Pré-Publicações do Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Preprint Number 21–54

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA E O PENSAMENTO COMPUTACIONAL

JAIME CARVALHO E SILVA

Abstract: Problem solving is a central aspect of teaching Mathematics. The solving of real and concrete problems must be a central concern of mathematics teaching, as José Sebastião e Silva (1914-1972) said more than 50 years ago: "The mathematics teacher must be, first of all, a teacher of mathematisation, that is, it must get the student to reduce concrete situations to mathematical models and, vice versa, apply the logical schemes of mathematics to concrete problems."
And how are concrete problems solved with mathematical tools? Computational thinking can be used to support problem solving through a set of concepts and skills such as abstraction, algorithmic thinking and structured problem decomposition. It is not just a matter of obtaining formulas that will (eventually) solve problems, or training procedures and concentrating on routine calculations. Rather, it is about solving the problems completely and reaching a solution (even if it is an approximate one) and exploring the meaning of the solution, studying the successful path that led to the solution and thinking about which lessons can be drawn from this success, that can help us face other new problems in the future.
The idea of obtaining approximate solutions thus assumes great importance. Sebastião e Silva himself pointed out that "right in the first class, the student must be [put] in contact with the concept of approximation (...) which dominates all modern numerical analysis, linked to the use of computers."
In conclusion, computational thinking will help to put the teaching of mathematics back where it should never have left, the solving of real, concrete, problems using the logical schemes of mathematics.

Keywords: Problem Solving, Mathematical Modelling, Computational Thinking, Coding, Mathematics Teaching.
Math. Subject Classification (2020): 00A35, 97-02, 97C70.

1. Introdução

É uma questão recorrente a de determinar quais as causas do insucesso da disciplina de Matemática, sobretudo numa época em que as competências

Received December 14, 2021.
Text of the plenary talk given at the meeting "Matemática com vida: diferentes olhares sobre a tecnologia" that was given at the University of Aveiro on the 2nd of October of 2021, accepted for publication in the Proceedings. This work was partially supported by the Centre for Mathematics of the University of Coimbra - UIDB/00324/2020, funded by the Portuguese Government through FCT/MCTES.

matemáticas são indispensáveis para todos os cidadãos. Já nos primórdios do século XX, o matemático italiano Federigo Enriques (1871-1946), um dos fundadores da escola italiana de Geometria Algébrica, juntamente com Guido Castelnuovo (1865-1952) e Francesco Severi (1879-1961), teve intervenções significativas e ainda hoje atuais. Entre 1900 e 1927, editou três edições diferentes, muito aumentadas em relação a cada edição anterior, de uma obra monumental em três volumes intitulada "Questioni riguardanti le Mathematiche Elementari". O objetivo desta obra era contribuir para a melhoria da formação dos professores de Matemática do Ensino Secundário. Enriques (1907) escreveu:

> Se a matemática é frequentemente considerada como carga inútil pelos alunos, isto depende em parte do carácter demasiado formal que tende a tomar um tal ensino, por um falso conceito rigoroso encaminhado a satisfazer a minuciosa exigência de palavras. (...) Esquecem-se de tal modo os problemas concretos que conferem interesse às teorias, e sob a fórmula do raciocínio não se vêm mais senão os factos adquiridos desde há tempos, assim como o encadeamento sobre o qual nós artificialmente os ajustámos ([9], p. 237).

A resolução de problemas de Matemática, sobretudo em contextos concretos, quando ignorada, tem como consequência uma rejeição da importância da matemática que os alunos estudam nas suas aulas. Isto não é muito diferente do que o matemático e pedagogo português José Sebastião e Silva (1914-1972) escrevia, nos anos 60 do século passado:

> Entre os exercícios que podem ter mais interesse, figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas. O nosso ensino tradicional não enferma unicamente de fraca (e quantas vezes nula) insistência em demonstrações, e de insuficiente rigor lógico; peca também por ausência de contacto com o húmus da intuição e com a realidade concreta. Ora, um dos pontos assentes em reuniões internacionais de professores, promovidas pela OCDE, é que o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um professor de matematização, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos ([23], p. 9).

