Pré-Publicações do Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Preprint Number 05–23

# REALIZAÇÕES MATRICIAIS DE PARES DE *TABLEAUX* DE YOUNG E PALAVRAS FRANCAS

OLGA AZENHAS AND RICARDO MAMEDE

RESUMO: Neste artigo determinamos uma condição necessária para a existência de uma realização matricial, sobre um domínio local de ideais principais, de um par $(T, K(\sigma))$ de tableaux de Young, onde $T$ é um *tableau* enviesado, no alfabeto $[t]$, e $K(\sigma)$ é a chave associada a uma permutação $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$, com o peso de $T$. Mostramos que o par $(T, K(\sigma))$ tem uma realização matricial só se a palavra de $T$ pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$. Mostra-se ainda que a palavra de $T$ pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$ se e só se a palavra formada pelos conjuntos indexantes de $T$ é franca.

## 1. Introdução

Sejam $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$, e $K(\sigma)$ uma chave associada. Isto é, $K(\sigma)$ é um *tableau* com colunas comparáveis para a inclusão, que se obtém tomando uma sequência de factores à esquerda de $\sigma$, considerada como palavra no alfabeto $[t]$, ordenados por ordem decrescente [19]. Dado um par $(T, K(\sigma))$ de tableaux de Young, onde $T$ é um *tableau* enviesado, no alfabeto $[t]$, e $K(\sigma)$ é a chave associada a $\sigma$ com o peso de $T$, consideramos o problema da existência de uma realização matricial, sobre um domínio local de ideais principais, para o par $(T, K(\sigma))$.

Quando $\sigma$ é a permutação identidade, este problema corresponde à interpretação matricial do chamado *problema de Green-Klein.* Mais precisamente, J. A. Green [12] e T. Klein [14] determinaram um conjunto de condições necessárias e suficientes para a existência de módulos de torsão finitamente gerados $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, sobre um domínio de ideais principais, com factores invariantes prescritos e tais que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{A}$. A análise deste problema reduz-se ao caso local, *i.e.*, ao caso em que apenas um domínio local é considerado.

Em [2, 6], é introduzido o conceito de realização matricial para o par de *tableaux* $(T, K(id))$, e é apresentada uma prova matricial para o problema de Green-Klein. Mais precisamente, $(T, K(id))$ tem uma realização matricial se e só se $T$ é um *tableau* de Littlewood-Richardson. (Em [1] é apresentada

Received October 17, 2005.

uma outra realização matricial usando uma definição diferente de *tableau* de Littlewood-Richardson.) Isto equivale a dizer que $(T, K(id))$ tem uma realização matricial se e só se a palavra de $T$ pertence à classe de Knuth da chave $K(id)$ com o peso de $T$. O conceito de realização matricial de pares de *tableaux* é então generalizado [2, 3, 4] para qualquer permutação $\sigma \in \mathcal{S}_t$, $t \geq 1$. Em [2, 4], é resolvido o problema da existência de uma realização matricial para o par $(T, K(\sigma))$, quando $\sigma$ é a permutação reversão em $\mathcal{S}_t$, $t \geq 1$, e em [8], o problema é completamente resolvido para qualquer permutação $\sigma \in \mathcal{S}_3$. Em [3, 20] é tratado o problema de uma transposição. Em todos estes casos, o par $(T, K(\sigma))$ possui uma realização matricial se e só se a palavra do *tableau* enviesado $T$ pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$.

Um *tableau* enviesado $T$ pode ser descrito quer pela sua palavra $w(T)$, quer pelos seus conjuntos indexantes, *i.e.*, os conjuntos formados pelas posições que as letras de $w(T)$ ocupam na representação planar de $T$. A noção de conjuntos indexantes de um *tableau* enviesado foi introduzida em [2, 6]. Estes conjuntos foram caracterizados para algumas permutações $\sigma$ tais que $w(T)$ está na classe de Knuth duma chave $K(\sigma)$ [3, 4, 5, 8, 20]. Utilizando o conceito de palavra franca, introduzido por A. Lascoux e M. P. Schützenberger em [19], provamos que a palavra $w(T)$ pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$ com o peso de $T$ se e só se a palavra formada pelos conjuntos indexantes de $T$ é franca. Esta dualidade entre a palavra e os conjuntos indexantes do *tableau* enviesado, bem como algumas propriedades das palavras francas, são utilizadas para generalizar a condição necessária, dos resultados mencionados acima, a qualquer permutação $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$. Em [9] é caracterizada uma família de elementos numa classe de Knuth de uma chave para a qual esta condição também é suficiente.

## 2. Variações do *jeu de taquin* e palavras francas

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos com a ordem usual "$\leq$". Dado $t \in \mathbb{N}$, denotamos por $[t]^*$ o monóide livre gerado pelo alfabeto $[t] := \{1, \ldots, t\}$, *i.e.*, o conjunto de todas as palavras finitas sobre o alfabeto $[t]$, munido da operação concatenação. O elemento neutro é a palavra vazia.

Uma palavra $v = x_1 \cdots x_k \in [t]^*$ é dita uma *coluna* se $x_1 > \cdots > x_k$. Neste caso, $v$ é representada planarmente numa coluna com as letras por ordem decrescente do topo para baixo. Por exemplo, $\begin{array}{c}5\\2\\1\end{array}$ é a representação planar da coluna 521. Seja $V_t$ o conjunto de todas as colunas de $[t]^*$. (Quando o alfabeto for irrelevante, omitimos o índice $t$ na notação $V_t$ e escrevemos apenas $V$). Qualquer palavra $w \in [t]^*$ admite uma factorização única como o produto de um número minimal de colunas: $w = v_1 v_2 \cdots v_r$, $v_i \in V_t$, chamada *factorização por colunas* de $w$, sendo $v_1$ a *coluna esquerda* $L(w)$ de $w$, e $v_r$ a *coluna direita* $R(w)$ de $w$. Esta factorização será representada algumas vezes por $v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_r$. O *formato* de $w$ é a sequência $\|w\| = (|v_1|, \ldots, |v_r|)$, formada pelos comprimentos $|v_i|$ das colunas de $w$, sendo o *peso* de $w$ definido pela sequência $(|w|_1, \ldots, |w|_t)$, onde $|w|_i$ designa o número de letras $i$ existentes em $w$. Por exemplo, se $w = 5214421 \in [5]^*$, a sua factorização por colunas é dada por $w = \begin{array}{ccc} 5 & & \\ 2 & & \\ 1 & 4 & 4 \\ & & 2 \\ & & 1 \end{array}$. É claro que $\|w\| = (3, 1, 3)$, e o peso de $w$ é dado pela sequência $(2, 2, 0, 2, 1)$. Note que podemos escrever $w$ como um produto de 4 colunas $w = \begin{array}{cccc} 5 & & & \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ & & & 2 \\ & & & 1 \end{array}$. Mas, neste caso, a sequência dos comprimentos das colunas $(2, 1, 1, 3)$ não é o formato de $w$, pois não estamos perante uma factorização por colunas. É claro que se $w = w_1 \cdots w_q$ ($w_i \in V_t$), então $r \le q$, tendo-se igualdade apenas se esta for a factorização por colunas.

