Pré-Publicações do Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Preprint Number 06–17

DAVID HILBERT ÜBER PARADOXIEN

REINHARD KAHLE

ZUSAMMENFASSUNG: In dieser Arbeit stellen wir Hilberts Diskussion der (mengentheoretischen) Paradoxien in seinen grundlagentheoretischen Vorlesungen vor. Dabei stellt sich heraus, daß es die Paradoxien, insbesondere eine von ihm selbst entdeckte, waren, die sein Interesse an den Grundlagen der Mathematik begründeten.

ABSTRACT: In this paper we present Hilbert's discussion of the (set-theoretic) paradoxes in his lectures on foundational issues. It turns out that it were the paradoxes, in particular one found by himself, gave rise to his interest in the foundations of mathematics.

RESUMO: Neste artigo revemos a discussão dos paradoxos (da teoria de conjuntos) apresentados por Hilbert nos seus cursos sobre os fundamentos de matemática. Concluímos que os paradoxos, um em particular encontrado pelo próprio Hilbert, deram origem ao interesse dele nos fundamentos de matemática.

Ein Widerspruch ist wie ein Bazillus, der alles vergiftet,
wie ein Funke im Pulverfass, der alles vernichtet.
David Hilbert, [Hil20, S. 16]

Im Sommersemester 1905 hat David Hilbert (1862–1943) in Göttingen eine Vorlesung unter dem Titel *Logische Principien des mathematischen Denkens* angeboten. Diese Vorlesung enthält, nach allem was wir wissen, die frühste Darstellung der mengentheoretischen Paradoxien durch Hilbert vor einem mathematischen Publikum. In diesem Artikel präsentieren wir zum ersten Mal die bisher unveröffentlichten Diskussionen der Paradoxien in Hilberts grundlagentheoretischen Vorlesungen. Auch wenn er selbst keine Arbeit über Paradoxien (oder über Mengenlehre im allgemeinen) veröffentlicht hat, zeigt sich, daß es die Paradoxien waren — insbesondere eine von ihm selbst entdeckte —, die sein Interesse an den Grundlagen der Mathematik begründeten. Und es ist wohl nicht übertrieben, anzunehmen, daß sich die mathematische Grundlagenforschung zu Beginn des 20. Jahrhunderts gerade deshalb zu einem bedeutenden und fruchtbaren Zweig *innerhalb* der Mathematik entwickeln konnte, weil sich mit Hilbert einer der führenden Mathematiker der Zeit damit beschäftigte.

Received March 16, 2006.

Den Einfluß Hilberts auf die Entwicklung der Grundlagenforschung lassen äußerlich mindestens 4 Punkte erkennen:

(1) Sein Buch *Grundlagen der Geometrie* [Hil99], das insbesondere im Hinblick auf die axiomatische Methode wegweisend war.
(2) Seine berühmte Liste von 23 mathematischen Problemen, vorgetragen auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris [Hil00a], auf der die ersten beiden Probleme — die Kontinuumshypothese und die Konsistenz der Arithmetik — grundlagentheoretischer Natur sind.
(3) Die Einführung der *Beweistheorie* als autonomer Disziplin in der mathematischen Logik und innerhalb dieser das *Hilbertsche Programm* zur Lösung des Konsistenzproblems, welches insbesondere in der Auseinandersetzung mit Luitzen Brouwer (1881–1966) und Hermann Weyl (1885–1955) um die Grundlagen der Analysis eine wichtige Rolle gespielt hat.[1]
(4) Das zusammen mit Wilhelm Ackermann (1896–1962) herausgegebene Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* [HA28] sowie das zweibändige, zusammen mit Paul Bernays (1888–1977) herausgegebene Werk *Grundlagen der Mathematik* [HB34, HB39], das für lange Zeit die Standardreferenz in diesem Gebiet war.

Obwohl Hilbert selbst nur wenige technische Beiträge zur Grundlagenforschung geliefert hat (wenn man von der Aufstellung seiner geometrischen Axiome einmal absieht), lassen aber noch drei weitere Bereiche sein Interesse daran erkennen:

(1) der wissenschaftlichen Austausch mit Kollegen, der uns zumindest teilweise in Briefen erhalten ist; hierbei sind an erster Stelle Georg Cantor (1845–1918) und Gottlob Frege (1848–1925) als Diskussionspartner zu nennen;
(2) seine Vorlesungen zu grundlagentheoretischen Themen, zu denen Vorlesungsausarbeitungen erhalten sind;
(3) die Liste seiner Mitarbeiter, Kollegen und Doktoranden, die sich mit grundlagentheoretischen Themen beschäftigt haben.

Im folgenden werden wir die Quellen vorstellen, in denen sich Hilbert mit Paradoxien auseinandergesetzt hat. Es geht uns dabei in erster Linie um die mathematische Bedeutung der Paradoxien in Hilberts Sicht, sowie um deren

[1]Siehe dazu Paul Bernays' Beitrag *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik* im dritten Band der Gesammelten Abhandlungen Hilberts [Ber35], das auch Referenzen zu Vorträgen Hilberts zu diesem Thema enthält.

technische Behandlung. Eine vollständig historisch-philosophische Einordnung würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen; sie kann daher nur angedeutet werden.[2]

Die frühsten Zeugnisse von Hilberts Beschäftigung mit Paradoxien, die wir im ersten Kapitel vorstellen, finden sich im Briefwechsel mit Cantor und Frege. Sein Vortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1904 in Heidelberg [Hil05c] enthält eine erste öffentliche Reaktion auf die Diskussion in diesem Briefwechsel. Daran schließen wir ein eigenes Kapitel mit der Darstellung von Hilberts eigener Paradoxie an, zu der sich bereits ein Hinweis auf der Postkarte an Frege findet, und die sich ausführlich dargestellt in Ausarbeitungen seiner Vorlesungen findet. Das dritte Kapitel ist Hilberts Behandlung der Paradoxien in seinen Vorlesungen gewidmet. In der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen sind die offiziellen Ausarbeitungen von Hilberts Vorlesungen zugänglich[3], die eine ausgezeichnete aber bisher wenig beachtete Quelle für die Entwicklung der Hilbertschen Ideen, nicht nur zu Grundlagenfragen, bilden.[4] Hier veröffentlichen wir zum ersten Mal zusammenhängend die Diskussion der Paradoxien, die sich in den Ausarbeitungen und Notizen zu den folgenden Vorlesungen finden:[5]

(1) *Logische Principien des mathematischen Denkens* vom Sommersemester 1905;
(2) *Probleme und Prinzipien der Mathematik* vom Wintersemester 1914/15;
(3) *Mengenlehre* vom Sommersemester 1917;
(4) *Probleme der mathematischen Logik* vom Sommersemester 1920.

Schließlich werden wir die Analyse der Paradoxien in diesen Texten noch mit der einzigen größeren Veröffentlichung vergleichen, die sich zu diesem Thema findet, in:

(5) *Grundzüge der theoretischen Logik* (mit Wilhelm Ackermann, 1928).

[2]Wir können hier auf die umfassende Literatur zur Geschichte und Philosophie der Mengenlehre sowie der Grundlagenkrise in der Mathematik hinweisen. Allerdings wird Hilberts Rolle in Bezug auf die Mengenlehre oft nur marginal behandelt — eine Ausnahme bildet dabei Moore [Moo02]. In Bezug auf die Grundlagenkrise konzentrieren sich die Untersuchungen oft nur auf die (relativ gesehen) späte Epoche der Auseinandersetzung mit Brouwer und Weyl — als Ausnahmen seien hier Peckhaus [Pec90] und Sieg [Sie99] genannt.

[3]Die dort aufbewahrten Ausarbeitungen sind noch von Hilbert selbst in die heutige Ordnung gebracht worden.

[4]Siehe auch unten Fußnote 55.

[5]Der historisch ausgerichtete Artikel über Hilberts Behandlung der Mengenlehre von Moore [Moo02] basiert im wesentlichen auf den gleichen Vorlesungen. Dabei werden auch die Paradoxien kurz angesprochen, aber nicht weiter analysiert.

In einem weiteren Kapitel beschreiben wir das Umfeld, in dem in Göttingen die Paradoxien diskutiert wurden, und das zweifelsohne nicht ohne Einfluß auf Hilberts Sichtweise der Paradoxien geblieben ist.

Im letzten Kapitel geben wir eine kurze Zusammenfassung, die noch einmal die Bedeutung der Paradoxien für Hilberts Arbeiten zu den Grundlagen der Mathematik betont.

1. Hilbert und die Paradoxien 1897–1904

Hilberts Interesse an Grundlagenfragen in der Mathematik läßt sich auf seine Diskussionen mit Cantor zurückverfolgen, als dieser die *Mengenlehre* einführte.[6] Hilbert hat an mehr als einer Stelle seinen Respekt vor der bahnbrechenden Leistung Cantors bezeugt. Er gipfelt in dem berühmten Zitat: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.“ [Hil26, S. 170].

Hilbert hatte auch engen persönlichen Kontakt zu Cantor, wie sich aus den Briefen Cantors an Hilbert ergibt. Aus ihnen geht insbesondere hervor, daß Hilberts Interesse an der Mengenlehre ganz wesentlich von den Paradoxien mitbestimmt wurde. Schon der erste (erhaltene) Brief von Cantor beginnt gleich mit einer Diskussion zu diesem Thema:

Zitat 1. (Cantor an Hilbert, Harzburg, 26.9.1897, [PI87, S. 225] und [Can91, S. 388])

> [...] Leider mußte ich wegen vorgeschrittener Mittagszeit vorgestern im Braunschweiger Polytechnicum unsere Unterhaltung über die Mengenlehre an einem Puncte abbrechen, wo Ihnen gerade ein Bedenken aufstieg, ob auch alle transfiniten Cardinalzahlen oder Mächtigkeiten in den Alefs enthalten seien, mit anderen Worten, ob auch jedes bestimmte $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ auch immer ein bestimmtes Alef sei.
>
> Daß diese Frage zu *bejahen* ist, läßt sich *streng beweisen*.

[6] Der Briefwechsel von Cantor und Hilbert (von dem allerdings nur die Briefe Cantors erhalten sind) ist wohlbekannt und in seiner Bedeutung für die Mengenlehre oft zitiert. Im Hinblick auf die Paradoxien wurde er schon von Peukert und Ilgauds diskutiert und teilweise veröffentlicht [PI87]. Sämtliche erhaltenen Briefe Cantors an Hilbert können in der Universitätsbibliothek Göttingen eingesehen werden; ein großer Teil davon ist in [Can91] abgedruckt, zusammen mit erläuternden Bemerkungen. Eine genauere Analyse zu Cantor und den Paradoxien, die auch diese Briefe benutzt, findet sich z.B. in [Fer99, Kap. VIII 8.]. Bei den folgenden Ausführungen beschränken wir uns daher auf die Aspekte des Briefwechsels, die Bezüge zu den späteren Darstellungen Hilberts haben.

> Die Totalität aller Alefs ist nämlich eine solche, welche nicht als eine bestimmte, wohldefinierte *fertige* Menge aufgefaßt werden kann. Wäre dies der Fall, so würde auf diese Totalität ein *bestimmtes Alef* der Größe nach *folgen*, welches daher sowohl zu dieser Totalität (als Element) *gehören*, wie auch *nicht gehören* würde, was ein Widerspruch wäre. [. . .]

Hilbert hatte an dieser Ausführung auszusetzen, daß „der Inbegriff der Alefs" doch eine Menge sei, und Cantor schreibt ihm daher nur 5 Tage später zurück:

Zitat 2. (Cantor an Hilbert, 2.10.1897, [PI87, S. 226] und [Can91, S. 390])

> Lieber Herr College, zurückkommend auf Ihren Brief v. 27ten Sept. bemerke ich, daß Sie darin mit *vollem Rechte* sagen: „Der Inbegriff der Alefs läßt sich als eine bestimmte wohldefinirte Menge auffassen, da doch wenn irgend ein Ding gegeben wird allemal muß entschieden werden können, ob dieses Ding ein Alef sei oder nicht; mehr aber gehört doch nicht zu einer wohldefinierten Menge."
>
> All right.
>
> Sie übersehen jedoch, daß ich in meinem Harzburger Schreiben noch das Charakteristikum „fertig" gebraucht und gesagt habe:
>
> *Theorem:*
>
> „Die Totalität aller Alefs läßt sich nicht als bestimmte wohldefinirte und *zugleich fertige* Menge auffassen."
>
> Hierin ist das *punctum saliens* zu sehen und ich wage es, dieses *vollkommen sichere*, aus der *Definition der „Totalität aller Alefs" streng beweisbare Theorem* als den wichtigsten, mir vornehmsten Satz der Mengenlehre zu bezeichnen. Man muß nur die Ausdrucksweise „fertig" richtig verstehen. Ich sage von einer Menge, daß sie als *fertig* gedacht werden kann, [. . .], wenn es ohne Widerspruch möglich ist [. . .], *alle ihre Elemente als zusammenseiend*, die Menge selbst daher als ein *zusammengesetztes Ding für sich* zu denken; oder auch, (in anderen Worten) wenn es *möglich* ist, sich die Menge mit der Totalität ihrer Elemente als *actuell existirend* zu *denken*. [. . .]

Das Zitat zu Beginn dieses Briefes gibt die Auffassung Hilberts vom Inbegriff der Menge wieder. Wir werden sehen, daß es gerade dieser Mengenbegriff ist — der eine Menge dadurch definiert sieht, daß man für jedes Ding angeben kann, ob es dazugehört oder nicht —, der Hilbert bei den Paradoxien Probleme bereitete.