O matemático espanhol Miguel de Guzmán (1936-2004), que esteve várias vezes em Portugal, também analisou com detalhe os problemas do ensino da matemática e apresentou algumas ideias sobre como os enfrentar. Enfatizou, repetidamente, a ideia forte da resolução de problemas contextualizados no seu texto "Modelización y aplicaciones en la educación matemática":

> Existe en la actualidad una fuerte corriente en educación matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas no se realice explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, en las diferentes formas en que han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad. Parece obvio que si nos limitáramos en nuestra educación a una mera presentación de los resultados que constituyen el edificio puramente teórico que se ha desarrollado en tal intento, dejando a un lado sus orígenes en los problemas que la realidad presenta y sus aplicaciones para resolver tales problemas, estaríamos ocultando una parte muy interesante y substancial de lo que la matemática verdaderamente es. Aparte de que estaríamos con ello prescindiendo del gran poder motivador que la modelización y las aplicaciones poseen[1].

Miguel de Guzmán foi um pioneiro na utilização da tecnologia no ensino avançado da Matemática, concretamente, do então poderoso software DERIVE, em áreas tão díspares como a Geometria e o Cálculo Diferencial e Integral. As suas ideias e as suas propostas podem ser encontradas tanto em livros para o Ensino Secundário como para o Ensino Superior, como em obras gerais de divulgação para alunos e professores.

2. O caso de Singapura

Os programas oficiais da disciplina de Matemática em Singapura ([2]), tanto do ensino primário (6 anos de escolaridade) como do ensino secundário (outros 6 anos), são frequentemente citados a propósito deste tema pois enfatizam claramente a ideia de que "Aprender matemática é mais do que apenas aprender conceitos e procedimentos (skills)" ([15], p.20). Em consequência os programas preconizam a elaboração de "experiências de aprendizagem cuidadosamente construídas" e sublinham que, por exemplo, é preciso "encorajar

[1] "Enseñanza de las Ciencias y la Matemática" disponível em https://www.oei.es/historico/oeivirt/edumat.htm

os estudantes a serem inquisitivos", e as referidas experiências de aprendizagem "devem incluir oportunidades onde os estudantes descubram resultados matemáticos por si próprios". O esquema da figura 1 é revelador de um ensino centrado na resolução de problemas de matemática na sala de aula. Não é por isso surpreendente que os alunos de Singapura obtenham resultados tão notáveis em estudos internacionais como o PISA e o TIMMS, que são fortemente baseados na resolução de problemas de Matemática.

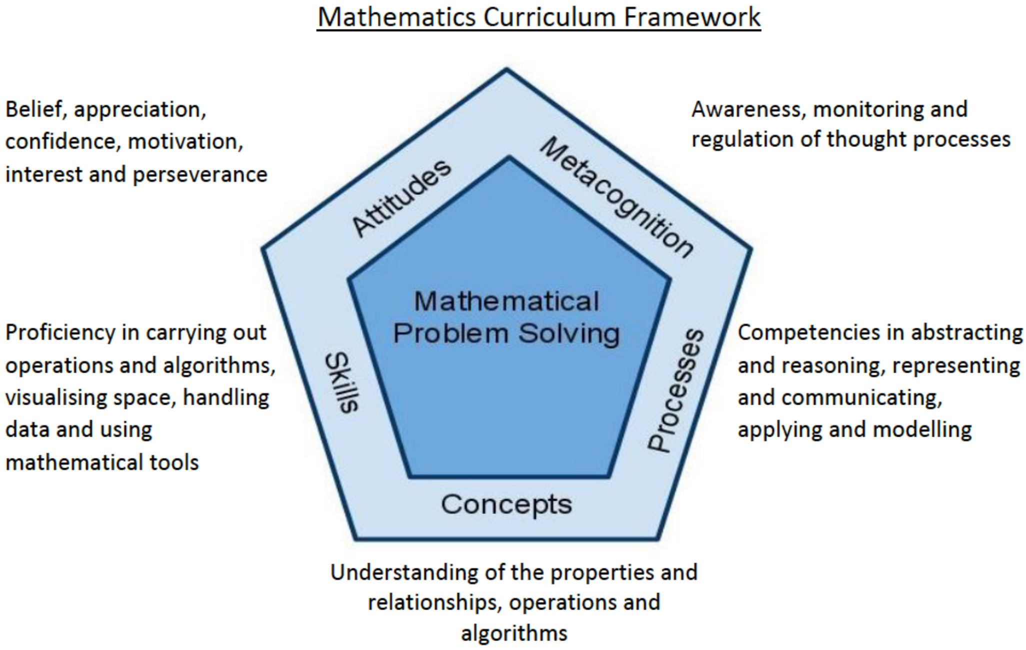

Figura 1 - Esquema dos programas de Matemática de Singapura (MES, 2019) (versão dos programas do Ensino Secundário de 2019)