Os conjuntos subjacentes das colunas de $V_t$ definem uma bijecção $v \to \{v\}$ entre o conjunto $V_t$ das colunas de $[t]^*$ e o conjunto potência $2^{[t]}$ de $[t]$. Tendo em conta esta bijecção, um elemento de $2^{[t]}$, ordenado por ordem decrescente, pode ser visto como uma coluna de $V_t$. Esta bijecção permite-nos estender a $V_t$ a relação de ordem $\le$, definida em $2^{[t]}$ pondo $B \le A$ se e só se existe uma injecção crescente $i$ de $B$ em $A$ tal que $b \le i(b)$ para todo $b \in B$. Uma tal injecção pode ser visualizada dispondo os elementos de $A$ numa coluna, por ordem decrescente do topo para baixo, e seguidamente colocando os elementos de $B$ à esquerda das suas imagens.

**Exemplo 2.1.** Consideremos as colunas $v = 431 \le u = 65421 \in [6]^*$. Em baixo representamos graficamente três diferentes injecções crescentes de

$\{v\} = \{4,3,1\}$ em $\{u\} = \{6,5,4,2,1\}$:

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ & 2 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ & 5 \\ 3 & 4 \\ & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ & 2 \\ 1 & 1 \end{array}. \tag{1}$$

Definimos outra relação de ordem $\triangleright$ em $2^{[t]}$, e estendemo-la a $V_t$, pondo $B \triangleright A$ se e só se existe uma injecção crescente $i$ de $A$ em $B$ tal que $i(a) \leq a$ para todo $a \in A$. Tal como anteriormente, tal injecção pode ser visualizada dispondo os elementos de $B$ numa coluna, ordenada por ordem decrescente do topo para baixo, e seguidamente colocando os elementos de $A$ à direita das suas imagens.

**Exemplo 2.2.** Sejam agora $v = 54321 \triangleright u = 542$. Os diagramas seguintes representam três injecções crescentes distintas de $\{u\} = \{6,4,2\}$ em $\{v\} = \{5,4,3,2,1\}$.

$$\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 4 & 4 \\ 3 & \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}. \tag{2}$$

Se $A, B \subseteq [t]$ têm o mesmo cardinal, é claro que $B \leq A$ se e só se $B \triangleright A$.

As ordens acabadas de caracterizar permitem-nos apresentar as definições de *tableau* e *contretableau*. Assim, uma palavra $w = v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_r \in [t]^*$ é dita um *tableau* se $v_1 \triangleright v_2 \triangleright \cdots \triangleright v_r$. Se as suas colunas satisfazem $v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_r$, $w$ diz-se um *contretableau*. Por exemplo, as palavras $6431\,62\,4 = \begin{array}{ccc} 6 & & \\ 4 & & \\ 3 & 6 & \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$ e $54321\,642 = \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}$ são *tableaux*, enquanto que as palavras $1\,32\,654 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{array}$ e $431\,65421 = \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ & 2 \\ & 1 \end{array}$ são *contretableaux*. Um *tableau* é dito *standard* se não tiver letras repetidas.

Uma *partição* é uma sequência de inteiros não negativos $a = (a_1, a_2, \ldots)$, todos nulos à excepção de um número finito e tais que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ O número $|a| = \sum_i a_i$ é dito o *peso* de $a$ e o valor máximo de $i$ para o qual $a_i > 0$ é chamado o *comprimento* de $a$. Se o comprimento e o peso de $a$ são zero, temos a partição nula $a = (0, 0, \ldots)$. Se $a_i = 0$ para $i > k$, escreveremos também $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Por vezes, é conveniente utilizar a notação $a = (a_1^{m_1}, \ldots, a_k^{m_k})$, onde $a_1 > \cdots > a_k$ e $a_i^{m_i}$, com $m_i \geq 0$, significa que $a_i$ aparece $m_i$ vezes como parte de $a$. Notemos que toda a partição se pode escrever na forma $a = (t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ para algum inteiro positivo $t$. A *partição conjugada* de $a$ é então definida como sendo a partição $(\sum_{i=1}^t l_i, \ldots, l_{t-1} + l_t, l_t)$. Por outro lado, sendo $\sigma \in S_t$ e escrevendo $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^t l_k$, $i = 1, \ldots, t$, tem-se $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1}) = \sum_{i=1}^t (1^{m_{\sigma(i)}})$.

Claramente, o formato de um *tableau* é sempre uma partição. No exemplo acima, o formato do *tableau* 6431 62 4 é a partição $(4, 2, 1) = (4^1, 3^0, 2^1, 1^1) = (1^1) + (1^2) + (1^3) + (1^1)$, sendo a sua partição conjugada dada por $(3, 2, 1, 1) = (3^1, 2^1, 1^2)$.

Um *tableau enviesado*, no alfabeto $[t]$, [18] é um *tableau* sobre o alfabeto $[t] \cup \{\emptyset\}$, onde a letra extra $\emptyset$ satisfaz

$$\emptyset < \emptyset < 1 < 2 \cdots < t.$$

Por exemplo, $T = 32\emptyset\, 2\emptyset\, 31\, 2\, 2$ é um *tableau* enviesado no alfabeto $[3]$, com formato $(3, 2, 2, 1, 1)$, e a sua representação planar é dada por

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & & & \\ 2 & 2 & 3 & & \\ \emptyset & \emptyset & 1 & 2 & 2 \end{array} \quad . \tag{3}$$

A palavra $w(T)$ de um *tableau* enviesado $T$, no alfabeto $[t]$, é a palavra em $[t]^*$ obtida eliminando de $T$ a letra $\emptyset$. O peso de $T$ é definido como sendo o peso da palavra $w(T)$. Em (3), temos $w(T) = 3223122$ e o peso de $T$ é dado por $(1, 4, 2)$. Note-se que toda a palavra pode ser vista como a palavra de um *tableau* enviesado. Por exemplo, o *contretableau* 1 32 654 é a palavra do *tableau* enviesado

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \\ \emptyset & 2 & 5 \\ \emptyset & \emptyset & 4 \end{array} .$$

Dado um *tableau* enviesado $T$, seja

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_k \\ u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix} \tag{4}$$

a bi-palavra onde a linha inferior é $w(T) = u_1 \cdots u_k$, e a linha superior $\pi_1\pi_2 \cdots \pi_k$ é tal que $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_k$ com $\pi_j$ o índice da coluna, contado da esquerda para a direita, da letra $u_j$ em $T$, $1 \leq j \leq k$. A bi-letra $\begin{pmatrix} \pi_j \\ u_j \end{pmatrix}$ significa que a letra $u_j$ está situada na coluna $\pi_j$ de $T$. Para $i \in \{1, \ldots, t\}$, seja $J_i = \{y_1^i > \cdots > y_{m_i}^i\}$ o conjunto formado pelos índices das colunas das letras $i$ em $T$. Identificamos $J_i$ com a coluna $y_1^i \cdots y_{m_i}^i$. Os conjuntos $J_1, \ldots, J_t$ são ditos os *conjuntos indexantes* de $T$, e como acabámos de ver, cada $J_i$, $i = 1, \ldots, t$, indica as posições, segundo o índice das colunas, das letras $i$ de $w(T)$ na representação planar de $T$. Reordenando as bi-letras em (4), por ordem não crescente das letras na segunda linha, obtemos a bi-palavra

$$\begin{pmatrix} J_t & \cdots & J_2 & J_1 \\ t^{m_t} & \cdots & 2^{m_2} & 1^{m_1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

onde $\begin{pmatrix} J_i \\ i^{m_i} \end{pmatrix}$ representa a bi-palavra com linha inferior a palavra $i^{m_i}$ e linha superior a coluna $J_i$.