Diese Auffassung von Menge verträgt sich gut mit der ursprünglichen, berühmten Definition Cantors: „Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen." [Can97, S. 481], [Can32, S. 282]. Zur Zeit des Briefwechsels hatte sich Cantor aber die zusätzliche Unterscheidung von fertigen und „unfertigen" Mengen[7] überlegt, womit sich für ihn gar keine Paradoxien mehr ergeben konnten. Im Gegenteil, die vermeintlichen Widersprüche bilden als *reductio ad absurdum*-Argumente die Basis von Beweisen, mit denen gewisse Totalitäten als eben nicht konsistent erwiesen werden.[8]

Wie wir sehen werden, hat Cantor Hilbert mit seiner Unterscheidung nicht überzeugen können. Hilbert hielt durchweg an dem naiven Mengenbegriff fest.

Neben dem Briefwechsel mit Cantor ist auch der mit Frege für unser Thema von Interesse. In den Jahren 1899 und 1900 haben Hilbert und Frege im Anschluß an Hilberts *Grundlagen der Geometrie* [Hil99] und seinen *Zahlbegriff* [Hil00b] die Frage der Widerspruchsfreiheit und die Bedeutung von Axiomen für die Begriffsbildung diskutiert [Fre76, S. 60ff], allerdings ohne Bezüge zu irgendwelchen Paradoxien. 1903 schickte Frege Hilbert ein Exemplar des zweiten Bandes der *Grundgesetze der Arithmetik* [Fre03], in dessen Nachwort die Russellsche Paradoxie angegeben ist, die Freges System zum Einsturz brachte. In seiner Antwort bedankt sich Hilbert und fährt fort:

Zitat 3. (Hilbert an Frege, Göttingen, 7.11.03, [Fre76, S. 79f])

> Ihr Beispiel am Schlusse des Buches S. 253 ist uns hier bekannt*; andere noch überzeugendere Widersprüche fand ich bereits vor 4–5 Jahren; sie führten mich zu der Ueberzeugung, dass die traditionelle Logik unzureichend ist, die Lehre von der Begriffsbildung vielmehr einer Verschärfung und Verfeinerung bedarf, wobei ich

[7] „unfertig" findet sich nicht explizit bei Cantor. Später hat Cantor die Terminologie geändert: „[...] Ich habe mich jetzt daran gewöhnt, das was ich früher ‚fertig' genannt, durch den Ausdruck ‚consistent' zu ersetzen; [...] ‚Mengen' würden darnach ‚consistente Vielheiten' sein." (Cantor an Hilbert, Halle, 9.5.1899, [Can91, S. 399]).

[8] Daß die Paradoxien für Cantor keine Widersprüche innerhalb der Mengenlehre waren, sondern als *reductio ad absurdum*-Argumente in Beweisen dienten, ist in der Literatur bereits mehrfach betont worden, siehe vor allem [MG81, Gar92]. Wie Meschkowski [Mes85, S. 47] darlegt, hat dies aber auch schon 1906 Schönflies betont [Sch06].

> als die wesentlichste Lücke im herköm[m]lichen Aufbau der Logik die Annahme ansehe, wonach — das nehmen alle Logiker u. Mathem[atiker] bisher an — ein Begriff bereits da sei, wenn man von jedem Gegenstande angeben könne, ob er unter ihn falle oder nicht. Dies ist wie mir scheint nicht hinreichend. Vielmehr ist die Erkenntnis der Widerspruchslosigkeit der Axiome, die den Begriff definiren, das Entscheidende.
>
> *Ich glaube vor 3–4 Jahren fand es Dr. Zermelo auf die Mitteilung meiner Beispiele hin.

Dem in dieser Postkarte gegebenen Hinweis auf von Hilbert selbst gefundene Paradoxien werden wir im folgende Kapitel nachgehen.[9] Wie schon gegenüber Cantor, macht er hier sein Problem mit der herkömmlichen Auffassung von Menge bzw. „Begriff" deutlich. Darüberhinaus benannte er aber auch eine Lösungsidee: Die Erkenntnis der Widerspruchsfreiheit für die zugrundeliegenden Axiomensysteme. Im folgenden Jahr hat er dies in seinem Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Heidelberg zum ersten Mal ausgeführt. Dabei geht er auch explizit auf das fehlende Kriteriums zur Unterscheidung von Cantors konsistenten und inkonsistenten Mengen ein:[10]

Zitat 4. [Hil05c] (zitiert in [Can91, S. 436])

> G. Cantor hat den genannten Widerspruch [den des Begriffs der Gesamtheit aller Dinge] empfunden und diesem Empfinden dadurch Ausdruck verliehen, daß er „konsistente" und „nichtkonsistente" Mengen unterscheidet. Indem er aber meiner Meinung nach für diese Unterscheidung kein scharfes Kriterium aufstellt, muß ich seine Auffassung über diesen Punkt als eine solche bezeichnen, die dem *subjektiven* Ermessen noch Spielraum läßt und daher keine objektive Sicherheit gewährt.

[9]Zur von Hilbert angesprochenen, unabhängigen Entdeckung der Russellschen Paradoxie durch Ernst Zermelo (1871–1953), siehe unten Anhang A.

[10]Cantor formuliert selbst einen entsprechenden Einwand in einem Brief an Dedekind vom 28.8.1899. Aber er weist ihn dadurch zurück, daß er die Konsistenz der Kardinalzahlen kurzerhand zu einem Axiom erklärt (*Axiom der erweiterten transfiniten Arithmetik*), [Can32, S. 447f] und [Can91, S. 412].

Der in Fortgang des Vortrags angedeutete Lösungsweg sollte später in das sogenannte *Hilbertsche Programm* münden.[11] Im Gegensatz zu Cantor war sich Hilbert also der Probleme der Paradoxien vollauf bewußt. Wie sich an Hand der folgenden Vorlesungsausarbeitungen belegen läßt, war dabei aber ein ganz wesentlicher Faktor, daß Hilbert selbst ein(ig)e Paradoxie(n) entdeckt hatte, ohne deren Lösung er die gesamte Mathematik gefährdet sah (siehe unten Zitate 6 und 7).

2. Die Hilbertsche Paradoxie

Die Postkarte an Frege ist wohl das bekannteste Zeugnis, in dem Hilbert von einer von ihm gefundenen Paradoxie spricht. Ein weiterer Hinweis findet sich in der Biographie Hilberts, die Otto Blumenthal (1876–1944) für die Gesammelten Abhandlungen geschrieben hat.[12]

Zitat 5. [Blu35, S. 421f]

> Die Lage war aber kritisch. Die Paradoxien der Mengenlehre zeigten in erschreckender Weise, daß gewisse Operationen mit dem Unendlichen, die jedermann für zulässig hielt, zu zweifellosen Widersprüchen führten. Hilbert überzeugte sich davon endgültig durch das von ihm aufgestellte, nirgends aus dem Gebiete der rein mathematischen Operationen heraustretende Beispiel der widerspruchsvollen Menge aller durch Vereinigung und Selbstbelegung entstehenden Mengen.

Eine genaue Darstellung dieser Paradoxie fand Volker Peckhaus in der unveröffentlichten Ausarbeitung von Hilberts Vorlesung *Logische Principien des mathematischen Denkens* von 1905, und es ist anzunehmen, daß Hilbert auch auf diese in der Postkarte an Frege verweist. Welche Rolle sie für Hilberts Interesse an den Grundlagen der Mathematik spielte, deutet er schon in der Postkarte an Frege an. Er spricht es aber auch deutlich in seinen Vorlesungen von 1905 und 1917 aus:

[11] In Bezug auf die unmittelbare Resonanz schreibt Blumenthal in Hilberts Lebensbeschreibung: „Der Vortrag blieb damals, nach allem, was ich weiß, völlig unverstanden, [...].“ [Blu35, S. 422]; siehe auch unten Zitate 46 und 47.

[12] Volker Peckhaus hat noch einen weiteren Hinweis auf „Hilberts Paradoxie“ in einem Brief von Ernst Hellinger an Leonard Nelson von 1907 ausfindig gemacht, siehe [PK02, Fußnote 8].

Zitat 6. [Hil05a, S. 204][13]

> Ich komme nun noch zu 2 Beispielen für Widersprüche, die viel überzeugender sind, der erste, der rein mathematischer Natur ist, scheint mir besonders bedeutsam; als ich ihn fand, glaubte ich zuerst, daß er der Mengentheorie unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg legte, an denen sie scheitern müßte; ich glaube jedoch jetzt sicher, daß wie stets bisher in der Wissenschaft, nach der Revision der Grundlagen alles Wesentliche erhalten bleiben wird.

Zitat 7. [Hil17, S. 134]

> Dieses [Hilberts] Paradoxon, mit dem wir uns nun befassen wollen, ist frei von allen Sophismen und Negationen[.] Ich war daher so konsterniert, als ich es fand, dass ich mir sagte: jetzt muss die ganze Art des Schliessens in der ganzen Mathematik durchgreifend reformiert werden.

Diese Paradoxie wurde auf der Basis der Vorlesung von 1905 erstmals in [PK02] veröffentlicht und analysiert. Wir geben sie hier in einer kurzen, der späteren Analyse angepaßten Zusammenfassung wieder.[14]

Hilbert startet mit den natürlichen Zahlen, deren Gesamtheit eine Menge bildet. Dann definiert er Mengenbildungsoperationen:

Definition 1.
(1) Additionsprincip*: Mehrere, auch unendlich viele, Mengen können zu einer Vereinigungsmenge zusammengefaßt werden (die jedes Element der Ausgangsmengen enthält).*
(2) Belegungsprincip*: Das System aller Funktionen einer Menge $\mathcal{M}$, die diese in sich selbst abbilden*[15]*, bildet eine Menge (bezeichnet mit $\mathcal{M}^{\mathcal{M}}$).*

Hilbert betrachtet nun alle Mengen, die aus den natürlichen Zahlen[16] „durch die beiden beliebig oft anzuwendenden Processe der Addition und Selbstbelegung entstehen; diese Mengen bilden wieder eine wohldefinierte Gesammtheit, nach dem Additionsprincip vereinige ich sie alle zu einer Summenmenge $\mathcal{U}$, die

[13] Der Vergleich („viel überzeugender") bezieht sich hier auf die Richardsche Paradoxie und den Lügner (siehe unten).

[14] Der Hilbertsche Originaltext von 1905 ist hier im Anhang B noch einmal abgedruckt, siehe auch [PK02].

[15] Die Abbildungen müssen nicht surjektiv sein, wie sich aus einem Beispiel Hilberts ergibt.

[16] Sogar die natürlichen Zahlen lassen sich, nach Hilbert, bereits aus den endlichen Mengen mit Hilfe des Additionsprincips gewinnen.

wohldefiniert ist. Bilde ich nun die Menge $\mathcal{F} = \mathcal{U}^{\mathcal{U}}$ der Selbstbelegungen von $\mathcal{U}$, so entsteht diese auch aus der ursprünglichen Zahlenreihe lediglich durch die beiden Processe der Addition und Selbstbelegung“. Formal:

Definition 2. (1) *$\mathcal{U}$ ist die Vereinigungsmenge aller mittels Definition 1 gebildeten Mengen.*
(2) *$\mathcal{F}$ ist die durch das Belegungsprinzip gebildete Menge $\mathcal{U}^{\mathcal{U}}$.*

Da die Menge $\mathcal{F}$ nur durch Addition und Selbstbelegung gebildete wurde, „muß [sie] daher ein Teil von $\mathcal{U}$ sein“, in moderner Notation: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Damit folgt, daß es eine surjektive Funktion von $\mathcal{U}$ nach $\mathcal{F}$ gibt. Auf eine derartige Funktion wendet Hilbert nun das Cantorsche Diagonalverfahren an, um eine Funktion von $\mathcal{U}$ nach $\mathcal{U}$ zu definieren, die nicht zu $\mathcal{F}$ gehören kann. Da $\mathcal{F}$ aber nach Definition *alle* Funktionen von $\mathcal{U}$ nach $\mathcal{U}$ enthält, ergibt sich ein **Widerspruch**.

Diese Paradoxie hat große Ähnlichkeit mit *Cantors Paradoxie* in der Fassung der *Menge aller Mengen*. Die Existenz dieser Menge führt bei der Betrachtung ihrer Potenzmenge zu einem Widerspruch mit Cantors Theorem, das bekanntlich besagt, daß die Potenzmenge einer Menge M größere Mächtigkeit besitzt als M selbst (siehe z.B. [Thi95]). Hilbert schreibt auch am Ende der Darstellung seines Widerspruchs:

Zitat 8. [Hil05a, S. 209]

> Wir könnten ihn auch dahin formulieren, daß gemäß der letzten Betrachtung die Menge $\mathcal{U}^{\mathcal{U}}$ stets größer [hinzugefügt: von grösserer Mächtigkeit] als $\mathcal{U}$ ist, nach der ersten aber in $\mathcal{U}$ enthalten.

Dennoch muß man den Unterschied bei der Konstruktion der Allmenge betrachten. Während sie bei (der üblichen Darstellung von) Cantors Paradoxie direkt durch Komprehension gebildet wird, betont Hilbert beständig, daß seine Paradoxie einen *rein mathematischen* Charakter hat. Dieser wird dadurch begründet, daß man die verwendeten Operationen wie „in der Mathematik und Logik sonst“ (siehe Zitat 14) anwendet. Dies kommt auch in der abschließenden Bemerkung zu seiner Paradoxie in der Vorlesungsausarbeitung von 1905 zum Ausdruck:

Zitat 9. [Hil05a, S. 209f]

> Dieser Widerspruch ist noch keineswegs geklärt; es ist wohl zu sehen, daß er jedenfalls darauf beruhen muß, daß die Operationen

> des Zusammenfassens irgend welcher Mengen, Dinge zu neuen Mengen, Allheiten doch unerlaubt ist, obwohl es die traditionelle Logik doch stets gebraucht, und wir es in vorsichtigster Weise stets nur auf ganze Zahlen und daraus entstehenden Mengen, also auf rein mathematisches anwandten.

