_n$  o número de tubos metálicos numa coluna hexagonal, em que  $n$  representa o número de tubos numa das faces da coluna. Determine-se inicialmente  $t_n$ .

**Solução 1:** É claro que  $t_1 = 1$ . Para  $n \geq 2$ ,  $t_n = t_{n-1} + 6(n-1)$ , ou seja,

$$t_n = 1 + 6(1 + \dots + (n-1)) = 1 + 6 \times \frac{1+n-1}{2} \times (n-1) = 1 + 3n(n-1).$$

**Solução 2:** Tem-se  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2 + 3 + 2 = 2 \times 2 + 3$ ,  $t_3 = 3 + 4 + 5 + 4 + 3 = 2 \times (3 + 4) + 5$  e para  $n \geq 4$ ,

$$\begin{aligned} t_n &= 2[n + (n+1) + \dots + (n+n-2)] + (n+n-1) \\ &= 2 \times \frac{n+n+n-2}{2} \times (n-1) + (2n-1) \\ &= 3n^2 - 3n + 1 = 1 + 3n(n-1). \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $n \geq 1$ ,  $t_n = 1 + 3n(n-1)$ .

Seja  $m$  o número inteiro tal que  $t_m$  termina em 2003, ou seja,  $t_m - 1 = 3m(m-1)$  termina em 2002. Seja  $a$  o algarismo das unidades de  $m-1$ . O algarismo das unidades de  $t_m - 1$  é o algarismo das unidades do número  $3a(a+1)$  e, como se pode ver na tabela, não pode ser 2. Logo, não existe  $m$  tal que  $t_m - 1$  termine em 2. Consequentemente, não se pode construir uma coluna cujo número de tubos termine em 2003.

$a$	$3a(a+1)$
0	0
1	6
2	18
3	36
4	60
5	90
6	126
7	168
8	216
9	270

3. Considerem-se 650 coroas circulares centradas em cada um dos pontos pintados. Todas estas coroas estão contidas num círculo de raio  $16 + 3 = 19$ . Se cada ponto deste círculo fosse coberto quando muito por 9 coroas, a área correspondente às 650 coroas não poderia exceder a área correspondente a 9 círculos de raio 19 que mede  $9 \times \pi \times 19^2 = 3249\pi$ . Mas a soma das medidas de área das 650 coroas é  $650 \times \pi \times (3^2 - 2^2) = 3250\pi$ . Assim, existe pelo menos um ponto no círculo de raio 19 que pertence a 10 coroas e, portanto, a coroa circular centrada nesse ponto contém pelo menos 10 pontos pintados.