Um *tableau* enviesado determina então um único conjunto de bi-letras, mas não uma única bi-palavra. Por exemplo, se ordenarmos as bi-letras do *tableau* enviesado (3), por ordem não decrescente das letras na primeira linha, ou por ordem não crescente das letras da segunda linha, obtemos, respectivamente, as bi-palavras

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,2\,3\,3\,4\,5 \\ 3\,2\,2\,3\,1\,2\,2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3\,1\,5\,4\,2\,1\,3 \\ 3\,3\,2\,2\,2\,2\,1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

A segunda linha da bi-palavra à esquerda em (6) indica a palavra do *tableau* enviesado (3), enquanto que a primeira linha da bi-palavra à direita em (6) indica os conjuntos indexantes desse *tableau* enviesado.

Dado $J \subseteq [t]$, definimos a função característica de $J$ pondo $(\chi^J)_i = 1$, se $i \in J$, e $(\chi^J)_i = 0$, caso contrário. Dado um *tableau* enviesado $T$ com bi-palavra (5), podemos associar-lhe uma sequência de partições $(a^0, a^1, \ldots, a^t)$ pondo $a^0 := (a_1^0, \ldots, a_n^0)$ a partição definida pelo formato da palavra obtida eliminando de $T$ as letras de $[t]$, e $a^i := a_{i-1} + \chi^{J_i}$, $i = 1, \ldots, t$. É claro que cada $a^i = (a^i_1, \ldots, a^i_n)$ é também uma partição e satisfaz

$$a^i_k \leq a^{i+1}_k \leq a^i_k + 1, \tag{7}$$

para $i = 0, 1, \ldots, t-1$, e $k = 1, \ldots, n$. Reciprocamente, qualquer sequência de partições $(a^0, a^1, \ldots, a^t)$ satisfazendo (7) origina um *tableau* enviesado $T$ de formato $a^t$, com bi-palavra definida pelos conjuntos $J_i = \{k : a^i_k = a^{i-1}_k + 1\}$, $i = 1, \ldots, t$. Por exemplo, o *tableau* enviesado (3) é definido pela sequência de partições $T = (a^0, \ldots, a^4)$, onde $a^0 = (1, 1, 0, 0, 0), a^1 = (1, 1, 1, 0, 0), a^2 = (2, 2, 1, 1, 1)$ e $a^3 = (3, 2, 2, 1, 1)$.

A congruência de Knuth $\equiv$ [15] sobre palavras no alfabeto $[t]$ é a congruência gerada pelas transformações elementares seguintes, onde $x$, $y$ e $z$ são letras em $[t]$:

$$xzy \equiv zxy, \quad x \leq y < z, \tag{8}$$

$$yzx \equiv yxz, \quad x < y \leq z. \tag{9}$$

Estas relações (8),(9), também designadas por relações *pláxicas*, são a versão algébrica da congruência *pláxica* [11, 15, 17, 16] obtida utilizando o algoritmo de inserção de Schensted [23].

**Teorema 2.1.** $(a)$ *Cada classe pláxica contém um e um só tableau $T$.*

$(b)$ *As palavras congruentes com $T$ estão em bijecção com os tableaux standard com o mesmo formato de $T$.*

Dada $w \in [t]^*$, designamos por $P(w)$ o único *tableau* congruente com $w$. Tal *tableau* pode ser obtido a partir de $w$ utilizando quer o algoritmo de inserção de Schensted [23], quer o algoritmo de deslizamento de Schützenberger [11, 17, 18, 22], também designado por *jeu de taquin*.

**Teorema 2.2.** *Sejam $T$ e $Q$ dois tableaux enviesados. Então, $w(T) \equiv w(Q)$ se e só se $T$ se obtém de $Q$ aplicando o jeu de taquin.*

Uma palavra $w_1$ diz-se uma *sub-palavra* de $w = x_1 \cdots x_k \in [t]^*$ se existem inteiros $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq k$ tais que $w_1 = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$. Dizemos que duas sub-palavras $w_1 = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ e $w_2 = x_{j_1} \cdots x_{j_s}$ de $w = x_1 \cdots x_k$ são disjuntas se os conjuntos $\{i_1, \ldots, i_r\}$ e $\{j_1, \ldots, j_s\}$ são disjuntos.

Dado $w \in [t]^*$, seja $l(w, k)$ o máximo da soma dos comprimentos de $k$ sub-palavras decrescentes e disjuntas de $w$. De forma semelhante, designemos por $l'(w,k)$ o máximo da soma dos comprimentos de $k$ sub-palavras não decrescentes e disjuntas de $w$. Por exemplo, as sub-palavras não decrescentes de comprimento máximo de $w = 5214421$ são 244 e 144, donde $l'(w,1) = 3$. Claramente, $l'(w,2) = 5$, pois a soma dos comprimentos das sub-palavras 244 e 12 representa o máximo da soma dos comprimentos de 2 sub-palavras não decrescentes de $w$. Temos $l'(w,3) = 6$ e $l'(w,4) = 7$. A sub-palavra decrescente de comprimento máximo de $w$ é 5421, pelo que $l(w,1) = 4$. É fácil verificar que $l(w,2) = 6$ e $l(w,3) = 7$.

Estes números não são modificados pelas transformações de Knuth, sendo designados por *invariantes de Greene* [13]. Seja $a = (a_1, \ldots, a_s)$ o formato de $P(w)$ e $a' = (a'_1, \ldots, a'_l)$ a partição conjugada. O teorema seguinte, provado por C. Greene em [13], dá-nos uma interpretação combinatória para os comprimentos das colunas e das linhas de um *tableau*. (Veja-se também [11, 16].)

**Teorema 2.3.** *Para $k = 1, \ldots, s$, $a_k = l(w,k) - l(w,k-1)$, e para $k = 1, \ldots, l$, $a'_k = l'(w,k) - l'(w,k-1)$, com $l(w,0) = l'(w,0) = 0$.*

Sejam $u, v \in V_t$ tais que $v \cdot u$ é um *tableau* ou *contretableau*, e fixemos uma injecção $i$ como anteriormente, mas tal que a sua imagem contenha $\{u\} \cap \{v\}$. Consideremos a representação planar de $v \cdot u$ de acordo com a injecção $i$, colocando o símbolo $\blacksquare$ nas posições não numeradas, da coluna das pré-imagens, isto é, nas posições horizontalmente adjacentes aos elementos que não estão na imagem de $i$. Por exemplo, consideremos o *contretableau* $431 \cdot 65421$ apresentado no exemplo 2.1, e notemos que a imagem da primeira injecção definida em (1) não contém todos os elementos comuns às duas colunas. Consideremos, então, a segunda injecção $i$, com imagem $i(v) = \{1, 4, 6\}$:

$$\begin{matrix} 4 & 6 \\ \blacksquare & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}\ . \tag{10}$$