Wenn wir Hilberts Paradoxie aus moderner Perspektive betrachten, erweist sich das Additionsprinzip als eine *unbeschränkte* Vereinigung als zweifelhaft. In der Axiomatisierung der Mengenlehre von Zermelo wird dementsprechend beim Vereinigungsmengenaxiom vorausgesetzt, daß man eine *Menge* von Mengen besitzt, für die man die Vereinigung ausführt. Dagegen ist das Belegungsprinzip — das dem üblichen Potenzmengenaxiom entspricht — vergleichsweise unschuldig, da es nur auf bereits „konstruierte" Mengen angewendet wird.

Es ist interessant, daß Abraham (Adolf) Fraenkel (1891–1965) in einer populären Vorlesungreihe zur Mengenlehre die unbeschränkte Vereinigung als warnendes Beispiel für die Probleme der naiven Mengenlehre anführt. Auch wenn er im Zusammenhang mit den Paradoxien nur Russell nennt, liest sich seine Analyse wie eine Antwort auf Hilberts Paradoxie:

Zitat 10. [Fra27, S. 71]

> Will man [. . .] zu etwas allgemeineren Prozessen [der Mengenbildung] fortschreiten, so muß man [. . .] auch die Zusammenfassung der *Elemente verschiedener Mengen* anstreben. Einen Fingerzeig, wie dies zu erfolgen hat, liefert uns die Bildung der Vereinigungsmenge in der CANTORschen Mengenlehre, wo die sämtlichen Elemente beliebig vieler Mengen zu einer neuen Menge, der Vereinigungsmenge, vereinigt werden können [. . .]. Hinsichtlich der gefahrdrohenden Folgen eines unbekümmerten Gebrauchs des Begriffs 'beliebig viele' sind wir freilich, z. B. durch das RUSSELLsche Paradoxon, hinlänglich gewitzigt; wir gehen daher nicht wie früher von beliebig vielen Mengen aus, sondern setzen voraus, daß diese Mengen als die Elemente einer bereits als legitim erkannten Menge säuberlich gegeben sind.

Wir werden sehen, daß Hilbert eine Einschränkung des Additionsprinzips nicht als Lösung seiner Paradoxie in Betracht gezogen hat. 1920 stellt er Burali-Fortis Paradoxie *in Zermeloscher Fassung* dar und benutzt dabei die moderne Form des Vereinigungsmengenaxioms (siehe Zitat 40). Für seine eigene Paradoxie benutzt er aber weiterhin das unbeschränkte Additionsprinzip.

Kanamori hat die Hilbertsche Paradoxie in folgende moderne Form gebracht:

Zitat 11. [Kan04, S. 490]

> There is no set S satisfying (a) if $X \in S$, then its power set $\mathcal{P}(X) \in S$, and (b) if $T \subseteq S$, then its union $\bigcup T \in S$. Suppose that there were such an S. Then $\mathcal{P}(\bigcup S) \in S$ by (b) and then (a). But then, $\mathcal{P}(\bigcup S) \subseteq \bigcup S$, which is a contradiction!

Im Hinblick auf mögliche direkte Auswirkungen auf die spätere Entwicklungen der Mengenlehre verweist Kanamori in einer folgenden Fußnote auf Verbindungen zu Zermelos Arbeiten und darauf, daß wir in Hilberts Darstellung bereits die kumulative Hierarchie erkennen können:

Zitat 12. [Kan04, Fußnote 11, S. 491]

> A thin thread of connection runs from the operations in (the presented version of) Hilbert's Paradox through Zermelo's [[Zer08]] generative axioms like Power Set and Union ([...]) and on to Zermelo's [[Zer30]] conditions (I) and (II) for normal domains ([...]). (a) and (b) for *sets* T are in fact the closure conditions for the cumulative hierarchy picture of the universe of sets with the Axiom of Foundation ([...]); it is just that one cannot take the union of S itself as then it would be the entire universe.

3. Die Paradoxien in Hilberts Vorlesungen 1905–1920/28

Wir wollen nun die einzelnen Vorlesungen, in denen Hilbert seine und andere mengentheoretischen Paradoxien behandelt hat, näher vorstellen. Dabei interessiert uns insbesondere, wie sich seine Einschätzung der Problematik über die Jahre von 1905 bis 1920 entwickelt. Wir werden hier nur die vier oben genannten Vorlesungen genauer betrachten, sowie das (auf anderen Vorlesungen aus den Jahren 1917–22 beruhende) Buch mit Ackermann von 1928. Hilbert hat noch eine ganze Reihe weiterer Vorlesungen zu Grundlagenthemen gehalten. Diese enthalten aber entweder keine eigentliche Diskussionen der Paradoxien, oder, wie im Fall der Vorlesung *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik* von 1910 ([Hil10, S. 157–163 zu Paradoxien] wiederholen nur die Darstellung aus früheren Vorlesungen.[17] Eine Liste mit Vorlesungen zur Logik und den Grundlagen der Mathematik wurde zuerst von Abrusci veröffentlicht, [Abr89].

[17] Zu dieser Vorlesung siehe auch [Sie99] und [Moo02]. Moore schreibt in Bezug auf diese Vorlesung, daß „[t]he material he gave there was merely a more elementary version of material from his 1905 course“ [Moo02, S. 50f].

Im Rahmen der Edition der (bisher) unveröffentlichten Ausarbeitungen von Hilberts Vorlesungen zu den Grundlagen der Mathematik und Physik[18] ist im Anhang des ersten Bandes eine vollständige Liste der Hilbertschen Vorlesungen erschienen, mit Referenzen zu allen aufgefundenen Mitschriften.

3.1.*Logische Principien des mathematischen Denkens* (1905). Im Sommersemester 1905 hat Hilbert in Göttingen eine Vorlesung unter dem Titel *Logische Principien des mathematischen Denkens* angeboten. Sie bietet — zumindest nach den in Göttingen vorhandenen Vorlesungsausarbeitungen — die erste systematische Darstellung von Paradoxien durch Hilbert. Von dieser Vorlesung gibt es eine offizielle Ausarbeitung in der Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen, die von Ernst Hellinger (1883–1950) angefertigt wurde, [Hil05a]. Diese wurde offensichtlich von Hilbert auch für spätere Vorlesungen benutzt und mit Anmerkungen versehen (siehe unten, S. 20).[19]

Die Vorlesung gliedert sich in zwei Teile, wobei der zweite, *B. Die logischen Grundlagen*, mit dem Kapitel *Paradoxa der Mengenlehre* beginnt [Hil05a, S. 191–214]. Dieses Kapitel läßt sich einteilen in

- Eine Einleitung mit historischen und philosophischen Erwägungen;
- Cantors Diagonalverfahren (als Beispiel „eines mengentheoretischen Beweises, in dem man die üblichen logischen Prozesse skrupellos anwendet“ [Hil05a, S. 198]).
- Die Diskussion dreier Widersprüche: der heute als Richardsche Paradoxie bekannte Widerspruch (dargestellt im Zusammenhang mit dem „Lügner“); sein eigenes, „Hilberts“ Paradoxon; die Russell-Zermelosche Paradoxie.
- Ein Versuch, einen gemeinsamen formalen Grund dieser Widersprüche auszumachen.

[18]In dieser Reihe ist bisher nur der erste Band zu Hilberts Vorlesungen über die Grundlagen der Geometrie erschienen [HM04].

[19]Daneben gibt es im Nachlaß Hilberts in der Universitätsbibliothek Göttingen noch eine weitere Ausarbeitung von Max Born (1882-1970) [Hil05b]. Born hat die Ausarbeitung dem Physiker Friedrich Hund (1896–1997) zu einem runden Geburtstag geschenkt, und dieser gab sie später an die Universitätsbibliothek in Göttingen weiter. Diese Ausarbeitung ist insofern interessant, als sie belegt, daß die Änderungen Hilberts in der offiziellen Ausarbeitung aus späterer Zeit stammen müssen.

In der Liste von Hilberts Vorlesungen in [HM04] findet sich auch noch ein Hinweis auf Notizen und eine unvollständige Ausarbeitung dieser Vorlesung von Otto Birck, die sich im Universitätsarchiv der Universität Bonn befindet.

In der Einleitung macht Hilbert deutlich, daß die Lösung der Paradoxien noch aussteht, aber auch, daß er sich persönlich dieser Sache annehmen will:

Zitat 13. [Hil05a, S. 191]

> Ich kann hier vorläufig nur Ideen und Andeutungen bringen, eine nähere Ausführung und Durchbildung dieser sehr schwierigen, bisher noch nie in Angriff genommenen Dinge behalte ich mir für einen späteren Zeitpunkt vor.

Die Situation der Mengenlehre vergleicht er mit der Situation, als die unendlichen Summen in der Mathematik aufkamen. Dabei macht er die Komprehension als zentrales Problem aus, allerdings ohne weitere Ausführungen dazu:[20]

Zitat 14. [Hil05a, S. 195]

> Es ist das ungefähr dasselbe, wie wenn man in der Theorie der unendlichen Reihen zuerst ohne weiteres das von endlichen Summen her geläufige und für ganz harmlos und selbstverständlich gehaltene commutative Gesetz anwandte, was für die bedingt convergenten Reihen gar bald zu Widersprüchen führte. Genau so kommt man in der Mengenlehre durch rein logische Operationen, wie man sie in der Mathematik und Logik sonst unbedenklich anwendet (es handelt sich hier besonders um das Zusammenfassen vieler Begriffe zu einem Gemeinbegriff), zu unlösbaren Widersprüchen, die sich mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht klären ließen;

Die Darstellung der Widersprüche. Nach der Präsentation des Cantorschen Diagonalverfahrens beginnt Hilbert mit Darlegung der Widersprüche. Dabei erreicht er die Richardsche Paradoxie nur über einen „Umweg“:

Zitat 15. [Hil05a, S. 198ff]

> Ich will nun angeben, wie man gegen den bewiesenen Satz einen Widerspruch konstruieren kann. Irgend eine Irrationalzahl kann nur dann als vollständig gegeben betrachtet werden, wenn man ein wohlbestimmtes Gesetz hat, nachdem man die Ziffern irgend einer Darstellung von ihr (etwa als Dualbruch) berechnen kann; dabei kann man zunächst an einfache Algorithmen denken, wie

[20] Die Klammern um „es handelt sich ... Gemeinbegriff“ sind wahrscheinlich erst später eingefügt worden.

> z. B. bei der Wurzelberechnung, an Reihen für die Zahl oder an irgend wie höchst komplizierte Gesetze, die nur jede Stelle gewiß eindeutig festlegen müssen. [...] Ohne aber weiter näher auf das einzugehen, was ein zulässiges Gesetz charakterisiert, können wir jedenfalls sagen, daß sich jedes Gesetz mit einer endlichen Anzahl von Worten in einer bestimmten Sprache ausdrücken lassen muß, mögen auch noch so viele Worte bei großer Kompliciertheit dazu nötig sein. Nehmen wir als Grundlage etwa die deutsche Sprache, die wir uns in einer zum Gebrauch geeigneten und hinreichenden Weise mit einer endlichen Anzahl von Worten eindeutig festgelegt denken. Wir versuchen nun mit 1 Worte eine Irrationalzahl zu definieren und schreiben, wenn wir welche erhalten, sie der Größe nach hin; wir können jedenfalls nur endlich viele erhalten, da die Sprach nur endlich viele Worte hat. Nun bilden wir alle Kombinationen von 2, 3 ... Worten, sehen jedesmal zu, welche der entstehenden Wortkomplexe eine Irrationalzahl definieren, und schreiben diese dann der Reihe nach, für jede Wortzahl des Gesetzes der Größe nach geordnet, hin; kommen wir auf eine Irrationalzahl, die schon durch ein früheres Gesetz definiert war, so lassen wir sie einfach fort. Da es für jede Wortzahl nur endlich viele Wortkomplexe überhaupt und daher auch nur endlich viele Irrationalzahlen gibt, so bekommen wir so eine abzählbare Reihe vom Typus 1, 2, 3 ..., in der alle Irrationalzahlen enthalten sind, und jede an einer wohlbestimmten Stelle steht. Das aber widerspricht dem oben bewiesenen Cantorschen Satz von der Nichtabzählbarkeit des Zahlencontinuums.

Aus heutiger Sicht betrachten wir diese Argumentation nicht mehr als Widerspruch, sondern benutzen sie — im festen Vertrauen auf Cantors Diagonalverfahren[21] — als *reductio ad absurdum*-Argument dafür, daß es Irrationalzahlen gibt, die sich nicht beschreiben (oder berechnen) lassen. König hat in einer analogen Argumentation auch genau diese Konsequenz gezogen, siehe [Kön05a, S. 157].[22]

Im weiteren Verlauf gibt Hilbert dann aber die Richardsche Paradoxie in ihrer heute bekannten Form an:

[21] Wilfrid Hodges geht in [Hod98] der interessanten Frage nach, warum und wie mathematische Amateure immer wieder versuchen, das Diagonalverfahren zu widerlegen.

[22] Vergleiche auch die Diskussion zu Richards Paradoxie in Anhang A.

Zitat 16. [Hil05a, S. 201f][23]

> Dieser Widerspruch läßt sich (aufklären, aber ich will das vorläufig nicht tun, sondern ihn nur) auf einen einfacheren wohlbekannten reducieren. Um zu sehen, wo der Widerspruch des näheren steckt, müssen wir die beiden Verfahren, die zu entgegengesetzten Resultaten führten, vergleichen. Wir haben uns hier durch diese Betrachtung über die Gesetze eine bestimmte abzählbare Reihe $a_1 a_2 a_3 \ldots.$ aller reellen Zahlen gebildet, wenden wir auf sie das Cantorsche Diagonalverfahren an, so erhalten wir eine bestimmte weitere Zahl a. Diese [Zahl] a ist aber auch — im vorstehenden — durch eine endliche Zahl von Worten definiert;

Im Anschluß stellt Hilbert diese Paradoxie mit dem „Lügner“ in Zusammenhang, wobei er ohne weitere Erklärung ein *widerspruchsvolles Gesetz* als Grund ausmacht.