Os programas de Singapura são muito mais focados na resolução de problemas reais do que se pode entrever no diagrama da figura 1. A modelação matemática e as aplicações são também fortemente desenvolvidas. O diagrama reproduzido na figura 2, que aparece nos programas de todos os níveis de escolaridade, evidencia o cuidado posto na discussão de problemas do "mundo real" na sala de aula de matemática, usando conceitos e ferramentas matemáticas adequadas. Os dois últimos anos do ensino secundário de Singapura oferecem essencialmente quatro vias diferentes para aceder a cursos do Ensino Superior nas diferentes áreas. Em todas essas áreas, são apresentados exemplos de problemas de aplicações e modelação matemática que podem ser usadas nas aulas. A figura 3 mostra o esquema apresentado no programa de Matemática H1 destinado a alunos das áreas de ciências sociais e gestão.

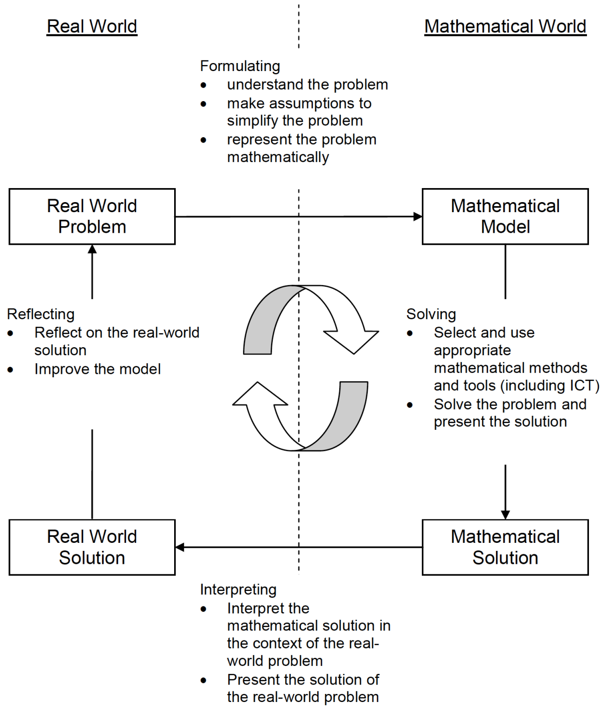

Figura 2 - Esquema de modelação matemática dos programas de Matemática de Singapura ([17])

Applications and contexts	**Some possible topics involved**
Optimisation problems (e.g. maximising profits, minimising costs)	Inequalities; System of linear equations; Calculus
Population growth, radioactive decay	Exponential and logarithmic functions
Financial Mathematics (e.g. profit and cost analysis, demand and supply, banking, insurance)	Equations and inequalities; Probability; Sampling distributions; Correlation and regression
Games of chance, elections	Probability
Standardised testing	Normal distribution; Probability
Market research (e.g. consumer preferences, product claims)	Sampling distributions; Hypothesis testing; Correlation and regression
Clinical research (e.g. correlation studies)	Sampling distributions; Hypothesis testing; Correlation and regression

Figura 3 - Esquema dos programas de Matemática de Singapura ([16])

São exemplos (não exaustivos) de várias áreas da Matemática, funções, matemática financeira, probabilidade e estatística, que os alunos estudam e onde poderão aplicar a matemática que estudam. Segundo o programa, espera-se que os alunos sejam capazes de usar a informação dada para formular e resolver problemas e de interpretar a solução no contexto do problema tratado. Na versão dos programas do Ensino Secundário de 2019 (do 7° ao 10° anos de escolaridade), encontramos pela primeira vez uma referência abundante à importância dos algoritmos (que aparecem também pela primeira vez explicitamente no esquema da figura 1). A presença de algoritmos é recomendada da seguinte forma:

> Levar os estudantes que tenham experiência com programação a implementar alguns dos algoritmos em matemática (por ex. encontrar fatores primos, multiplicar duas matrizes, encontrar a mediana de uma lista de dados) pode potencialmente ajudar estes estudantes a desenvolver uma compreensão mais clara dos algoritmos e também dos conceitos matemáticos subjacentes ([17], p. 39).