Designemos por $\Theta$ a operação de deslizamento horizontal em $v \cdot u$, que consiste em deslizar horizontalmente as letras que não estão na imagem de $i$, para as posições com o símbolo $\blacksquare$, adjacentes, aparecendo, deste modo, o símbolo $\blacksquare$ nas posições deixadas vagas. Por exemplo, considerando a injecção definida em (10), temos

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \blacksquare & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 5 & \blacksquare \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} . \tag{11}$$

Algebricamente, considerando $v \leq u$ e $\Theta(v \cdot u) = v' \cdot u'$, temos $\{v'\} = \{v\} \cup (\{u\} \setminus i(v))$ e $\{u'\} = i(v)$. É claro que $v' \triangleright u'$, pois a aplicação $j$, definida por $j(b) = a$ se e só se $i(a) = b$, é uma injecção crescente de $u'$ em $v'$ com $i(b) \leq b$ para $b \in \{u'\}$, e, além disso, a sua imagem $j(u') = v$ contém os elementos comuns a $v'$ e $u'$. As colunas $v, u$ podem agora ser recuperadas efectuando a operação de deslizamento horizontal no sentido oposto, definida pela injecção $j$, $\Theta(v' \cdot u') = v \cdot u$. Voltando à injecção definida em (10), temos

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \blacksquare & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 5 & \blacksquare \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{cc} 5 & \blacksquare \\ 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cc} \blacksquare & 5 \\ 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \tag{12}$$

Se a injecção $i$ considerada para definir a operação $\Theta$ for tal que a sua imagem satisfaz $i(v) \leq \iota(v)$, no caso do *contretableau* $v \cdot u$, ou $\iota(u) \leq i(u)$, no caso do *tableau* $v \cdot u$, para qualquer outra injecção crescente $\iota$, denotamos esta operação por $\Theta^*$. Graficamente, isto significa, no caso do *contretableau* [respectivamente, *tableau*], que as letras de $v$ [respectivamente, $u$] estão situadas, o mais baixo [respectivamente, acima] possível, à esquerda da coluna $u$ [respectivamente, à direita da coluna $v$], de tal modo que a condição " $\leq$ " na horizontal seja preservada. Considerando novamente o *contretableau* $431 \leq 65421$, facilmente se conclui que a terceira injecção apresentada em (1) está nas condições requeridas.

É fácil verificar que a operação $\Theta^*$ aplicada ao *tableau* ou *contretableau* $v \cdot u$ coincide com a aplicação do *jeu de taquin* a $v \cdot u$. Por exemplo, aplicando $\Theta^*$

ao *contretableau* $431 \cdot 65421$, temos

$$\begin{array}{cc} \blacksquare & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta^*}{\longleftrightarrow} \quad \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array}, \tag{13}$$

enquanto que os passos sucessivos da aplicação do *jeu de taquin* ao *contretableau* $431 \cdot 65421$, são:

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ \blacksquare & 4 \\ 1 & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} \blacksquare & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & \blacksquare \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}.$$

Embora as palavras $\Theta(v \cdot u)$ e $\Theta^*(v \cdot u)$ tenham o mesmo formato, não são congruentes. Contudo, ambas são *tableaux* ou *contretableaux*, e satisfazem $L(\Theta^*(vu)) \geq L(\Theta(vu))$ e $R(\Theta^*(vu)) \leq R(\Theta(vu))$.

Mais geralmente, seja $v_t \cdot v_{t-1} \cdot \ldots \cdot v_1$ a factorização por colunas de $w \in [t]^*$. Para $i = 1, \ldots, t-1$, definimos $\Theta_i^*(w)$ como sendo a palavra obtida de $w$ substituindo as colunas $v_{i+1}v_i$ por $\Theta^*(v_{i+1}v_i)$, sempre que $v_{i+1}v_i$ é um *tableau* ou um *contretableau*. Assim, e tendo em conta o teorema 2.2, concluímos que $w \equiv \Theta_i^*(w)$. No entanto, $\Theta_i^*(w)$ pode já não ser uma palavra com $t$ colunas. Por exemplo, $\Theta_2^*(7 \cdot 762 \cdot 4) = 762 \cdot 74$. Veremos seguidamente que se o formato de $w = v_t \cdot v_{t-1} \cdot \ldots \cdot v_1$ for uma permutação do formato de $P(w)$, $\Theta_i^*(w)$ ainda é uma palavra com $t$ colunas.

No conjunto das sequências finitas de inteiros positivos, podemos definir uma relação de pré-ordem, pondo $a \leq b$ se e só se para cada $k > 0$, a soma das $k$ maiores entradas de $a$ é menor ou igual do que a soma das $k$ maiores entradas de $b$. Claro que se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a$ é uma permutação de $b$.

Dada uma sequência de inteiros positivos $a = (a_1, \ldots, a_r)$, definimos a palavra $aM := (a_1 \cdots 1) \cdot (a_1 + a_2 \cdots a_1 + 1) \cdots ((a_1 + \cdots + a_r) \cdots (a_1 + \cdots + a_{r-1} + 1))$ com formato $a$. Por exemplo, $(2,1,4)M = 21 \cdot 3 \cdot 7654$ tem formato $(2,1,4)$.

**Lema 2.4.** *Seja $w = v_1 \cdot \ldots \cdot v_r$ ($v_i \in V$) uma palavra. Então:*

*(a)* $\|w\| \leq \|P(w)\|$;

*(b)* $\|w\|$ *é uma permutação de* $\|P(w)\|$ *sse* $\|w\|M$ *é uma palavra de inserção de* $w$*.*

*Demonstração:* Veja-se [19]. $\square$

Por exemplo, $(4,2,1)M = \begin{array}{lll} 4 & & \\ 3 & & \\ 2 & 6 & \\ 1 & 5 & 7 \end{array}$ é o tableau de inserção de $\begin{array}{lll} 5 & & \\ 3 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 1 & 3 \end{array}$ enquanto que $(2,4,1)M = \begin{array}{lll} 2 & 6 & \\ 1 & 5 & \\ & 4 & \\ & 3 & 7 \end{array}$ é uma palavra de inserção de $\begin{array}{lll} 3 & 5 & \\ 1 & 4 & \\ & 2 & \\ & 1 & 3 \end{array}$ e $(2,1,4)M = \begin{array}{lll} 2 & & \\ 1 & 3 & 7 \\ & & 6 \\ & & 5 \\ & & 4 \end{array}$ é uma palavra de inserção de $\begin{array}{lll} 3 & & \\ 1 & 2 & 5 \\ & & 4 \\ & & 3 \\ & & 1 \end{array}$.

Como consequência das alíneas $(b)$ do lema anterior e do teorema 2.1, obtemos

**Teorema 2.5** (A. Lascoux, M.P. Schützenberger, [19])**.** *Seja* $T$ *um tableau com formato* $i = (i_1, \ldots, i_r)$*. Para cada permutação* $j$ *de* $i$*, existe uma e uma só palavra* $w \equiv T$ *com formato* $j$*. Estas palavras designam-se por palavras francas.*

Portanto, uma palavra $w \in [t]^*$ é franca se e só se o seu formato é uma permutação do formato do *tableau* $P(w)$. Em particular, todo o *tableau* e *contretableau* são palavras francas. As palavras francas duma classe pláxica estão em bijecção com o conjunto das permutações do formato do *tableau* nessa classe. Ou seja, as palavras francas são completamente determinadas pelo seu formato.