Zitat 17. [Hil05a, S. 202f]

> Hier haben wir also den Kern des Widerspruches, wir haben durch diese Betrachtungen eben schließlich ein in sich widerspruchsvolles Gesetz gefunden. Es wäre genau dasselbe, wie wenn man auf einen Zettel unter eine Reihe von Sätzen schrieb: „Alles was auf diesem Zettel steht, ist falsch“, oder wie wenn man die Regel gäbe: „Tue immer das andere, als du willst.“ Dieser Widerspruch ist altbekannt und viel discutiert, am meisten in dem sophistischen Schulbeispiel von dem Kreter, der sagte, alle Kreter lügen, und daher gleichzeitig log und die Wahrheit sprach.

Zum Abschluß des Abschnitts wiederholt Hilbert noch einmal, daß er im Begriff des *Gesetzes* das Problem sieht:

Zitat 18. [Hil05a, S. 203]

> Geklärt ist der Widerspruch bisher aber noch keineswegs, es ist dazu durchaus eine viel genauere Feststellung des Begriffes „Gesetz“ und „Eindeutigkeit des Gesetzes“ nötig, als man das bisher hat.

[23] Die Klammern um „aufklären ... nur“ sind wahrscheinlich erst später eingefügt worden; leider haben wir keinen Hinweis auf die genannte „Aufklärung“.

Auf der Seite findet sich noch eine Randbemerkung von Hilberts Hand, die auf Grund des Bezugs zu Poincaré wohl nicht vor 1909 hinzugefügt worden sein kann. Poincaré hat in einem Vortrag von 1909 in Göttingen die folgende Lösung vorgeschlagen:

Zitat 19. [Poi10, S. 46]

> Wie kommen wir aus diesem Dilemma heraus? Fragen wir einmal nach der Bedeutung des Wortes „definierbar". Wir nehmen die Tafel aller endlichen Sätze und streichen daraus alle diejenigen, die keinen Punkt definieren. Die Übrigbleibenden ordnen wir den ganzen Zahlen zu. Wenn wir jetzt die Durchmusterung der Tafel von neuem vornehmen, so wird es sich im allgemeinen zeigen, daß wir jetzt einige Sätze stehen lassen müssen, die wir vorher gestrichen haben. Denn die Sätze, in welchen man von dem Zuordnungsgesetz selbst sprach, hatten früher keine Bedeutung, da die Punkte den ganzen Zahlen noch nicht zugeordnet waren[.] Diese Sätze haben jetzt eine Bedeutung, und müssen in unserer Tafel bleiben. Würden wir jetzt ein neues Zuordnungsgesetz aufstellen, so würde sich dieselbe Schwierigkeit wiederholen und so ad infinitum. Hierin liegt aber die Lösung des scheinbaren Widerspruchs zwischen Cantor und Richard.

In seiner Randnotiz lehnt Hilbert diese Lösung mit folgendem Argument ab:

Zitat 20. [Hil05a, S. 203 (Randnotiz nach 1909)][24]

> Das Poincarésche Verfahren, wonach er die Tafeln wi[e]derholt durchmustert[,] veranschaulicht zwar klar die Schwierigkeiten, enthält aber selbst einen Widerspruch. Denn die Vorschrift, erst einmal zu durchmustern und dann mit Rücksicht auf die so gewonnenen Erweiterungen noch einmal, steht doch von vorne herein auf einer Tafel und hat doch schon bei der ersten Durchmusterung einen Sinn.

Schließlich finden wir neben der Überleitung von der Richardschen Paradoxie zum Lügner auch noch die *Paradoxie von Berry*[25] als Randnotiz:

[24] Auf der vorhergehenden Seite hat Hilbert (möglicherweise zu einem anderen Zeitpunkt) die folgende Randnotiz gemacht: „Bei einer Interpretation hatte der Wortlaut einen Sinn, bei der anderen nicht." [Hil05a, S. 202]

[25] Hilbert nennt Berry nicht, siehe dazu Anhang A.

Zitat 21. [Hil05a, S. 202]

> Die kleinste ganze Zahl, die mit 100 Worten nicht definierbar ist [in kleiner Schrift eingefügt: ein sich selbst widersprechender Begriff, da ja diese Zahl dann durch diese Worte, deren Zahl < 100 ist definiert wäre!] nicht eindeutig entscheidbar, ob eine Reihe von Worte Sinn hat oder nicht. Willkür der [unleserliches Wort]: Subjektiv.

In exakt dieser Form („mit 100 Worten") ist Berrys Paradoxie — als „von Russell aufgestellte[r] Begriff" — von Schoenflies 1911 mit Verweis auf Poincaré dargestellt [Sch11, S. 235]. Es liegt nahe, daß Hilbert sie aus dieser Quelle übernommen hat.[26]

1905 hat Hilbert die Vorlesung aber nach dem Lügner (siehe Zitat 17) mit der im Zitat 6 angegebenen Überleitung fortgesetzt und stellt als nächstes seine eigenen Paradoxie dar, die wir bereits oben in Abschnitt 2 diskutiert haben. Davon ausgehende leitet er wie folgt zur Russell-Zermeloschen Paradoxie über:

Zitat 22. [Hil05a, S. 210]

> Als drittes Beispiel dieser Widersprüche stelle ich neben diesen meinen rein mathematischen noch einen rein logischen, den Dr. Zermelo aus jenem herausgezogen hat, [...]

Ausgehend von der Menge $\mathcal{N}$ aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, leitet Hilbert den Widerspruch mit der üblichen Fallunterscheidung, ob $\mathcal{N}$ selbst zu $\mathcal{N}$ gehört oder nicht, her.

Der Hinweis auf die Entstehungsgeschichte steht mit der Fußnote auf der Postkarte an Frege in Einklang (siehe Zitat 3). Leider gibt es keine Quellen, die darlegen, *wie* Zermelo diese Paradoxie aus der Hilbertschen „herausgezogen" hat. Für Russell ist es detailliert belegt, wie er die Paradoxie aus der Cantor-Paradoxie gewonnen hat, siehe [GG78]. Auf Grund der Parallele zwischen Hilberts und Cantors Paradoxie ist es durchaus möglich, daß Zermelo die Paradoxie auf ähnliche Weise gewonnen hat.

Der formale Grund der Widersprüche. Das Kapitel über Paradoxien in der Vorlesung von 1905 endet mit einer interessanten Überlegung zum formalen Grund der Widersprüche. Sie ist von allgemeinerem Interesse, da sie eine sehr

[26] Die kompliziertere Darstellung dieser Paradoxie in der Vorlesung von 1914/15 (siehe Zitat 24) könnte als Indiz gewertet werden, daß er Schoenflies' Artikel erst später zu Rate gezogen hat, d.h. daß die Randnotiz erst nach 1914 geschrieben wurde.

frühe Darstellung formaler *Selbstanwendung* für *Funktionen* enthält.[27] In der Debatte um die Lösung der Paradoxien hat sie aber keine weitergehende Rolle gespielt.

Zitat 23. [Hil05a, S. 213f]

> Es wird nun noch nützlich sein sich klar zu machen, worauf formal jene Widersprüche beruhen. Man denke sich ein Ding x, das alle Dinge durchläuft. Wir definieren nun eine gewisse Funktion, das ist wieder ein Ding f, und der „Wert dieser Funktion für das Argument x“ ist die Combination der beiden Dinge $f\,x$. Je nachdem nun die Combination $x\,x$ von x mit sich selbst 0 ist oder nicht, möge $f\,x$ 1 sein oder 0:
>
> $$\begin{aligned} f\,x = 0 \quad &, \quad \text{wenn } x\,x \neq 0 \\ f\,x = 1 \quad &, \quad \text{wenn } x\,x = 0; \end{aligned}$$
>
> dabei sind 0, 1 2 bestimmte, von einander verschiedene Dinge. Nun kann ja x alle Dinge durchlaufen; setzen wir also z.B. $f = x$, so haben wir:
>
> $$\begin{aligned} f\,f = 0 \quad &, \quad \text{wenn } f\,f \neq 0 \\ f\,f = 1 \quad &, \quad \text{wenn } f\,f = 0; \end{aligned}$$
>
> das sind 2 Widersprüche und unsere Definition von f ist also formal widerspruchsvoll und daher unzulässig.

Das Konzept der Selbstanwendung tritt 15 Jahre später in der Logik an prominenter Stelle auf, nämlich in der Arbeit *Bausteine der Mathematischen Logik* [Sch24][28] von Moses Schönfinkel (1889–1942?). Darauf aufbauend hat Haskell Curry (1900–1982) die *kombinatorische Logik* entwickelt (und über dieses Thema 1929 bei Hilbert promoviert), siehe [CF74, CHS72]. Sie bildet heute einen eigenen Zweig der mathematischen Logik und spielt eine wichtige Rolle in den Grundlagen der Informatik. Selbstverständlich gibt das Zitat keinen Anlaß anzunehmen, daß Hilbert diese Bedeutung antizipiert habe; im Gegenteil, Hilbert hat diesen Abschnitt in Hellingers Ausarbeitung [Hil05a] eingeklammert,

[27] Für Mengen entspricht die Selbstanwendung dem Selbstenthaltensein, d.h. daß eine Menge als Element ihrer selbst betrachtet wird. Die Frage nach dem (Nicht-)Selbstenthaltensein liegt offensichtlich der Russell-Zermeloschen Paradoxie zugrunde.

[28] Die Veröffentlichung von 1924 geht auf einen Vortrag am 7. Dez. 1920 vor der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen zurück, siehe [Sch24, Fußnote 1, S. 305].

weshalb man annehmen kann, daß er ihn in späteren Vorlesungen weggelassen hat[29]. Es ist aber bemerkenswert, daß das Argument seiner Struktur nach den modernen Unentscheidbarkeitsbeweisen in der Rekursionstheorie gleicht. Leider führt Hilbert nicht genauer aus, warum *jene Widersprüche* auf der im Zitat angegebenen, unzulässigen Funktionsdefinition *formal beruhen*. Aus heutiger Perspektive kann man der Analyse wohl nur insoweit zustimmen, als die angegebenen Paradoxien alle eine Form von Diagonalisierung beinhalten, die auch in der hier vorgestellten Selbstanwendung zur Anwendung kommt. Eine umfassende (sowohl historische, wie mathematische) Analyse des Zusammenhangs von Paradoxien und Selbstanwendung findet sich in [Can0x].

3.2. *Probleme und Prinzipien der Mathematik* (1914/15). Im Wintersemester 1914/15 hat Hilbert eine Vorlesung über Probleme und Prinzipien der Mathematik angeboten, in der er die Diskussion der Paradoxien wieder aufgreift. Von dieser Vorlesung gibt es keine separate Ausarbeitung, aber handschriftliche Notizen in Hilberts Nachlaß [Hil15]. Diese, oft nur stichwortartigen, Aufzeichnungen zeigen unter anderem, wie Hilbert mit kurzen Hinweisen auf frühere Ausarbeitungen zurückgriff. So insbesondere in Bezug auf die Paradoxien, wo er schreibt „Kollegheft Logische Principien 1905 S. 191-214." Das ist genau das Kapitel über Paradoxa der Mengenlehre, das wir im vorhergehenden Abschnitt besprochen haben[30]. Unmittelbar vor dieser Referenz auf die Vorlesung von 1905 führt Hilbert aber als erste Beispiele den *Lügner* und die Paradoxie von Berry ein:

Zitat 24. [Hil15]

> Ich will nur die logischen[„/matm." nachträglich eingefügt] Paradoxien behandeln, die am fruchtbarsten sind[?] [unleserliches Wort] folgenden, typischen Beispielen:
>
> 1. Dieser Satz, [„Diese Behauptung" oberhalb des Satzes eingefügt] den ich eben ausspreche, ist unwahr.
>
> Lügende Kreter: Wenn er wahr ist, ist er unwahr und wenn er unwahr ist, ist er wahr.

[29]Der Absatz findet sich vollständig in Borns Ausarbeitung [Hil05b].

[30]Es schließt auch den Abschnitt über den formalen Grund der Paradoxien mit ein, der auf Seite 213 beginnt. Aber es ist natürlich nicht auszuschließen, daß Hilbert den Absatz in dieser Vorlesung nicht vorgetragen, sondern gerade bei der genaueren Vorbereitung in der Ausarbeitung von 1905 gestrichen hat.

> 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10 11 12 13 14. 15
> 2. Die kleinste ganze Zahl, die nicht mit weniger als sechs und
> 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
> zwanzig Silben definirt werden kann.
>
> – – – kann doch, wie die Auszählung zeigt mit 25 Silben ausgedrückt werden.

Das zweite Beispiel wurde mehrfach (allerdings ohne inhaltliche Veränderungen) überarbeitet, bevor die Endfassung mit 25 Silben herauskam.

Nach dem Verweis auf das Kollegheft von 1905 gibt Hilbert eine ausführlichere Diskussion der Ursachen der Paradoxien. Dabei wird zuerst der Begriff des *Definirtsein* thematisiert, doch dann kommt Hilbert zum Ergebnis, daß die *Allquantifikation* das problematische Konzept ist:

Zitat 25. [Hil15][31]

> Wie kann ich mich retten? Stand des Wissens Stufentheorie Poincare S. 199 Rüssel.[sic!] [Das Wort „unbefriedigend“ ist mehrfach durchgestrichen.] Empfindung, dass an der Stufentheorie etwas wahres ist; aber sie muss noch sehr vertieft werden. Und da ist es vor Allem nötig, zu sehen ob nicht, wenn man den Begriff der Silbenzahl verbietet man alle Paradoxien abschneidet[1]. Das ist leider nicht der Fall. Zermelo's Paradoxon S. 210.[2] Standpunkt von Dedekind S. 11. Frege S. 213. Cantor bestes rein mathematisches Paradoxon S. 204–209. Das führt dann zu der Einsicht, dass es der Begriff alle[3] ist, bei dem wir schon stutzen müssen.
>
> [1]also Versuch durch Abschneiden der Philologie die Paradoxa zu beseitigen dies gelingt nicht, wie Zermelos Paradoxon zeigt.
>
> [2]Nun könnte man sagen, die benutzten Begriffe seien philosophischer Natur „Dinge“, [3 unleserliche Wörter] also Versuch durch Abschneiden der Philosophie die Paradoxe zu beseitigen, gelingt auch nicht, wie das math. Paradoxon zeigt.
>
> [3]Den Begriffe „alle“ könnten wir aber nicht ohne weiteres aufgeben, ohne Math. überhaupt abzuschneiden.