Nestes programas não se encontra de forma explícita a expressão "pensamento computacional" mas a tecnologia está sempre presente para contribuir para a aprendizagem e a resolução de problemas: "As ferramentas computacionais são também essenciais para a aprendizagem da matemática" ([16], p. 39). Além disso, as calculadoras científicas são requeridas no exame nacional do 6° ano de escolaridade e as calculadoras gráficas no exame nacional final do ensino secundário.

3. Algoritmos

Como assinala Pedro Domingos no seu livro "O Algoritmo Mestre: como a busca do algoritmo de aprendizagem definitivo recriará nosso mundo"[2]:

> Vivemos na era dos algoritmos. Há apenas uma ou duas gerações, a simples menção da palavra algoritmo não significava nada para a maioria das pessoas. Atualmente, os algoritmos integram tudo que se faz no mundo civilizado. Eles fazem parte da trama que compõe a nossa vida diária. Não estão apenas nos telemóveis ou laptops, mas nos carros, em nossa casa, nos utensílios domésticos e em brinquedos. As instituições bancárias são um imenso quebra-cabeças de algoritmos, com pessoas apertando botões do outro lado. Os algoritmos programam voos e também pilotam aeronaves.

Uma das iniciativas da União Europeia nos últimos anos tem sido a "Semana Europeia da Programação", uma iniciativa anual que pretende levar a programação e a literacia digital a todos, de uma forma divertida e atrativa. No mesmo relatório, a União Europeia afirma que "aprender a programar

[2] No original inglês "The Master Algorithm: How the Quest for the Ultimate Learning Machine Will Remake Our World" (Basic Books, New York, 2015).

ajuda-nos a entender o mundo em rápida evolução à nossa volta, a expandir o nosso conhecimento sobre o funcionamento da tecnologia e a desenvolver competências e capacidades para explorar novas ideias e inovar."

No Relatório de 2016 da União Europeia, já citado, afirma-se que "O Pensamento Computacional é um processo de pensamento (ou uma competência de pensamento humano) que usa abordagens analíticas e algorítmicas para formular, analisar e resolver problemas".

Em vários países, o Pensamento Computacional é parte integrante dos currículos escolares. Um esses países é a França, em que Simon Modeste tem vindo a desenvolver uma profunda reflexão sobre a importância do Pensamento Computacional no ensino. O trabalho de referência é a sua tese de doutoramento intitulada "Enseigner l'algorithme pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve?".

Os atuais programas franceses do ensino básico e secundário contêm referências explícitas ao uso do pensamento computacional e dos algoritmos, devendo ser consultados, assim como os manuais escolares atuais, para contactar com exemplos concretos de pensamento computacional atualmente integrados no ensino da Matemática. A análise de Simon Modeste refere que, nos programas de 2007-2009, os algoritmos assumiam-se, principalmente, como uma ferramenta de programação e apareciam poucos ligados à resolução de problemas, devendo o trabalho algorítmico ocorrer junto dos temas matemáticos cuja resolução beneficia de uma abordagem algorítmica. Essa situação encontra-se claramente corrigida nos programas atualmente em vigor. Arlindo Oliveira, no texto já citado, defende que

> A educação dos nossos jovens passa, cada vez mais, por uma sólida formação de base em áreas que lhes permitam manipular informação e transformá-la em produtos e soluções. Para além da Física, da Matemática e das outras ciências básicas, que continuam a ser indispensáveis, esta formação deve cobrir de forma profunda e sistemática a área que se designa por pensamento computacional (*Jornal Público*, 8-12-2017).

Para que não surjam confusões, Arlindo Oliveira chama a atenção que "pensamento computacional não é equivalente a saber programar" (*Jornal Público*, 8-12-2017).