Pelo lema 2.4 $(b)$, cada factor $v_{i+1} \cdot v_i$ de uma palavra franca $w = v_t \cdot \ldots \cdot v_2 \cdot v_1$ é ainda uma palavra franca. Além disso, visto as operações $\Theta^*$ preservarem a congruência pláxica, por 2.4 $(a)$ concluímos que $\|\Theta_i^* w\|$ é uma permutação de $\|w\|$. Portanto, as operações $\Theta^*$ podem ser utilizadas para obter todas as palavras francas congruentes com um determinado *tableau*. Por exemplo, a classe pláxica do *tableau* 5321 41 3 contém as seis palavras francas seguintes, as quais correspondem às seis permutações do formato $(4,2,1)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 5 & \\ & 3 & \\ & 2 & 4 \\ & 1 & 3 \end{array} \arrow[rr, leftrightarrow, "\Theta_2^*"] & & \begin{array}{ccc} 5 & & \\ 3 & & \\ 2 & & \\ 1 & 1 & 4 \\ & & 3 \end{array} \arrow[dr, leftrightarrow, "\Theta_1^*"] & \\
\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ & 2 & 4 \\ & & 3 \\ & & 1 \end{array} \arrow[ur, leftrightarrow, "\Theta_1^*"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\Theta_2^*"'] & & & & \begin{array}{ccc} 5 & & \\ 3 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc} 3 & & \\ 1 & 2 & 5 \\ & & 4 \\ & & 3 \\ & & 1 \end{array} \arrow[rr, leftrightarrow, "\Theta_1^*"'] & & \begin{array}{ccc} 3 & 5 & \\ 1 & 4 & \\ & 2 & \\ & 1 & 3 \end{array} \arrow[ur, leftrightarrow, "\Theta_2^*"'] &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

Note-se que o hexágono fecha porque estas são todas as palavras francas congruentes com $5321\,41\,3$.

O próximo teorema permite-nos averiguar se a concatenação de duas palavras francas é ainda uma palavra franca.

**Teorema 2.6** (A. Lascoux, M. P. Schützenberger, [19])**.** *A concatenação de duas palavras francas $w, w'$ é franca se e só se $R(u).L(u')$ é franca para qualquer par de palavras francas $u, u'$ tal que $u \equiv w$ e $u' \equiv w'$.*

Note-se que se $w, w' \in V$, $ww'$ é franca se e só se $ww'$ é *tableau* ou *contretableau.* Como consequência do resultado anterior, obtemos o seguinte critério para o caso em que adicionamos uma coluna à esquerda de uma palavra franca.

**Corolário 2.7.** [7] *Sejam $w = v_1 \cdots v_k$ uma palavra franca e $v \in V$. Então, $vw$ é franca se e só se as palavras $vv_1$ e $\overline{v}_1 v_2 \cdots v_k$ são francas, onde $\overline{v}\,\overline{v}_1 = \Theta^*(vv_1)$.*

*Demonstração:* A condição é claramente necessária. Provemos então a suficiência. Comecemos por notar que $vw$ é a concatenação das palavras francas $vv_1$ e $v_2 \cdots v_k$. Além disso, as únicas palavras francas congruentes com $vv_1$ são a própria e $\overline{v}\,\overline{v}_1 = \Theta^*(vv_1)$. Como $\overline{v}_1 v_2 \cdots v_k$ e $v_1 v_2 \cdots v_k$ são francas, o mesmo se passa com $\overline{v}_1 L(u)$ e $v_1 L(u)$, para qualquer palavra franca $u \equiv v_2 \cdots v_k$. Pelo teorema anterior, podemos concluir que $vw$ é franca. $\square$

O critério dado pelo corolário anterior pode ser generalizado para operações $\Theta$.

**Corolário 2.8.** [7] *Sejam* $w = v_1 \cdots v_k$ *uma palavra franca e* $v \in V$*. Então,* $vw$ *é franca se e só se as palavras* $vv_1$ *e* $\widetilde{v}_1 v_2 \cdots v_k$ *são francas, onde* $\widetilde{v}\,\widetilde{v}_1 = \Theta(vv_1)$ *para alguma operação* $\Theta$*.*

*Demonstração:* A condição necessária é consequência do teorema anterior. Suponhamos então a existência de uma operação $\Theta$ nas condições do enunciado, e seja $\overline{v}\,\overline{v}_1 = \Theta^*(vv_1)$. É claro que $\overline{v}_1 \leq \widetilde{v}_1$. Equivalentemente, $\overline{v}_1 \triangleright \widetilde{v}_1$, uma vez que $|\overline{v}_1| = |\widetilde{v}_1|$.

Por hipótese, para qualquer palavra franca $u \equiv v_2 \cdots v_k$, o produto $\widetilde{v}_1 L(u)$ é uma palavra franca. Isto significa que $\widetilde{v}_1 \leq L(u)$ ou $\widetilde{v}_1 \triangleright L(u)$. Por transitividade, concluímos que também $\overline{v}_1 \leq L(u)$ ou $\overline{v}_1 \triangleright L(u)$, *i.e.*, $\overline{v}_1 L(u)$ é franca. Assim, pelo teorema anterior, $\overline{v}_1 v_2 \cdots v_k$ é franca e, pelo corolário anterior, a palavra $vw$ é franca. □

## 3. Palavras francas, chaves e palavras de $\sigma$-Yamanouchi

Uma *chave* é um *tableau* cujas colunas são comparáveis para a inclusão. O *tableau* representado em baixo é um exemplo de uma chave:

$$T = \begin{array}{llll} 5 & & & \\ 3 & & & \\ 2 & 5 & 5 & \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array} . \tag{15}$$

Enquanto as palavras francas são completamente determinadas pelo seu formato, as chaves são completamente determinadas pelo seu peso.

Dado $(m_1, \ldots, m_t)$, $m_i \geq 0$, a chave com este peso é o tableau $(0, (1^{m_1}), (1^{m_1}) + (1^{m_2}), \ldots, \sum_{i=1}^{t}(1^{m_i}))$. Este é o único *tableau* com formato $\sum_{i=1}^{t}(1^{m_i})$ e peso $(m_1, \ldots, m_t)$. Ou ainda, a chave de peso $(m_1, \ldots, m_t)$ é o tableau com esse peso e formato o conjugado da partição $(m_{\sigma(1)}, \cdots, m_{\sigma(t)})$, para algum $\sigma \in \mathcal{S}_t$. No exemplo acima, $T$ é a única chave com peso $(3, 1, 1, 0, 4)$. Ou seja, é o tableau $(0, (1^3), (1^3) + (1), (1^3) + (1) + (1), (1^3) + (1) + (1) + (1^4))$.