Später in der Vorlesung, nachdem die axiomatische Methode besprochen wurde, sagte Hilbert zusammenfassend: „aber [. . .] sind wir in unserem Problem, der Aufklärung der Paradoxien näher gekommen? Wir sahen im Begriff ‚alle‘ die Schwierigkeit.“ [Hil15].

[31]Die Seitenzahlen im Zitat beziehen sich offensichtlich auf die Ausarbeitung der Vorlesung von 1905. Nur für den ersten Verweis auf die Seite 199 läßt sich der Bezug nicht eindeutig erkennen (eventuell ist S. 203 gemeint, auf der sich die in Zitat 20 angegebene Randnotiz zu Poincaré befindet).

3.3. *Mengenlehre* (1917). In seiner Vorlesung über Mengenlehre im Sommersemester 1917 [Hil17] stellt Hilbert unter den folgenden Titeln die gleichen Paradoxien wie in der Vorlesung von 1905 dar:

(1) *Das Richardsche Paradoxon des endlichen Ausdrucks oder endlichen Darstellbarkeit*
(2) *Das Russel*[sic!]*-Zermelosche Paradoxon*
(3) *Eine rein mengentheoretisch-mathematische Paradoxie*

Die Darstellung der ersten Paradoxie folgt im Aufbau der Vorlesung von 1905, ist aber in Details spezifischer. Zudem wird der erste Teil des Arguments (die vermeintliche Abzählbarkeit der Irrationalzahlen) noch mit einem Verweis auf den Wohlordnungssatz verschärft.

Zitat 26. [Hil17, S. 127f]

> Wir hatten weiter oben bewiesen, dass die Irrationalzahlen nicht abzählbar sind. Nun können wir eine Irrationalzahl nur dann als gegeben ansehen, wenn wir die Dualbruchentwicklung dieser Zahl kennen oder doch berechnen können. [...], so muss uns <u>zu jeder Irrationalzahl ein Gesetz gegeben</u> sein, aus welchem man diese Ziffern berechnen kann. Eine Irrationalzahl ohne Gesetz ist undenkbar; [...] Ja noch mehr, man kann direkt zeigen, dass die Annahme, es gebe Irrationalzahlen, die <u>nicht</u> durch ein Gesetz festgelegt sind, auf einen Widerspruch führt. Dazu müssen wir uns nur das Kontinuum auf irgend eine Weise wohlgeordnet denken. Dann bilden die nicht durch ein Gesetz definierbaren Irrationalzahlen eine wohlgeordnete Teilmenge desselben, die also ein erstes Element hat. Hiermit haben wir aber diese Irrationalzahl — entgegen unserer Voraussetzung — durch ein Gesetz festgelegt.

Auch hier können wir Hilbert heute nicht mehr folgen, da die Forderung, Irrationalzahlen müssen berechenbar sein — auf Grund des Widerspruchs zur Überabzählbarkeit — nicht zu halten ist. Ebenso ist die heute klar erfaßte Nichtkonstruktivität des Wohlordnungssatzes Grund dafür, daß er nicht zur Bildung eines „Gesetzes“ (im Sinne eines Algorithmus) herangezogen werden kann. Aber auch hier muß man darauf hinweisen, daß sich das heutige Verständnis dieser Nichtkonstruktivitität gerade aus den andernfalls auftretenden Widersprüchen herausgebildet hat.

Im Anschluß wiederholt Hilbert den Widerspruch, der sich schon aus der vermeintlichen endlichen Definierbarkeit jeder Irrationalzahl ergibt, und fügt an: „Hier haben wir es nun in der Tat mit einer noch nicht völlig aufgeklärten mengentheoretischen Paradoxie zu tun“ [Hil17, S. 129f]. Bei der folgenden Diskussion werden die Richardsche Paradoxie und der Lügner in etwas kürzerer Fassung als 1905 präsentiert. Neu ist, daß die Poincarésche Lösung diskutiert wird, welche die wechselnde Sinnhaftigkeit der Definitionen anprangert, so daß „also eine eindeutige Festlegung der Irrationalzahlen durch die menschliche Sprache überhaupt nicht möglich [ist]“ [Hil17, S. 131]. Hilbert ist damit nicht zufrieden, auch wenn er hier die Lösung nicht der Widersprüchlichkeit bezichtigt, wie in der Randnotiz zur Ausarbeitung von 1905 (siehe Zitat 20):

Zitat 27. [Hil17, S. 131]

> Mir scheint diese Erklärung nicht vollkommen befriedigend. Man wird zwar sagen können, dass unsere Sprache nicht eindeutig ist, [...]. Aber die eigentliche Quelle der Paradoxien muss doch in der ungenügenden Schärfe und Klarheit der uns gewohnten Logik und ihrer Begriffe liegen.

Wir werden unten bei der Behandlung der Paradoxien in den *Grundzügen der theoretischen Logik* sehen, wie die (mathematische) Logik eine gewisse Schärfe und Klarheit bringen kann. Hier zielt Hilbert aber noch in eine anderer Richtung, wenn er fortfährt:

Zitat 28. [Hil17, S. 131]

> Eine vollkommen befriedigende Erklärung hat man meiner Ansicht nach für das erwähnte Paradoxon erst dann gefunden, wenn es gelingt, alle möglichen mathematischen Definitionen und Operationen in überblickbarer Weise zu ordnen. Hat man erst eine Wohlordnung der mathematischen Gesetze, etwa nach ihrer Einfachheit — was das ist, muss man freilich noch definieren — so wird man auch zu einer wirklich ausführbaren Wohlordnung des Kontinuums kommen.

Dieses Zitat ist insofern interessant, als daraus hervorgeht, daß Hilbert 1917 noch auf eine „wirklich ausführbare Wohlordnung des Kontinuums“ hoffte, eine Hoffnung, die sich — wie wir heute wissen — nicht erfüllen läßt.

In der Analyse der Paradoxie ist Hilbert 1917 aber dennoch schon einen Schritt weiter als 1914/15, wenn er die *genetische Definition* ins Spiel bringt:

Zitat 29. [Hil17, S. 131f]

> Ueberhaupt muss der Begriff „Gesetz“ noch viel schärfer herausgearbeitet werden. Vorerst krankt dieser Begriff an einem Uebel, an dem alle diese allgemeinen Begriffe noch kranken, nämlich an seiner genetischen Definition. Man stellt zuerst Beispiele für Gesetze auf und sagt dann „und so weiter.“ Eine solche genetische Definition ist nur zulässig, wenn sie sich in eine richtige umwandeln lässt. Z.B. lässt sich die genetische Definition des Kreises: „ein Punkt bewegt sich so, dass er von einem festen Punkt immer denselben Abstand hat“ ersetzen durch „den geometrischen Ort der Punkte gleichen Abstandes von einem festen Punkt.“ Der Begriff des Gesetzes selbst muss eben näher untersucht und präzisiert werden im Sinne der axiomatischen Methode.

Bevor Hilbert auf die genetische Definition genauer eingeht, diskutiert er erst noch weitere Paradoxien. Zuerst, unmittelbar im Anschluß an das letzte Zitat, die Paradoxie von Berry:

Zitat 30. [Hil17, S. 132]

> Dann wird sich auch ein anderes Paradoxon aufklären lassen, das von diesem nicht wesentlich verschieden ist.
>
> Mit 10 oder weniger Wörtern der deutschen Sprache zu höchstens 20 Buchstaben lassen sich sicher nur endlich viele ganzen[sic!] Zahlen definieren. Also gibt es eine kleinste ganze nicht mit 10 Wörtern definierbare Zahl. Hiermit ist aber diese Zahl schon definiert und zwar durch nur 8 Wörter.

Anschließend wird das „Russel-Zermelosche Paradoxon“ vorgestellt, und Hilbert schließt die Darstellung wie folgt: „Meiner Meinung nach wird die Aufklärung dieser Paradoxie wieder darin liegen, dass eine genetische Definition, d.h. eine unerlaubte Anwendung des Wortes ’alle’ vorliegt in dem Begriff der Klasse ’aller’ Klassen.“ [Hil17, S. 134]. Zu seiner eigene Paradoxie leitet er nun über mit den Worten:

Zitat 31. [Hil17, S. 134]

> Man könnte zwar die Auflösung der [Russell-Zermeloschen] Paradoxie auch darin vermuten, dass man sagt, die ”Klasse aller Klassen” sei ein unmathematischer Begriff. Doch mit Unrecht; denn es gibt

> §4. Eine rein mengentheoretisch-mathematische Paradoxie, die der eben erwähnten analog ist, in welcher aber nur Begriffe und Operationen verwendet werden, mit denen man auch sonst in der Mathematik immer operiert und mit denen man sonst immer nur vernünftige Resultate enthält.

Die Präsentation seiner Paradoxie ist etwas knapper, aber inhaltlich gleichwertig mit der von 1905.[32] In der Analyse wird hier zuerst ausdrücklich auf die Notwendigkeit eines Kriteriums für die Zulässigkeit von Mengendefinitionen hingewiesen, die über Cantors Unterscheidung von konsistenten und inkonsistenten Mengen hinausgeht:

Zitat 32. [Hil17, S. 135]

> Bei der Bildung von $\mathcal{M}$ wurden lediglich zwei mathematische Prozesse benutzt, die man sonst als ebenso zulässig ansieht wie etwa die beiden Prozesse, durch die man die Zahlen der zweiten Zahlklasse erzeugen kann. Das eine Mal sollen also zwei mathematische Operationen erlaubt sein, weil sich kein Widerspruch ergibt; das andere Mal aber sollen zwei solche Prozesse unzulässig sein, weil eine Paradoxie folgt, und nur der Erfolg soll entscheiden, was verboten ist und was nicht. Das wäre genau der Steinersche Fehlschluss, wo derselbe Beweis einmal etwas Vernünftiges liefert und das andere Mal nicht. Ein solcher Standpunkt ist natürlich unhaltbar. Wenn wir einen mathematischen Beweis erst am Resultate auf seine Zulässigkeit prüfen können, so brauchen wir überhaupt keinen Beweis. Hier haben wir also ein tiefliegendes mathematisches und logisches Problem vor uns.

Im folgenden verweist Hilbert dann auf die gleichen Gründe wie bei der Russell-Zermeloschen Paradoxie:

Zitat 33. [Hil17, S. 135f]

> Der Fehlschluss kann hier nur an der genetischen Definition der Menge $\mathcal{M}$ liegen, als der Menge "aller" Mengen, die man durch wiederholte Addition und Selbstbelegung aus $\aleph_0$ und $\mathbf{a}$ erhält. Dieser Standpunkt, der Worte wie "alle" "jeder" oder "und so weiter" verpönt, ist ganz neu und ungewöhnlich. Früher galt es, als

[32] In der Ausarbeitung wurden (wohl bei einer späteren Gelegenheit) handschriftlich die Selbstbelegungen durch die Teilmengen ersetzt.

> Höhepunkt der Strenge, wenn man sagte: Ein Begriff ist definiert, wenn man von „jedem“ Ding sagen kann, ob es darunter fällt oder nicht. Wir müssen diesen Standpunkt daher jetzt aufs schärfste zurückweisen [...].

Direkt an die Paradoxien schließt Hilbert einen Absatz *Ueber die genetische Definition* an. Er beginnt mit der folgenden Festsetzung:

Zitat 34. [Hil17, S. 136]

> Mengen, die nur durch eine genetische Definition erklärt werden können, heissen <u>inkonsistente Mengen</u> und sind unzulässig.

In diesem Zitat muß man das Wörtchen „nur“ betonen. Hilbert läßt genetische Definitionen ausdrücklich zu, wenn die damit gebildeten Mengen auch auf anderem Wege erklärt werden können. Aber Hilbert ist sich der Problematik der Einschränkung, die er hier vornimmt, vollauf bewußt:

Zitat 35. [Hil17, S. 137]

> Wenn wir nun die Mathematik daraufhin durchmustern, wo genetische Definitionen vorkommen, so werden wir doch stutzig; denn ”und so weiter” ist die beliebteste Redensart der Mathematiker.

Wir werden hier nicht weiter das Verbot rein genetischer Definitionen erörtern. Es scheint auch, daß Hilbert es 1920 bereits wieder aufgegeben hat (siehe die Diskussion zu *genetischen* und *axiomatischen* Definitionen unten). Sieg weist aber in seiner Darstellung dieses Abschnittes in [Sie99, A4] darauf hin, daß die genetischen Definitionen sämtliche *imprädikativen* Definitionen einschließen (d.h. diejenigen, bei der eine Allquantifikation verwendet wird, deren Bereich die zu definierende Menge bereits mit einschließt). Hilbert bezieht sich nicht explizit auf den Begriff der Imprädikativität (der ihm durch Poincaré aber bereits bekannt sein mußte), und die Definition von genetischer Definition, die nur auf die Wörter „alle“, „jede“ und „und so weiter“ rekurriert, ist sicherlich allgemeiner. Wenn man sich auf die imprädikativen Definitionen beschränkt, könnte man Hilbert hier in die Nähe von Poincaré und dessen Forderung nach einer rein prädikativ aufgebauten Mathematik rücken. Hilbert drückt sich in diesem Absatz aber zu knapp aus, als daß sich eine solche Position tatsächlich belegen ließe. Interessant ist, daß seine (implizite) Forderung, die durch genetische Definitionen gegebenen Mengen immer auch noch durch andere Definitionsweisen zu rechtfertigen, heute (z.B. für imprädikative Definitionen) Teil der *reduktiven Beweistheorie* ist, die sich aus dem ursprünglichen Hilbertschen Programm heraus gebildet hat (siehe z.B. [Fef00]).