4. O caso da França

Como já referimos, os atuais programas da disciplina de Matemática em França incluem numerosas referências ao pensamento computacional. Primeiro, entre 2007 e 2009 e, depois, entre 2017 e 2019, todos os programas de Matemática, desde o equivalente ao 1° ciclo do ensino básico ao final do ensino secundário, incluem atividades de programação sem computador, construção e análise de algoritmos, uso de programação em linguagem *Scratch* no Ensino Básico e uso de linguagem *Python* nos três últimos anos da escolaridade. No programa do 10° ano de escolaridade (seconde), refere-se que não é a construção de algoritmos que é o objetivo principal:

> A algoritmia tem um lugar natural em todos os campos da matemática e os problemas assim tratados devem estar relacionados com outras partes do programa (funções, geometria, estatística e probabilidade, lógica), mas também com outras disciplinas ou com a vida cotidiana (Programme de mathématiques de seconde générale et technologique).

No que diz respeito ao trabalho com algoritmos, com indicações concretas exemplificativas em todos os temas do programa, indica-se que os alunos devem descrever os algoritmos em linguagem natural e na linguagem de programação *Python*, que os alunos devem escrever alguns programas simples e que os alunos devem interpretar, completar ou modificar algoritmos mais complexos. Os exemplos concretos contidos no programa do 10° ano são, entre outros, os seguintes:

- determinar por varrimento um enquadramento de $\sqrt{2}$ a menos de 10^{-n};
- determinar se um inteiro natural é múltiplo de outro inteiro natural;
- determinar se um inteiro natural é primo;
- estudar o alinhamento de três pontos no plano;
- determinar a equação de uma reta passando por dois pontos dados;
- algoritmo de cálculo aproximado do comprimento de uma porção de curva representativa de uma função;
- perceber de forma experimental a lei dos grandes números.

Os algoritmos também começaram a aparecer na prova do *baccalauréat*, o exame final que os estudantes franceses devem realizar no final do ensino secundário. Um exemplo de questão de exame (que é segunda de três partes sobre temas relacionados) é apresentada na figura 4.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Figura 4 - Parte de uma questão do baccalauréat de 2012 (França) (Baccalauréat S - Index des exercices contenant un algorithme de juin 2012 à novembre 2013, DENIS VERGES)

Nesta questão, observa-se que o aluno deve interpretar o algoritmo dado, executar o algoritmo num caso concreto, modificar o algoritmo e conjeturar o comportamento da sucessão dada a partir de valores obtidos usando o algoritmo. Trata-se de uma questão bastante exigente, em que o trabalho com o algoritmo é totalmente enquadrado no tema matemático das sucessões numéricas.

5. Alguns exemplos de Sebastião e Silva

Em múltiplos locais dos (ainda hoje) inovadores Compêndios de Matemática (1a edição 1966), Sebastião e Silva discute problemas de matemática importantes cuja resolução exige abordagens algorítmicas. Por exemplo:

> logo na primeira aula se deve [pôr] o aluno em contacto com o conceito de aproximação. (...) a ideia dos métodos de aproximação, que domina toda a análise numérica moderna, ligada ao uso de computadores. (...) se alguém lhes perguntar como se calculam todas as raízes de uma dada equação algébrica, de grau arbitrário, com a aproximação que se queira, terão de reconhecer que não sabem. Isto dá bem nota de como o ensino tradicional tem sido afastado da realidade ([23], vol 2-3, p. 53, 60, 74).

Sebastião e Silva chama frequentemente a atenção para a importância da análise numérica quando os algoritmos que desenvolveu podem passar a ser executados com eficiência pelos computadores, cada vez mais potentes, que já então se começavam a desenvolver. Isso é claro no seguinte extrato do "Compêndio de Matemática" (os negritos e as maiúsculas são os do original):

> O que torna muitas vezes difícil aos alunos a compreensão da teoria dos limites é, em grande parte, a separação artificial que se estabelece entre os dois termos do par **teoria-prática**, ou seja entre **matemática pura** e **matemática aplicada**. Aliás, o cálculo numérico aproximado está a assumir importância cada vez maior nos tempos atuais, com o desenvolvimento dos computadores eletrónicos e suas aplicações à vida das sociedades modernas, às investigações espaciais, etc., tendo conduzido à criação de um novo ramo da matemática: a ANALISE NUMÉRICA ([22], vol 2, p. 14).