A cada par constituído por uma permutação $\sigma \in S_t$ e por uma sequência de inteiros não negativos $(l_t, l_{t-1}, \ldots, l_1)$, Ehresmann [10] associou a chave, aqui denotada por $K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$, pondo

$$K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1)) := v_t^{l_t} v_{t-1}^{l_{t-1}} \cdots v_1^{l_1},$$

onde $v_i$ é a coluna formada pelas primeiras $i$ letras de $\sigma$, considerando $\sigma$ como uma palavra no alfabeto $[t]$, $1 \leq i \leq t$. Esta chave é o tableau com formato $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ e peso $(m_1, \ldots, m_t)$ tais que $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \leq i \leq t$.

Por outro lado, a chave com peso $(m_1,\dots,m_t)$ pode ser escrita na forma $K(\sigma,(l_t,\dots,l_1))$ para alguma permutação $\sigma\in S_t$ e sequência de inteiros não negativos $(l_t,\dots,l_1)$, tais que $(t^{l_t},\dots,2^{l_2},1^{l_1})$ é o conjugado da partição $(m_{\sigma(1)},\cdots,m_{\sigma(t)})$, *i.e.*, $m_{\sigma(i)}=\sum_{k=i}^{t} l_k$, $1\le i\le t$.

Portanto, a chave com peso $(m_1,\dots,m_t)$ pode ser parametrizada por uma sequência de inteiros não negativos $(l_t,\dots,l_2,l_1)$ e por uma permutação $\sigma\in S_t$ tais que $(t^{l_t},\dots,2^{l_2},1^{l_1})$ é o conjugado da partição $(m_{\sigma(1)},\cdots,m_{\sigma(t)})$.

Por exemplo, a chave (15) é a chave associada à permutação $\sigma=51324\in S_5$ e à sequência $(0,1,0,2,1)$,

$$K(\sigma,(0,1,0,2,1))=(54321)^0(5321)^1(531)^0(51)^2 5^1=5321\,51\,51\,5.$$

Note-se que o formato da chave é $(4,2,2,1)=(4^1,3^0,2^2,1^1)$ a partição conjugada de $(4,3,1,1)$, a partição que se obtém do peso $(3,1,1,0,4)$ permutando as entradas segundo $\sigma$.

Quando não houver ambiguidade quanto à multiplicidade das colunas de uma chave, escreveremos apenas $K(\sigma)$ para designar uma chave associada à permutação $\sigma$.

**Definição 3.1.** Uma palavra $w\in[t]^*$ é dita de $\sigma$-Yamanouchi se $w\equiv K(\sigma)$, para alguma permutação $\sigma\in S_t$.

(Note-se que a multiplicidade das colunas de $K(\sigma)$ é determinada pelo peso de $w$, que é um invariante da sua classe de Knuth.)

Quando $\sigma$ é a identidade, $w$ é dita apenas palavra de Yamanouchi. Equivalentemente, $w$ é de Yamanouchi se e só se todo o factor à direita $v$ de $w$ satisfaz $|v|_1\ge|v|_2\ge\cdots\ge|v|_t$.

Existe uma relação estreita entre palavras francas e as palavras da classe de Knuth de uma chave. De facto, a toda a palavra franca de formato $(m_t,\dots,m_1)$ corresponde uma palavra na classe de Knuth da chave com peso $(m_1,\dots,m_t)$. Seja então $w=J_t\cdots J_2J_1\in[r]^*$, $(J_i\in V_r)$, uma palavra franca com formato $\|w\|=(m_t,\dots,m_1)$ e $\sigma\in S_t$ tal que $(m_{\sigma(1)},\dots,m_{\sigma(t)})$ é o formato do *tableau* $P(w)$. Seja $(l_t,\dots,l_1)$ uma sequência de inteiros não negativos tal que $m_{\sigma(i)}=\sum_{k=i}^{t} l_k$, $1\le i\le t$. O conjugado do formato de $P(w)$ é, como sabemos, $(t^{l_t},\dots,2^{l_2},1^{l_1})$. Suponhamos ainda que $w$ se obtém do seu *contretableau* congruente aplicando $\Theta^*_{i_1}\cdots\Theta^*_{i_q}$. Como $\Theta^*_i$ actua sobre as colunas $i+1,i$, a contar da direita para a esquerda, concluímos que $\sigma:=s_{i_1}\cdots s_{i_q}\in S_r$, onde $s_i$ designa a transposição $(i\,i+1)$.

Consideremos a bi-palavra

$$\begin{pmatrix} J_t & \cdots & J_2 & J_1 \\ t^{m_t} & \cdots & 2^{m_2} & 1^{m_1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

onde cada factor $\begin{pmatrix} J_k \\ k^{m_k} \end{pmatrix}$ tem a coluna $J_k$ como primeira linha e a palavra $k^{m_k}$, constituída por $m_k$ repetições da letra $k$, como segunda linha. Reordenemos as bi-letras de (16), de modo a que na primeira linha as letras cresçam, com repetição permitida, da esquerda para a direita, e tal que em cada factor $\begin{pmatrix} i \cdots i \\ u_i \end{pmatrix}$, a palavra $u_i$ na linha inferior seja uma coluna:

$$\begin{pmatrix} J_t & \cdots & J_2 & J_1 \\ t^{m_t} & \cdots & 2^{m_2} & 1^{m_1} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1\cdots 1 & 2\cdots 2 & \cdots & r\cdots r \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_r \end{pmatrix}. \tag{17}$$

**Proposição 3.1.** *Seja $w = J_t \cdots J_2 J_1 \in [r]^*$, $(J_i \in V_r)$, uma palavra franca com formato $(m_t, \ldots, m_1)$ e $\sigma \in S_t$ tal que $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(t)})$ é uma partição. A palavra $u := u_1 u_2 \cdots u_r \in [t]^*$, $(u_i \in V_t)$, obtida na segunda linha da bi-palavra à direita em (17), é congruente com a chave $K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$, onde $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \le i \le t$.*

*Demonstração:* Tendo em conta a definição de $u$, é claro que o seu peso é dado por $(m_1, \ldots, m_t)$. Provemos que o formato do *tableau* $P(u)$ é a partição conjugada do formato de $P(w)$, isto é, $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ com $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \le i \le t$.

Para tal, comecemos por observar que se $w'$ é uma sub-palavra não decrescente de $w$, esta é necessariamente constituída por uma só letra de cada coluna de $w$. Por sua vez, a correspondente sub-palavra $u'$ formada na segunda linha da bi-palavra à direita em (17) é decrescente, e é ainda uma sub-palavra de $u$. Reciprocamente, a toda a sub-palavra decrescente de $u$ corresponde na primeira linha da bi-palavra à esquerda em (17) uma sub-palavra não decrescente de $w$. É claro que a transformação em (17) estabelece uma correspondência bijectiva entre as sub-palavras não decrescentes de $w$ e as sub-palavras decrescentes de $u$. Concluímos assim que $l(u,k) = l'(w,k)$, para $k = 1, \ldots, s$, e pelo teorema 2.3, $\|P(u)\| = (t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$.

Existe um e um só *tableau* com formato $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ e peso $(m_1, \ldots, m_t)$, onde $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{r} l_k$, $1 \le i \le t$, para algum $\sigma \in S_t$. Esse *tableau* é precisamente a chave $K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$. Logo, $u \equiv P(u) = K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$. $\square$

Portanto, uma palavra franca de formato $(m_t, \ldots, m_1)$ tal que $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(t)})$ é uma partição, dá origem pela transformação (17) a uma palavra de $\sigma$-Yamanouchi com peso $(m_1, \ldots, m_t)$. Reciprocamente, toda a palavra congruente com a chave com peso $(m_1, \ldots, m_t)$ dá origem, pela transformação (17), a uma palavra franca com formato $(m_t, \ldots, m_1)$.