3.4.*Probleme der mathematischen Logik* (1920). Die Vorlesung von 1920 (ausgearbeitet von M. Schönfinkel[33] und P. Bernays, [Hil20]) ist die letzte die eine Diskussion der mengentheoretischen Paradoxien bietet. In ihr behandelt Hilbert in §1 *[d]ie Richardsche Paradoxie.* Daran schließt sich §2 an: *Uebergang vom Cantorschen Diagonalverfahren zum Russellschen Paradoxon; mathematische Verschärfung der Paradoxie.* Schließlich, und neu im Vergleich zu den vorhergehenden Vorlesungen folgt: §3 *Das Paradoxon von Burali-Forti in Zermeloscher Fassung.*

Die Darstellung der Richardschen Paradoxie ist gegenüber 1917 weiter verkürzt worden, wobei auch der Absatz zur Wohlordnung des Kontinuums wieder weggelassen wurde. Am Ende wird Berrys Paradoxon in einer neuen Variante präsentiert:

Zitat 36. [Hil20, S. 5]

> Zu dieser Form der Paradoxie kommen wir durch die Betrachtung des folgenden Schriftsatzes:
>
> „Die Anzahl der Schriftsätze, die weniger als fünfhundert Zeichen enthalten, ist kleiner als sieben und zwanzig hoch fünfhundert. Es muss daher unter den Zahlen von Eins bis sieben und zwanzig hoch fünfhundert solche geben, die sich nicht durch einen Schriftsatz von weniger als fünfhundert Zeichen definieren lassen. Man nehme nun die kleinste unter diesen Zahlen.“

In der Analyse stellt Hilbert das Paradoxon als ein Problem der Sprache dar, das aber mit Hilfe der mathematischen Logik beseitigt werden kann:

Zitat 37. [Hil20, S. 5f]

> Diese Paradoxie ist sehr verblüffend. Es lassen sich aber dagegen gewisse Einwände erheben. Die Paradoxie kommt nämlich nur dann zustande, wenn wir annehmen, dass von jedem Schriftsatz eindeutig feststellbar ist, ob er eine Zahl definiert oder nicht.
>
> Diese Voraussetzung ist aber keineswegs unanfechtbar. Denn zu einer sprachlichen Mitteilung gehören nicht bloss die Schriftsätze, sondern diese sind bloss die Anregung zu einem psychologischen

[33] Auf der Titelseite ist fälschlich „N. Schönfinkel“ angegeben.

> Prozess. Wie dieser sich abspielt, hängt von der Situation und der Vorgeschichte ab (Kenntnis der deutschen Sprache, mathematische Kenntnisse, Fähigkeit der Auffassung abstrakter Sätze). In der Praxis ergänzt man die Unbestimmtheiten durch konkrete Hinweise, Betonung, Gestikulation, Zeichnungen, Modelle.
>
> Es liegt also in der sprachlichen Mitteilung eine wesentliche Unbestimmtheit vor.
>
> Diese müsste erst beseitigt werden, damit die Paradoxie eine strenge Fassung erhält. Die Verfolgung dieses Unternehmens würde uns weit hinein in das Gebiet der mathematischen Logik führen. Hier aber wollen wir zunächst dem Einwande von der Unbestimmtheit der sprachlichen Mitteilung dadurch ausweichen, dass wir die aus dem Cantorschen Diagonalverfahren entspringende Paradoxie in eine Fassung bringen, bei welcher von dem Begriffe des Schriftsatzes kein Gebrauch gemacht wird.

Wie die Beseitigung der „wesentlichen Unbestimmtheit“ vonstatten gehen kann, ist im Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* dargestellt, das wir im nächsten Abschnitt kurz betrachten werden. In der Vorlesung von 1920 weicht Hilbert dieser Problematik dadurch aus, daß er sich den anderen Paradoxien zuwendet. Dabei wird die Russell-Zermelosche Paradoxie diesmal mit einer ausführlicheren Herleitung aus dem „Cantorschen Satz“ eingeführt.

Mit einer analogen Überleitung wie 1917 fährt Hilbert dann mit „seiner“ Paradoxie unter Benutzung von Teilmengen statt Selbstbelegungen fort. Interessant ist nun die abschließende Analyse der Paradoxie. Sie gibt uns auch eine gute Zusammenfassung im Hinblick auf den Begriff der *Definition*. Danach kann man den Begriff der *genetischen Definition* durchaus mit dem modernen Begriff der *induktiven Definition* in Verbindung setzen (siehe z.B. [Mos74]).

Zitat 38. [Hil20, S. 11f]

> Diese Paradoxie ist sehr lehrreich in dem Sinne, dass sie uns in trefflicher Weise zeigt, wie man beim Umgehen mit den bisher als ganz streng in der Mathematik geltenden Ueberlegungen und Begriffen vorsichtig sein muss, besonders da, wo Ausdrücke wie „alle“, “und so weiter“, gebraucht werden. Allenfalls ist die zuletzt vorgeführte Paradoxie nicht stichhaltig. Wir können da folgenden Einwand machen:

> Es spielen in der Mathematik und Logik zwei Arten von Definitionen eine Rolle: nämlich: die genetische [eingefügt: besser: konstruktive], durch Erzeugung, und die axiomatische [eingefügt: besser „existentiale“], bei der man einen Gegenstand durch seine Eigenschaften charakterisiert. Man könnte sagen, dass hier die beiden Definitionsarten in unzulässiger Weise miteinander vermischt sind. Nämlich, wenn wir die Mengen genetisch [eingefügt: konstruktiv] definieren, dann bricht unser Verfahren nie ab; es werden immer neue Mengen geschaffen, ich gelange aber niemals zur Gesamtheit aller durch das Verfahren erzeugten Mengen. Allerdings ist diese Gesamtheit eine wohldefinierte Menge — (man betrachte eine Menge als wohldefiniert, wenn von jedem Dinge bestimmt ist [korrigiert statt: “man ... entscheiden kann”], ob es zur Menge gehört oder nicht); aber sie kommt nicht selbst durch den Erzeugungsprozess zustande.
>
> Andererseits, wenn wir die axiomatische [eingefügt: existentiale] Methode in reiner Form anwenden, dann können wir zwar eine Menge von Mengen definieren, welche erstens die Menge aller ganzen Zahlen als Element enthält, worin ferner zugleich mit jeder Menge auch die Menge ihrer Teilmengen als Element vorkommt und wo die Vereinigungsmenge von zugehörigen Menge wieder ein Element der Menge bildet. Aber die so bestimmte Menge braucht dann nicht selbst ein Element der Menge zu sein.
>
> Also: bei dem genetischen Verfahren [eingefügt: (auf dem konstruktiven Standpunkt)] gelangen wir überhaupt nicht zu der Gesamtheit aller (durch die beiden genannten Prozesse) erzeugbaren Mengen, bei dem axiomatischen Verfahren [eingefügt: (existentialer Standpunkt)] lässt sich nicht beweisen, dass sie selbst mit unter ihren Elementen auftritt.

Wenn wir mit dieser Unterscheidung von genetischen und axiomatischen Definitionen unsere Rekonstruktion der Hilbertschen Paradoxie in Abschnitt 2 betrachten, so läßt sich sagen, daß die Definition 1 eine genetische Definition darstellt, während die Definition 2.1 eine axiomatische ist, und nicht schon durch wiederholte Anwendung der Operationen von Definition 1 gewonnen werden kann. Aus heutiger Sicht wird man sicher diese axiomatische Definition in Zweifel ziehen; für Hilbert war aber gerade die axiomatische Definition die unschuldige, da sie auf der Basis des naiven Mengenbegriffs gerechtfertigt ist

(„man betrachte eine Menge als wohldefiniert, wenn von jedem Dinge bestimmt ist, ob es zur Menge gehört oder nicht“).

Hilbert gibt keine weitere Erläuterungen zu möglichen unzulässigen Vermischungen der beiden Definitionsweisen, sondern fährt mit einer Verschärfung fort, die sich nicht mehr mit der Vermischung erklären läßt.

Zitat 39. [Hil20, S. 12]

> Nun lässt sich aber die Idee dieser Paradoxie so verschärfen, dass man keinen Einwand mehr erheben kann. Wir kommen damit zu der Paradoxie von BURALI-FORTI, deren Ursprung noch auf CANTOR zurückgeht, und welche durch ZERMELO ihre volle Präzisierung erfahren hat.

Bei der Darstellung der Paradoxie legt Hilbert die folgenden Mengen und Mengenbildungsoperationen zugrunde: Die leere Menge („Nullmenge“, bezeichnet mit m_0), beliebige Einermengen, die Vereinigung zweier Mengen und schließlich die Vereinigung einer Menge von Mengen:

Zitat 40. [Hil20, S. 12]

> 4) Ist M eine Menge von Mengen, so bedeute S(M) die zugehörige Vereinigungsmenge, d.h. die Summe der zu M gehörigen Mengen oder, anders ausgedrückt: S(M) ist die Menge der Elemente von den Elementen von M.

Die hier gegebene Definition der (großen) Vereinigungsmenge unterscheidet sich von Hilberts Additionsprinzip gerade dadurch, daß man die Menge nur auf der Grundlage einer bereits gegebenen *Menge* von Mengen bilden kann. Diese Formulierung ist mit hoher Wahrscheinlichkeit auf Zermelo zurückzuführen. Wir werden aber sehen, daß diese „Vorsichtsmaßnahme“ für Hilberts weitere Argumentation nicht von Belang ist.

Zuerst wird aber basierend auf dieser Mengendefinition der Begriff der Ordinalzahl eingeführt.

Zitat 41. [Hil20, S. 12f][34]

> Definition: Eine Menge M von Mengen solle eine Ordnungszahl heissen, wenn sie folgende drei Bedingungen erfüllt:
> 1. m_0 ist Element von M.

[34]Diese Definition ist (später) handschriftlich umgearbeitet worden; diese Änderungen sind aber für das folgende Argument nicht von Bedeutung.

> 2. Ist eine Menge A Element von M, so ist die Menge A + (A), welche aus A durch Hinzufügung von A selbst als Element entsteht ([...]), entweder identisch mit M oder Element von M.
> 3. Ist T eine (echte oder unechte) Teilmenge von M, so ist S(T) entweder identisch mit M oder Element von M.

Anschließend diskutiert Hilbert einige Eigenschaften der Ordinalzahlen, insbesondere „3)) Eine Ordnungszahl enthält sich selbst nie als Element.“, aber auch den Satz, „dass die Menge M aller Strümpfe weder eine Ordnungszahl noch auch Element einer Ordnungszahl sein kann“ [Hil20, S. 14].

Die Paradoxie kommt nun wie folgt zustande:

Zitat 42. [Hil20, S. 15f]

> Es sei nämlich W die Menge, die aus allen Ordnungszahlen und noch aus m_0 besteht. Dann gilt der Satz: „Die Menge W ist eine Ordnungszahl.“
>
> Denn:
> 1. m_0 ist Element von W.
> 2. Ist A ein Element von W, so ist es auch A + (A). [. . .]
> 3. Ist T eine Teilmenge von W, so ist S(T) Element von W.
>
> [. . .] Die Bedingungen 1., 2., 3. sind also für W erfüllt. Demnach ist W eine Ordnungszahl und folglich auch Element von W, gemäss der Definition von W. Dies widerspricht aber dem Satz 3)), nach welchem eine Ordnungszahl sich nicht selbst als Element enthalten kann.

Im Gegensatz zu seiner eigenen Paradoxie hilft hier nach Hilbert auch die Unterscheidung von genetischer und axiomatischer Definition nicht weiter:

Zitat 43. [Hil20, S. 16]

> Gegen diese Paradoxie gilt keiner der früheren Einwände; sie ist vom Standpunkte der traditionellen Logik völlig stichhaltig.
>
> So sind wir von ganz harmlosen Anfängen ausgehend durch eine Kette von Paradoxien, die sich auf natürlichem Wege, gleichsam organisch aus einander entwickelten, schliesslich zu diesem letzten Paradoxon gelangt, welches wir als den Gipfelpunkt mathematischer Paradoxien bezeichnen können.

Warum gilt gegen diese Paradoxie keiner der früheren Einwände? Die Mengenbildungsoperationen scheinen denen der Hilbertschen Paradoxie gleichwertig zu sein. Zwar wird hier die Vereinigungsmenge „korrekt“ nur über eine bereits definierte Menge genommen. Dennoch bildet Hilbert anschließend „einfach“ die Menge aller Ordinalzahlen. Insofern ist sie eventuell sogar noch „schlechter“ gebildet als die „Menge aller Mengen“ $\mathcal{U}$ in der Hilbertschen Paradoxie, zu deren Bildung ja das Additionsprinzip herangezogen wurde.

Mit einer solchen Analyse verfehlt man aber Hilberts Punkt in der Argumentation. Bei der Diskussion seiner eigenen Paradoxie kommt er zu dem Ergebnis, daß sich bei einer axiomatischen Definition der Gesamtheit aller erzeugbaren Mengen nicht beweisen läßt, daß diese selbst unter ihren Elementen auftritt (siehe Zitat 38). Auch bei der Burali-Forti-Paradoxie ist die Menge aller Ordinalzahlen durch eine axiomatische Definition gegeben. In diesem Fall läßt sich jedoch, unabhängig von der Definitionsweise, allein auf Grund der Eigenschaften einer Ordinalzahl beweisen, daß sie ein Element ihrer selbst sein muß. Damit ist aber auch gezeigt, daß die vorgeschlagene Unterscheidung von genetischen und axiomatischen Definitionen nicht alle Paradoxien lösen kann.