A visão de futuro de Sebastião e Silva não deixa de ser surpreendente, pois os grandes computadores eletrónicos tinham, somente, uns 20 anos de idade e apenas existiam em poucos locais selecionados. Mas não há dúvida de que a sua visão é impressionantemente notável:

> Mas também se pode, desde já, prever o aparecimento de problemas que, mesmo com os melhores métodos conhecidos, exijam computadores cada vez mais potentes. O certo é que se começa já a desenhar entre nós a necessidade de um GRANDE CENTRO NACIONAL DE CÁLCULO, munido de um computador de alta potência ([22], vol 2, p. 241).

Por outro lado, as comunicações telefónicas entre computadores são hoje corriqueiras mas, nos anos 60, estavam mais perto da ficção científica:

> Este não eliminaria a necessidade de computadores de pequena ou média potência, que poderiam ficar ligados telefonicamente ao primeiro, a fim de transferirem para este a resolução de problemas que não tivessem capacidade para resolver ([22], vol 2, p. 242).

E a importância para as escolas era igualmente antecipada com uma clarividência que deve suscitar a nossa admiração:

> Haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino destes assuntos fosse normalmente orientado a partir de centros de interesse como o anterior - e tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseada

> no uso de computadores, existentes nas próprias escoIas ou fora destas, em Iaboratórios de cálculo ([23], vol 2-3, pg 93).

Há vários exemplos concretos que são apresentados por Sebastião e Silva no Compêndio e nos respetivos Guias. Vamos desenvolver um deles. Na página do segundo volume do Compêndio de Matemática, Sebastião e Silva propõe-se calcular, aproximadamente, $\sqrt[5]{23}$ pelo método de Newton. Este método consiste na aproximação sucessiva do valor que se pretende aproximar por meio da fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - 23}{5x_n^4}$$

que permite obter uma aproximação com um erro tão pequeno quanto se queira. É preciso começar por escolher um número x_1 tal que ${x_1}^5 > 23$. Poderá ser $x_1 = 2$ pois se tem que $2^5 = 32 > 23$. A partir desta primeira aproximação, as aproximações seguintes são obtidas usando a fórmula iterativa. Então, Sebastião e Silva escreve o seguinte:

> Mas os cálculos são agora mais laboriosos, tornando-se para isso aconselhável recorrer a um computador. Os valores aproximados que a seguir apresentamos foram calculados por meio do computador eletrónico que se encontra ao serviço do Laboratório Nacional de Engenharia Civil ([22], vol 2, p. 60).

E apresenta a tabela de valores da figura 5.

$x_1 = 2$

$x_2 = 1{,}88750001$

$x_3 = 1{,}87241820$

$x_4 = 1{,}87217129$

$x_5 = 1{,}8721712$

Figura 5 - Resultados apresentados por Sebastião e Silva para aproximar $\sqrt[5]{23}$ ([22], *vol 2, p. 60*)

Em seguida, dá indicações sobre como foram obtidos os valores:

> O programa para este cálculo foi escolhido de modo a dar as seguintes ordens ao computador: 1) fornecer sucessivos valores aproximados de $\sqrt[5]{23}$, segundo o método de Newton, partindo de x_1 (com 8 algarismos decimais); 2) terminar no valor aproximado que tiver 7 decimais exatos, ou seja com erro inferior a

> 10^{-7} (chamamos 'algarismos decimais' aos algarismos da parte decimal) ([22], vol 2 , p. 60).

Sabemos que foi usada a linguagem ALGOL para fazer a programação e que teve a colaboração da matemática do L. N. E. C., Madalena Quirino. Existem seis exemplos deste tipo no segundo volume do Compêndio de Matemática, o que é verdadeiramente surpreendente quando constatamos que o livro foi escrito nos anos 60. Mas o ensino deve preparar os alunos para o futuro e o futuro que Sebastião e Silva antevia era, claramente, o da resolução de problemas e o do pensamento computacional.

6. Conclusão

Tal como refere Arlindo Oliveira, o pensamento computacional não é só importante para quem trabalha com as tecnologias de informação e comunicação mas é também essencial para "quem propõe leis, define procedimentos, segue protocolos ou cria regras", ou seja, toda a gente. E acrescenta que o pensamento computacional (...) "não faz ainda parte do que é ensinado aos nossos jovens. É fundamental alterar este estado de coisas, para que a sociedade portuguesa do futuro seja educada, competitiva e resiliente" (*Jornal Público*, 8-12-2017).