**Proposição 3.2.** *Seja $u = u_1 \cdots u_r$, $(u_i \in V_t)$, uma palavra na classe de congruência da chave com peso $(m_1, \ldots, m_t)$. Então, a palavra $w = J_t \cdots J_2 J_1$, obtida na primeira linha da bi-palavra à esquerda em (17), é franca com formato $(m_t, \ldots, m_1)$.*

*Demonstração:* É claro que o formato de $w$ é $(m_t, \ldots, m_1)$. Além disso, seguindo a demonstração do lema anterior, concluímos que o formato de $P(w)$ é $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(t)})$, o conjugado do formato $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ da chave $K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$. $\square$

No entanto, a factorização $u = u_1 u_2 \cdots u_t$ considerada em (17) não é, necessariamente, a factorização por colunas de $u$. Assim, uma palavra $u \equiv K(\sigma)$ pode originar várias palavras francas, todas com o mesmo formato, dependendo da decomposição por colunas efectuada. Por exemplo, o *tableau* 21.31.1 origina a correspondência

$$\begin{pmatrix} 21 & 31 & 1 \\ 33 & 22 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 111 & 2 & 3 \\ 321 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Claro que $u := u_1 u_2 u_3$, com $u_1 = 321, u_2 = 3$ e $u_3 = 2$, não é a factorização por colunas de $u$. Já a factorização por colunas $u = 321.32$ dá origem à palavra franca 21.21.1.

Notemos ainda que a transformação (17) foi a transformação utilizada para obter as bi-palavras (4) e (5) de um *tableau* enviesado $T$. Assim, temos

**Teorema 3.3.** *Seja $T$ um tableau enviesado com conjuntos indexantes $J_1, \ldots, J_t$, e seja $\sigma \in S_t$ tal que $|J_{\sigma(1)}| \geq \cdots \geq |J_{\sigma(t)}|$ é uma partição. Então, $w(T)$ é de $\sigma$-Yamanouchi se e só se a palavra $J_t \cdots J_1$ é franca.*

Tomemos como exemplo o *tableau* enviesado (3), com palavra $w(T) = 3223122$ e conjuntos indexantes $J_3 = \{3, 1\}, J_2 = \{5, 4, 2, 1\}$ e $J_1 = \{3\}$. Sendo $(|J_2|, |J_3|, |J_1|) = (4, 2, 1)$ uma partição, considere-se $\sigma = 231 = s_1 s_2$, $l_3 = l_2 = 1$ e $l_1 = 2$. Como vimos em (14), $J_3 J_2 J_1$ é uma palavra franca com formato $(2,4,1)$ e $\Theta_2^*\Theta_1^*(J_3J_2J_1)$ é um *contretableau*. Efectuando a transformação (17),

$$\begin{pmatrix} 31\,54421\,3 \\ 33\,2222\,1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11\,2\,33\,4\,5 \\ 32\,2\,31\,2\,2 \end{pmatrix},$$

concluímos que $w(T) = 3223122$ é de $s_1s_2$-Yamanouchi com peso $(1,4,2)$. De facto, temos

$$P(w(T)) = K(s_1s_2,(1,1,2)) = \begin{array}{l} 3 \\ 2\,3 \\ 1\,2\,2\,2 \end{array},$$

com formato $(3,2,1^2)$, o conjugado de $(4,2,1)$.

## 4. Realizações matriciais de pares de tableaux

Seja $\mathcal{R}_p$ um domínio local de ideais principais com ideal maximal $(p)$. As matrizes que vamos considerar são todas não singulares $n \times n$ com entradas sobre $\mathcal{R}_p$; por $\mathcal{U}_n$ designamos o grupo das matrizes unimodulares sobre $\mathcal{R}_p$.

Dadas matrizes $A$ e $B$, dizemos que $B$ é *equivalente à esquerda* a $A$, ($B \sim_E A$), se $B = UA$ para alguma matriz $U \in \mathcal{U}_n$; $B$ é *equivalente à direita* a $A$, ($B \sim_D A$), se $B = AV$ para alguma matriz $V \in \mathcal{U}_n$; e $B$ é *equivalente* a $A$, ($B \sim A$), se $B = UAV$ para algumas matrizes $U, V \in \mathcal{U}_n$. As relações $\sim_E, \sim_D$ e $\sim$ são relações de equivalência no conjunto das matrizes de ordem $n$ sobre $\mathcal{R}_p$.

Seja $A$ uma matriz $n \times n$ não singular. Pela forma normal de Smith [21], existem inteiros não negativos $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ tais que $A$ é equivalente a

$$diag(p^{a_1}, \ldots, p^{a_n}).$$

A sequência $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dos expoentes, por ordem decrescente, da forma normal de Smith de $A$ é uma partição, univocamente determinada pela matriz $A$, a que chamaremos *partição invariante* de $A$.

Dada uma sequência de inteiros não negativos $f_1, \ldots, f_n$, usamos a seguinte notação para matrizes diagonais de potências de $p$:

$$diag_p(f_1, \ldots, f_n) = diag(p^{f_1}, \ldots, p^{f_n}).$$

Dado $m \in [n]$, designamos por $D_{[m]}$ a matrix $diag_p(1^m, 0^{n-m})$, e dada uma sequência $(m_1, \ldots, m_t)$ de inteiros não negativos, pomos

$$D_{(m_1,\ldots,m_t)} := (D_{[m_1]}, \ldots, D_{[m_t]}).$$

A sequência $(0,(1^{m_1}),\dots,\sum_{i=1}^{t}(1^{m_i}))$ das partições invariantes das matrizes $I$, $D_{[m_1]},D_{[m_1]}D_{[m_2]},\dots,\prod_{i=1}^{t}D_{[m_i]}$, define o único *tableau* com formato $\sum_{i=1}^{t}(1^{m_i})$ e peso $(m_1,\dots,m_t)$. Ou seja, a chave de peso $(m_1,\dots,m_t)$.

**Definição 4.1.** Sejam $T=(a^0,a^1,\dots,a^t)$ um *tableau* enviesado, com comprimento de $a^t\le n$ e peso $(m_1,\dots,m_t)$, e $\sigma\in S_t$ tal que $(m_{\sigma(1)},\dots,m_{\sigma(t)})$ é uma partição. Dado $U\in\mathcal{U}_n$, a sequência de matrizes não singulares

$$(diag_p(a^0)U,D_{(m_1,\dots,m_t)})$$

é dita uma realização matricial do par $(T,K(\sigma))$ se para cada $k=1,\dots,t$,

$$diag_p(a)UD_{[m_1]}\dots D_{[m_k]}\sim diag_p(a^k).$$

Neste caso, $(T,K(\sigma))$ é dito um par admissível.

O próximo resultado relaciona os conjuntos indexantes dos *tableaux* enviesados realizados pelas sequências $(diag_p(a)U,D_{(m_1,m_2)})$ e $(diag_p(a)U,D_{(m_2,m_1)})$ no alfabeto [2].