In der Vorlesung folgt auf die Darstellung der Paradoxien der zweite Teil, *Die Revision der Grundlagen der Arithmetik*, in dem mögliche Lösungen des Paradoxienproblems diskutiert werden. Die Notwendigkeit einer Lösung illustriert Hilbert mit drastischen Worten:

Zitat 44. [Hil20, S. 16]

> Wo Widersprüche vorhanden sind, da ist etwas falsch, und es bedarf einer Korrektur. Ein Widerspruch ist wie ein Bazillus, der alles vergiftet, wie ein Funke im Pulverfass, der alles vernichtet. Insbesondere in der Mathematik, der wir doch die alte gerühmte absolute Sicherheit erhalten wollen, müssen Widersprüche ausgeschlossen werden. Es sind also Vorsichtsmassregeln bei Begriffsbildungen und Schlüssen nötig.

Die möglichen „Vorsichtsmassregeln“ werden in den vier Abschnitten unter den folgenden Titeln vorgestellt:

§4. Die Methode der extremen Verbote von Kronecker und Poincaré
§5. Zermelos axiomatische Begründung der Mengenlehre und Analysis
§6. Der Versuch einer Zurückführung der Mathematik auf die Logik; Stellungnahme von Russell und Weyl
§7. Die Hilbertschen Gedanken zum Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie

Es ist offensichtlich, daß Hilbert hierbei der letzten „Vorsichtsmassregel" den Vorzug gibt. Sie beinhaltet das sogenannten Hilbertsche Programm, mit dem die Widerspruchsfreiheit von Axiomensystems formal nachgewiesen werden sollte. Allerdings zeigte sich mit der Entdeckung der Unvollständigkeitssätze 1931 durch Kurt Gödel (1906–1978) [Göd31], daß es in seiner ursprünglichen Fassung nicht durchführbar ist. Einer genauere Analyse des Hilbertschen Programms müssen wir uns hier enthalten, da es weit über die Fragen der Paradoxien hinaus geht; zur geschichtlichen Entstehung des Programms sei aber auf Sieg [Sie99, Sie00] verwiesen.

3.5. *Grundzüge der theoretischen Logik* (mit Wilhelm Ackermann, 1928). Als letzte Quelle zu den Paradoxien wollen wir noch das Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* [HA28] heranziehen, das Hilbert 1928 zusammen mit Wilhelm Ackermann herausgegeben hat. Im Vorwort schreibt Hilbert, daß es aus den Vorlesungen

- Prinzipien der Mathematik, Wintersemester 1917/18
- Logikkalkül, Wintersemester 1920
- Grundlagen der Mathematik, Wintersemester 1921/22

hervorgegangen ist. Bei diesen Vorlesungen sei er von Bernays unterstützt und beraten worden, und dieser habe auch die Ausarbeitungen vorgenommen. Ackermann habe darauf aufbauend „die vorliegende Gliederung und definitive Darstellung des Gesamtstoffes durchgeführt".

Die Bedeutung dieses Buches in der Geschichte der mathematischen Logik kann nicht überschätzt werden. Es wurde zwar durch die Gödelschen Ergebnisse (Vollständigkeit und Unvollständigkeit) überholt, doch es muß mit allem Nachdruck betont werden, daß Gödel gerade auf dem Buch von Hilbert und Ackermann aufbaute.[35]

Im Hinblick auf die Paradoxien ist es insofern interessant als es einen Abschnitt, Viertes Kapitel, §4, *Die logischen Paradoxien* enthält. In diesem werden die Russell-Zermelosche Paradoxie, der Lügner und die Paradoxie von Berry dargestellt.

[35] Für eine umfassendere Würdigung des Buches, die auch die Rolle von Bernays betont, sei auf [Sie99] verwiesen.

Da das Buch den *Funktionenkalkül* (Prädikatenlogik) behandelt, nicht aber die Mengenlehre, ist es verständlich, daß die anderen mengentheoretischen Paradoxien (vor allem Hilberts eigene und die von Burali-Forti) hier nicht genannt sind.[36]

Dafür sind der Lügner und Berrys Paradoxie[37] im „erweiterten Funktionenkalkül“ (Prädikatenlogik höherer Stufe) formalisiert, und es sind Herleitungen für die sich dabei ergebenden Widersprüche detailliert ausgeführt. Als Ausweg wählen Hilbert und Ackermann Russells „Stufenkalkül“ (Typentheorie) mit Einschluß des *Axioms der Reduzierbarkeit.*

Zitat 45. [HA28, S. 107]

> Man könnte nun meinen, daß infolge der Annahme des Axioms der Reduzierbarkeit die eben erst vermiedenen Widersprüche sich wieder einstellen. Daß dies aber nicht der Fall ist, läßt sich an den behandelten Paradoxien leicht erkennen.

Hilbert und Ackermann führen dies im Buch noch genauer aus. Für uns ist hier nur wichtig, daß die Paradoxien — und dabei insbesondere die von Berry — unzweifelhaft eine zentrale Rolle bei der Idee der Formalisierung der Mathematik gespielt haben. Sie erlaubten zugleich einen ersten Test im Hinblick auf die Tauglichkeit eines Kalküls, ein Test, der für den „naiven“ erweiterten Funktionenkalkül negativ ausfiel.

4. Hilberts Umfeld

Die bisher gegebene Diskussion der Hilbertschen Darstellung der Paradoxien wäre unvollständig, wenn wir nicht das Umfeld, in dem Hilbert gearbeitet hat, mit einbeziehen würden. Schon der erste Brief von Cantor (siehe Zitat 1) zeigt, daß der Ausgangspunkt eine persönliche Diskussion mit Cantor gewesen ist. Offensichtlich ist es nicht möglich, die Einflüsse persönlicher Gespräche heute noch im Detail nachzuzeichnen. Daß aber Hilbert nicht isoliert über die Paradoxien nachdachte, ist vielfach belegt. Die Briefe Cantors wurden offensichtlich in Göttingen mit Kollegen diskutiert. So schreibt Schoenflies in *Zur*

[36] Auch die Russell-Zermelosche Paradoxie wird für Prädikate behandelt (unter Benutzung des Prädikatenprädikats „P ist nicht prädikabel“). Es wird aber darauf hingewiesen, daß sie im Kern mit der üblichen mengentheoretischen Form identisch ist [HA28, S. 93f].

[37] Diesmal in der Fassung der *kleinsten im 20. Jahrhundert von den auf Erden lebenden Menschen nicht bezeichneten Zahl.* Dies ist mittlerweile die fünfte Variante, wenn man die Randnotiz in der Ausarbeitung von 1905 mitzählt.

Erinnerung an Georg Cantor: „Ich selbst erfuhr von ihr [der Methode zur Mengenvergleichung] durch einen Brief Cantors; er wirkt auf uns in Göttingen wie eine Offenbarung und wanderte von Hand zu Hand." ([Sch22, S. 102]; zitiert in [Can91, S. 403][38]).

Von 1897 bis 1910 war Ernst Zermelo Mitarbeiter Hilberts in Göttingen. Seine Bedeutung für die Mengenlehre, die in seinem Wohlordnungsbeweis und in der Aufstellung der Axiome ihre Höhepunkte findet, ist bekannt. Im Hinblick auf die Paradoxien ist seine unabhängige Entdeckung der „Russellschen Paradoxie" bereits erwähnt worden. In einem Brief an Heinrich Scholz (1884–1957) schreibt er explizit zu den Paradoxien: „Über die mengentheoretischen Antinomien wurde um 1900 herum im Hilbert'schen Kreise viel diskutiert, [...]" (Zermelo an Scholz, Freiburg i.Br., 10. April 1936; zitiert in [PK02, Fußnote 7]). In dieser Zeit waren Grundlagenthemen in Göttingen „auf der Tagesordnung" wie z.B. die Themen des Mathematischen Kolloquiums zeigen.[39] Felix Bernstein, der 1901 die Arbeit *Untersuchungen aus der Mengenlehre* vorlegt, ist der erste in der langen Liste von Doktoranden Hilberts, der mit einem (nicht-geometrischen) Grundlagenthema promoviert.[40]

Parallel zu der mathematischen Diskussion wurden die Paradoxien in Göttingen auch von einem philosophischen Zirkel um Leonard Nelson (1882–1927) zu Beginn des 20. Jahrhunderts erörtert.[41] Ein Ergebnis davon war die Veröffentlichung von Nelson mit Kurt Grelling (1886–1943) *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti* von 1908, die die *Grelling-Paradoxie*[42] enthält. Grelling promovierte 1910 bei Hilbert mit der Arbeit *Die Axiome der Arithmetik mit besonderer Berücksichtigung der Beziehungen zur Mengenlehre*. Damit ist natürlich anzunehmen, daß diese Paradoxie Hilbert nicht entgangen sein kann, es findet sich dennoch in seinen Vorlesungen kein Hinweis darauf.[43]

[38]Meschkowski und Nielson machen plausibel, daß der genannte Brief ein Brief von 28.6.1899 (an Schönflies über Hilbert) ist, von dem sich eine Abschrift im Hilbert-Nachlaß findet.

[39]siehe *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 11 (1901)–14 (1905), ausführlich dargelegt in [Pec04, Abs. 3.1].

[40]Die vollständige Liste der Doktoranden Hilberts ist am Ende seiner Gesammelten Abhandlungen abgedruckt [Hil35, S. 431–433].

[41]Ausführliche Darstellungen dazu finden sich in [Pec90] und [Pec04, Abs. 3.2].

[42]Wenn ein Wort die Eigenschaft besitzt, die es aussagt, heiße es *autologisch* (Beispiel: „kurz"); wenn nicht, heiße es *heterologisch* (Beispiel: „lang"). Ist *heterologisch* selbst heterologisch oder autologisch?

[43]Dagegen hat Hermann Weyl sie in seiner Habilitationsschrift *Das Kontinuum* von 1918 als „eine bekannte, im wesentlichen von Russell herrührende «Paradoxie»" erwähnt, die er aber umgehende zurückweist: „in Wahrheit aber handelt es sich um Scholastik schlimmster Sorte: die geringste

Nelson hatte auch engen Kontakt zu Gerhard Hessenberg (1873–1925) in Berlin, der eine der ersten zusammenhängenden Darstellungen der Mengenlehre verfaßte [Hes06]. Hilbert zitiert dieses Werk in der (3 Werke umfassenden) Literaturliste zur Mengenlehre-Vorlesung von 1917 mit der Bemerkung: „Eine einfache, mehr populäre Darstellung", [Hil17, S. 2].

Wie wir bereits erwähnt haben, hat Hilbert 1904 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß eine erste Skizze des späteren Hilbertschen Programms gegeben. Nach Blumenthal folgte darauf aber erst einmal ein Stillstand in der Entwicklung:

Zitat 46. ([Blu35, S. 422] im Anschluß an das Zitat in Fußnote 11)

> Lange Zeit ruhte Hilberts Beschäftigung mit diesen Fragen, wenn er sie auch mehrfach in Vorlesungen über Prinzipien der Mathematik berührt hat. Dagegen verfolgte er mit lebhaftestem Interesse E. Zermelos mengentheoretische Gedanken, sein Auswahlpostulat und seine Axiomatik der Mengenlehre. Auf der anderen Seite machte er sich mit dem Logikkalkül in seinen verschiedenen Formen bekannt, denn er hatte sogleich nach 1904 bemerkt, daß ohne eine übersichtliche und vollständige Formalisierung der logischen Schlußweisen auf dem von ihm erstrebten Wege nicht vorwärts zu kommen war.

Blumenthal ergänzt diese Darstellung noch mit einem persönlichen Erlebnis:

Zitat 47. [Blu35, S. 422]

> Auf seine [Hilberts] eigene Stellung zu den Ansätzen von 1904 wirft vielleicht das folgende Erlebnis einiges Licht: In den letzten Vorkriegsjahren kam ich auf einem Spaziergang mit ihm und Frau Hilbert auf den Heidelberger Vortrag zu sprechen und äußerte mit der schönen Offenheit des Sach-Unkundigen als eine Selbstverständlichkeit die Ansicht, dabei sei doch wohl nichts herausgekommen. Darauf schwieg Hilbert ganz still, während Frau Hilbert an der Form meiner Äußerung offenbar Anstoß genommen hatte und sie lachend zurückwies.

Zum Zeitpunkt der Fortsetzung der Hilbertschen Arbeiten zu den Grundlagen schreibt er im folgenden: „1917 — nach Abschluß der Untersuchungen zur

Besinnung zeigt, daß sich mit der Frage, ob ‚heterologisch' selbst auto- oder heterologisch sei, schlechterdings kein Sinn verbinden läßt."[Wey18, S. 2].

Relativitätstheorie — kam Hilbert mit großer Energie auf seine alten Gedanken zurück und brachte sie jetzt rasch zur Entfaltung, wobei ihm P. Bernays als unermüdlicher Kritiker und Mitarbeiter zur Seite stand" [Blu35, S. 422f]. Bernays bestätigt diese Darstellung in dem zur gleichen Zeit geschriebenen Artikel zu *Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik*:

Zitat 48. [Ber35, S. 200]

> In diesem vorläufigen Stadium [in dem sie sich 1904 befanden] hat Hilbert seine Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik für lange Zeit unterbrochen[1]. Ihre Wiederaufnahme finden wir angekündigt in dem 1917 gehaltenen Vortrag[2] „Axiomatisches Denken".
>
> [1][...]
> [2]Auf der Naturforscherversammlung in Zürich, veröffentlicht in [[Hil18]].