Assim, o pensamento computacional irá ajudar a recolocar o ensino da matemática no local de onde nunca deveria ter saído, a resolução de problemas reais, concretos, usando os esquemas lógicos da matemática, como uma formação de base indispensável a todos os cidadãos.

Referências

[1] Carvalho e Silva, J. (2003). Novos programas de Matemática no Ensino Secundário 2003/2004, *Gazeta de Matemática*. 145: 10-17.

[2] Carvalho e Silva, J. (2013). O ensino da Matemática em Singapura, *Educação e Matemática*. 123: 33-36.

[3] Carvalho e Silva, J. (2018). Secondary Mathematics for the Social Sciences, *pre-Proceedings ICMI Study 24, School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities*, Tsukuba, 26-30 November 2018, p. 309-316.

[4] Carvalho e Silva, J. (2021a). Opções curriculares num Programa de Matemática para o Ensino Secundário, *Educação e Matemática*. 161: 26-30.

[5] Carvalho e Silva, J. (2021b). A importância do pensamento computacional, *Página da Educação*. 217: 38-39.

[6] Carvalho e Silva, J. (2021c). Pensamento computacional no ensino em França, *Educação e Matemática*. 162 (no prelo).

[7] Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

[8] Durand-Guerrier, V., Meyer, A. & Modeste, S. (2018). Didactical issues at the interface of mathematics and computer science. Proof Technology in Mathematics Research and Teaching, 2019. HAL: `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01912885`

[9] Giacardi, L. (2012). Federigo Enriques (1871-1946) and the Training of Mathematics Teachers in Italy. In S. Coen (Ed.), *Mathematicians in Bologna (1861-1960)* (pp. 209-276). Basel: Springer.

[10] Guzmán, M. (1987a). El sentir cambiante de los matemáticos modernos sobre el quehacer matemático. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas*, ISSN 1135-0261, N. 12, 1987, p. 11-22.

[11] Guzmán, M. (1987b). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, ISSN-e 1681-5653, ISSN 1022-6508, Vol. 43, N. 1, 2007, p. 19-58.

[12] Haese, M. et al. (2019a). *Mathematics - Analysis and Approaches SL 2 (for use with IB Diploma Programme)*. Marleston: Haese Mathematics.

[13] Haese, M. et al. (2019b). *Mathematics - Applications and Interpretation SL 2 (for use with IB Diploma Programme)*. Marleston: Haese Mathematics.

[14] Haese, M. et al. (2019c). *Mathematics Core topics SL 1 (for use with IB Diploma Programme)*. Marleston: Haese Mathematics.

[15] Ministry of Education of Singapore [MES] (2012). *Primary Mathematics, Teaching and learning Syllabus.*

[16] Ministry of Education of Singapore [MES] (2015). *Mathematics Syllabus, Pre-University H1 Mathematics.* Obtido de `https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/pre-university-h1-mathematics.pdf`

[17] Ministry of Education of Singapore [MES] (2019). *Mathematics Syllabus, Secondary One to Four, Express Course, Normal (Academic) Course.*

[18] Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve?* Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université de Grenoble, 2012. HAL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00783294

[19] Oliveira, A. (2019). *Inteligência Artificial.* Lisboa: Fundação Francisco Manuel dos Santos.

[20] Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos.* Escolar Editora, Lisboa.

[21] Ponte, J. P. (2002). O ensino da Matemática em Portugal. Uma prioridade educativa? In Conselho Nacional de Educação (Org.), *O Ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

[22] Sebastião e Silva, J. (1975-1978a) *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.

[23] Sebastião e Silva, J. (1975-1978b) *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.

[24] SESAMATH. (2019). *Manuel Maths 1re - Programme 2019.* Obtido de `https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019`

[25] SESAMATH. (2019). *Manuel Maths 2de - Programme 2019.* Obtido de `https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019`

Jaime Carvalho e Silva
CMUC, Department of Mathematics, University of Coimbra, 3001-501 Coimbra, Portugal
E-mail address: `jaimecs@mat.uc.pt`
URL: `http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/`