**Proposição 4.1.** [3, 8] *Sejam $m_1\ge m_2$ dois inteiros não negativos, a uma partição de comprimento $\le n$ e $U\in\mathcal{U}_n$. Sejam $(T,K(id))$ e $(T',K(s_1))$, com $s_1=(1\ 2)$, os pares de tableaux realizados pelas sequências*

$$(diag_p(a)U,D_{(m_1,m_2)})\ e\ (diag_p(a)U,D_{(m_2,m_1)}),$$

*respectivamente. Então, $J_2\cdot J_1$ é a palavra dos conjuntos indexantes de $T$ se e só se $\Theta(J_2\cdot J_1)$ é a palavra dos conjuntos indexantes de $T'$, para alguma operação $\Theta$.*

Como foi referido na introdução, quando $\sigma$ é a identidade ou a permutação reversão em $S_t$, ou qualquer permutação em $S_3$, o par $(T,K(\sigma))$ é admissível se e só se a palavra de $T$ pertence à classe pláxica da chave $K(\sigma)$. O próximo teorema generaliza a condição necessária destes resultados para qualquer permutação $\sigma\in S_t$, $t\ge1$.

**Teorema 4.2.** *Seja $\sigma\in S_t$, $t\ge1$. O par $(T,K(\sigma))$ é admissível só se $w(T)\equiv K(\sigma)$.*

*Demonstração:* Sejam $J_1,\dots,J_t$ os conjuntos indexantes de $T$. Vamos provar, por indução sobre $t\ge1$, que a palavra $J_t\cdots J_1$ é franca. Quando $t=1$ o resultado é trivial e o caso $t=2$ já foi provado [3, 8]. Consideremos então $t>2$ e seja $(diag_p(a)U,D_{(m_1,\dots,m_t)})$ uma realização matricial de $(T,K(\sigma))$. Por indução, a palavra $J_{t-1}\cdots J_1$ é franca, pois a sequência

$(diag_p(a)U, D_{(m_1,\ldots,m_{t-1})})$ realiza um par $(T', K')$, onde $T'$ tem conjuntos indexantes $J_1, \ldots, J_{t-1}$, e $K'$ é a chave com peso $(m_1, \ldots, m_{t-1})$.

Pela forma normal de Smith, existe uma partição $a'$ e uma matrix unimodular $U'$ tais que $diag_p(a)UD_{[m_1]} \cdots D_{[m_{t-2}]} \sim_L diag_p(a')U'$. A sequência $(diag_p(a')U', D_{(m_{t-1},m_t)})$ realiza um par $(\overline{T}, \overline{K})$, onde $\overline{T}$ tem conjuntos indexantes $J_{t-1}, J_t$, e $\overline{K}$ é a chave com peso $(m_{t-1}, m_t)$. Pelo caso $t = 2$, a palavra $J_tJ_{t-1}$ é franca. Além disso, pela proposição anterior, podemos concluir que se $(\overline{T}', \overline{K}')$ é o par realizado pela sequência $(diag_p(a')U, D_{(m_t,m_{t-1})})$, os conjuntos indexantes $\overline{J}_{t-1}, \overline{J}_t$ de $\overline{T}'$ satisfazem $\overline{J}_t\overline{J}_{t-1} = \Theta(J_tJ_{t-1})$ para alguma operação $\Theta$.

Finalmente, notemos que a sequência $(diag_p(a)U, D_{(m_1,\ldots,m_{t-2},m_t)})$ realiza um par $(\widetilde{T}, \widetilde{K})$, onde $\widetilde{T}$ tem conjuntos indexantes $J_1, \ldots, J_{t-2}, \overline{J}_{t-1}$, e $\widetilde{K}$ é a chave com peso $(m_1, \ldots, m_{t-2}, m_t)$. Por indução, a palavra $\overline{J}_{t-1}J_{t-2} \cdots J_1$ é franca. Assim, pelo corolário 2.8, concluímos que $J_t \cdots J_1$ é franca e, portanto, $w(T) \equiv K(\sigma)$. $\square$

# Referências


[1] G. Appleby, *A simple approach to matrix realizations for Littlewood-Richardson sequences*, Linear and Multilinear Algebra **291** (1999), 1–14.

[2] O. Azenhas, *Realizações matriciais de quadros de Young e suas formas canónicas*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1991.

[3] ———, *A regra de Litlewood-Richardson: Generalizações e realizações matriciais*, Actas do 3° Encontro dos Algebristas Portugueses, Universidade de Coimbra, Coimbra (1993), 9–32.

[4] ———, *Opposite Litlewood-Richardson sequences and their matrix realizations*, Linear Algebra and its Applications **225** (1995), 91–116.

[5] ———, *The admissible interval for the invariant factors of a product of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **46** (1999), 51–99.

[6] O. Azenhas and E. Marques de Sá, *Matrix realizations of Littlewood-Richardson sequences*, Linear and Multilinear Algebra **27** (1990), 229–242.

[7] O. Azenhas and R. Mamede, *Matrix realizations of pairs of Young tableaux, keys and shuffles*, DMUC preprint **04-40** (2004), 1–30.

[8] ———, *Actions of the symmetric group on sets of skew-tableaux with prescribed matrix realization*, Linear Algebra and its Applications **401** (2005), 221–275.

[9] ———, *Matrix realizations of pairs of tableaux with shuffling condition*, (em preparação) (2005).

[10] C. Ehresmann, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*, Annals of Mathematics, (2) **35** (1934), 396–443.

[11] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[12] J. A. Green, *Symmetric function and p-modules*, Lecture notes, University of Warwick, Warwick.

[13] C. Greene, *An extension of Schensted's theorem*, Advances in Mathematics **14** (1974), 254–265.

[14] T. Klein, *The multiplication of Schur functions and extensions of p-modules*, Journal of London Mathematical Society **43** (1968), 280–282.
[15] D. E. Knuth, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific Journal of Mathematics **34** (1970), 709–727.
[16] A. Lascoux, B. Leclerc, and J-Y Thibon, *The plactic monoid*, in M. Lothaire (ed.), Algebraic Combinatorics on Words, Vol. 90 of Enciclopedia of Mathematics and its Applications, pp. 164-196, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[17] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, in A. D. Luca (ed.), Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics, Vol. 109 of Quaderni de "La Ricerca Scientifica", pp. 129-156, Sci., Rome, 1981.
[18] ———, *The plactic ring*, Lecture Notes (1981).
[19] ———, *Keys and standard bases*, Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN,1988) IMA, Math. Appl., vol. 19, Springer, New York-Berlin, 1990.
[20] R. Mamede, *Permutações de sequências de Littlewood-Richardson e suas realizações matriciais*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2000.
[21] M. Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, New York, 1972.
[22] B. Sagan, *The symmetric group: representation, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Springer Verlag, New York, 2001.
[23] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canadian Journal of Mathematics **13** (1961), 179–191.

Olga Azenhas
Department of Mathematics, University of Coimbra
*E-mail address*: `oazenhas@mat.uc.pt`

Ricardo Mamede
Department of Mathematics, University of Coimbra
*E-mail address*: `mamede@mat.uc.pt`