Dieser Vortrag bot Hilbert auch die Gelegenheit, Bernays wieder nach Göttingen zurückzuholen.[44]

Andere Quellen legen allerdings nahe, daß sich Hilbert bereits 1914 wieder verstärkt den Grundlagen zuwandte.[45] In einem Brief an Hugo Dingler (1881-1954) vom 26.12.1914 nennt Hilbert Paul Hertz (1881–1940), Bernstein und Grelling als seine engsten Mitarbeiter bei den Grundlagenuntersuchungen (siehe [Man99, Endnote 4]). Aber vor allem muß man Heinrich Behmann (1891–1970) berücksichtigen, der 1918/22 bei Hilbert mit der Arbeit *Die Antinomie der transfiniten Zahl und ihre Auflösung durch die Theorie von Russell und Whitehead* promovierte.[46] Behmanns Rolle ist von Mancosu in [Man99] ausführlich geschildert worden. In dieser Arbeit findet sich auch ein kurzer Hinweis

[44]„Im Herbst 1917 wurde ich von Hilbert anlässlich seines in Zürich gehaltenen Vortrages *Axiomatisches Denken* aufgefordert, an seinen wieder aufgenommenen Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik als sein Assistent mitzuwirken." (Bernays in einer biographischen Note, zitiert nach [Sie99, S. 11]).

[45]Es gibt allerdings ein Zeugnis, das belegt, daß dieses Interesse nicht bis zu allen Studenten durchgedrungen sein kann. In einem in Russells Autobiographie abgedruckten Brief von Norbert Wiener an ihn schreibt dieser: „Symbolische Logik steht in Göttingen in geringem Ansehen. Wie gewöhnlich wollen die Mathematiker nichts mit etwas so Philosophischem wie der Logik zu tun haben, während die Philosophen nichts mit etwas so Mathematischem wie den Symbolen zu tun haben wollen." (Wiener an Russell, Göttingen, [Juni oder Juli 1914], zitiert nach [Rus78, S. 48]). Wiener schreibt übrigens vorher „Ich höre [...] eine Vorlesung über Differentialgleichungen bei Hilbert (ich weiß, das hat ziemlich wenig mit Philosophie zu tun, aber ich wollte Hilbert hören) [...]".

[46]1918 fand die mündliche Prüfung statt; auf Grund der (Nach-)Kriegseinwirkungen erschien die Arbeit aber erst 1922.

auf eine Beschäftigung Hilberts (dem Kontext nach: *unmittelbar*) vor dem ersten Weltkrieg, der in Einklang mit den Ausführungen Blumenthals in Zitat 46 steht, wonach sich Hilbert mit dem Logikkalkül bekanntmachte: „So weit ich mich erinnere, habe ich das Verfahren der Normalform [...] durch Hilbert, der sich ja vor dem Kriege selbständig mit dem Problem der symbolischen Darstellung der Logik, und zwar insbesondere der Aussagenlogik, beschäftigte, kennen gelernt." (Behmann an Scholz, 29.12.1927, Behmann Archive, Erlangen, zitiert nach [Man99, Endnote 3]).

Zudem listet Mancosu die grundlagentheoretischen Vorträge der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen von 1914 bis 1921 auf [Man99, S. 304f], wie sie in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht wurden (wobei er auch bemerkt, daß zwischen 1910 und 1913 keine derartigen Vorträge aufgeführt sind). Danach hat Behmann am 1.12.1914 *Über mathematische Logik* vorgetragen: „Der Vortrag bringt einige neue Gedanken aus den in den 'Principia mathematica' von Russell und Whitehead niedergelegten logischen Untersuchungen" (zitiert nach [Man99, S. 306]). Das Manuskript zu diesem Vortrag ist im Behmann-Nachlaß in Erlangen erhalten und ausführlich in [Man99, §3] besprochen. Am 18.12.1914 hielten Bernstein und Grelling einen Nachfolgevortrag mit „Ergänzungen und genauere[n] Ausführungen zum Referat vom 1. Dezember". Im Hinblick auf Hilberts Vorlesungen passen diese Vorträge inhaltlich und zeitlich genau zu der Notiz zur Stufentheorie in der Vorlesung von 1914/15, die er von „unbefriedigend" abänderte zu: „Empfindung, dass an der Stufentheorie etwas wahres ist; aber sie muss noch sehr vertieft werden" (siehe Zitat 25). Auch wenn sich später keine expliziten Hinweise auf Behmanns Arbeiten bei Hilbert finden, haben die *Principia Mathematica* [WR13] großen Einfluß auf Hilbert ausgeübt.[47] So baut zum Beispiel das Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* auf Russells Typentheorie und nicht etwa auf der von Zermelo axiomatisierten Mengenlehre auf.[48] Hilbert hat auch 1916 an Russell geschrieben, „daß wir gerade vor Ausbruch des Krieges die Absicht hatten, Sie [...] nach Göttingen einzuladen, damit Sie uns persönlich über Ihre Lösung des Paradoxienproblem[s] einen Zyklus von Vorträgen halten könnten." (Hilbert an Russell, 12.4.1916, zitiert nach [Sie99, S. 37f]) Trotz Hilberts Hoffnung, daß „die Ausführung dieses Plans durch den Krieg nicht aufgehoben, sondern nur aufgeschoben worden ist" kam der Besuch nicht mehr

[47]Dagegen konnten wir bei Hilbert *keinen* Hinweis auf Russells *Principles of Mathematics* [Rus03] finden, das Buch, das die mengentheoretischen Paradoxien allgemein berühmt gemacht hat.

[48]Dies wurde auch von Cantini angemerkt [Can0x, S. 31].

zustande.[49]

Die Rückkehr Bernays' nach Göttingen fällt mit dem Beginn der Auseinandersetzung mit Brouwer und Weyl um die Zulässigkeit gewisser, heute „klassisch“ genannten Schlußweisen in der Mathematik zusammen.[50] Diese Epoche, die auch den Namen *Grundlagenkrise der Mathematik* trägt, ist gut untersucht, und Hilberts Rolle, die vor allem mit seinem *Hilbertschen Programm* verbunden wird, ist bekannt.[51] Ackermann hat in seiner Promotion von 1924/25 *Begründung des „tertium non datur“ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit* einen fehlerhaften Beweis der Widerspruchsfreiheit der Analysis vorgelegt, der eine Realisierung des Hilbertschen Vorhabens dargestellt hätte. Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze zeigten allerdings, daß das Hilbertsche Programm in seiner ursprünglichen Form nicht durchführbar ist. Dennoch haben sich später verschiedene Modifikationen des Programms als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Dabei ist an erster Stelle der (relative) Konsistenzbeweis der Peano-Arithmetik auf der Basis der transfiniten Induktion bis ε_0 von Gerhard Gentzen (1909–1945) zu nennen. Auch wenn Gentzen (1933) nicht mehr bei Hilbert promoviert hat, hat dieser ihn ein Jahr später noch als Assistent angestellt und ihn bei der Habilitation [Gen43] unterstützt (siehe [Sza69, p. vii–viii]).

Aus der Liste der Doktoranden Hilberts wollen wir noch Gabriel Sudan[52] (*Über die geordneten Mengen*, 1925), Haskell Brooks Curry (1900–1982) (*Grundlagen der kombinatorischen Logik*, 1929/30)[53] und Kurt Schütte (1909–1998) (*Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik*, 1933/34) nennen. Curry und Schütte waren aber nur noch formal Doktoranden

[49] Eine kurze Darstellung der Korrespondenz Hilberts mit Russell findet sich in [Sie99, App. B].

[50] Dabei ist das „Tertium non datur“ als das prominenteste umstrittene Prinzip zu nennen. Seine Infragestellung geht ohne Zweifel auch auf die mengentheoretischen Paradoxien zurück, so zum Beispiel bei den im Nelson-Kreis diskutierten Lösungsversuchen von Heinrich Goesch (1880–1930) und Alexander Rüstow (1885–1963), siehe [Pec95]; siehe auch die Bemerkung von Weyl zur Grelling-Paradoxie in Fußnote 43 und den Titel der Doktorarbeit von Wilhelm Ackermann unten. Die Debatte hat sich aber schnell verselbständigt und wurde ganz allgemein im Hinblick auf die Bedeutung mathematischer Aussagen geführt.

[51] Zu der in diesem Zusammenhang häufig genannten persönlichen Auseinandersetzung zwischen Brouwer und Hilbert siehe [Dal90].

[52] Sudan hat unabhängig — oder eventuell in Zusammenarbeit mit Ackermann — ein erstes Beispiel für eine rekursive, aber nicht primitiv-rekursive Funktion angegeben, siehe [CMT79] und die dort zitierten Arbeiten [Sud27] und [Ack28, S. 119]. Die Autoren argumentieren überzeugend, daß „Ackermann and Sudan have to share authorship of the first example of a recursive function which is not primitive recursive.“ [CMT79, S. 383].

[53] Siehe auch oben, Abschnitt 3.1.

von Hilbert, tatsächlich aber Bernays-Schüler.[54] Schütte war aber ein bedeutender Vertreter der Beweistheorie in Deutschland, der nach dem zweiten Weltkrieg das Hilbertsche Programm in Richtung der Ordinalzahlanalyse weitergeführt hat [Sch60, Sch77].

5. Zusammenfassung

In dieser haben wir die zentral Rolle herausgestellt, welche die für Paradoxien Hilbert Beschäftigung mit den Grundlagen der Mathematik gespielt haben — und auch umgekehrt die Rolle der Behandlung der Paradoxien durch Hilbert für die Entwicklung der Mengenlehre und mathematischen Logik. Wir hoffen damit auch zu einer positiven Revision der Sicht auf Hilberts Bedeutung in diesem Gebiet beizutragen.[55]

Seine eigene Entdeckung der *rein mathematischen* Paradoxie bildete dabei mit Sicherheit eine besondere Motivation, die mit den Paradoxien verbundenen Probleme der Grundlagen der Mathematik zu lösen. Allein auf Grund der zeitlichen Abfolge muß man diese Paradoxie, soweit es Hilbert betrifft, als tatsächlichen Ausgangspunkt für die spätere *Grundlagenkrise* betrachten, während die Auseinandersetzung mit Poincaré, Brouwer und Weyl in dieser Hinsicht sekundär ist.

Aus der Hilbertschen Perspektive, so wie sie hier wiedergegeben wurde, lassen sich mindestens zwei unmittelbare Auswirkungen auf die Entwicklung der Grundlagenforschung belegen. Einerseits war auf Grund der Hilbertschen Paradoxie eine eingehendere Untersuchung des Mengenbegriffs nötig, die zur Axiomatisierung der Mengenlehre führte; andererseits erforderte die Analyse der Richardsche Paradoxie (später in der Fassung von Berry) eine vollständige Formalisierung des Sachverhaltes, die zu den eingehenden Untersuchungen der logischen Kalküle führte.

Zur Hilbertschen Analyse des Mengenbegriffs müssen wir allerdings festhalten, daß er vom Beginn des Briefwechsels mit Cantor 1897 bis zur Vorlesung

[54] Auf Hilbert angesprochen, sagte Kurt Schütte dem Autor einmal, daß er ihn genau zweimal persönlich getroffen habe: Bei der Vorbesprechung der Doktorprüfung und bei der Prüfung selbst.

[55] Vergleiche dazu Sieg: „A revision of the standard view of Hilbert's and Bernay's contribution to the foundational discussion in our [20.] century has long been overdue. It is almost scandalous that their carefully worked out notes have not been used yet to understand more accurately the evolution of modern logic in general and of Hilbert's Program in particular. One conclusion will be obvious: the dogmatic formalist Hilbert is a figment of historical (de)construction! Indeed, the study and analysis of these lectures [Sieg bezieht sich auf die grundlagentheoretischen Vorlesungen Hilberts von 1917–1922] reveal a depth of mathematical-logical achievement and of philosophical refection that is remarkable.“ [Sie99, Abstract, S. 1].

von 1920 nicht von seinem naiven Mengenbegriff abgerückt ist, der eine Menge schon dann als wohldefiniert betrachtet, „wenn von jedem Dinge bestimmt ist, ob es zur Menge gehört oder nicht" (siehe die Zitate 2 und 38). Dabei war sich Hilbert aber der Problematik dieses Begriffs bewußt (siehe die Postkarte an Frege, Zitat 3, oder die kritische Bemerkung 1917, Zitat 33). Die sich aus konkreten Mengenkonstruktionen ergebenden Widersprüche allein rechtfertigen aber für Hilbert noch nicht, diese als *reductio ad absurdum*-Argumente zu benutzen. Diese Kritik hat er schon 1904 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1904 in Heidelberg publik gemacht (siehe Zitat 4), aber auch in der Vorlesung von 1917 nochmals in aller Schärfe zum Ausdruck gebracht (siehe Zitat 32).

Sein eigener Lösungsversuch beruhte auf der Unterscheidung von *genetischen* und *axiomatischen* Definitionen, wobei die genetischen auf Grund möglicherweise unerlaubter Verwendung von Wörtern wie „'alle'[,] 'jeder' oder 'und so weiter'" mit Vorsicht zu betrachten sind (siehe Zitat 33). Unabhängig davon, ob diese Unterscheidung tatsächlich eine Lösung seiner eigenen Paradoxie bietet, scheitert sie spätestens bei Burali-Forti, wie Hilbert selbst zugesteht. Insofern ist er auch 1920 noch nicht zu einer befriedigenden Lösung gekommen.

Aus heutiger Perspektive wird man ohne Zweifel allein den naiven Mengenbegriff, den Hilbert zu Grunde legte, für die Paradoxien verantwortlich machen. Dabei muß man aber zugeben, daß wir heute in dieser Hinsicht durch die allgemeine Akzeptanz der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre bereits „verbildet" sind und den axiomatischen Mengenbegriff vergleichsweise unreflektiert als adäquat betrachten.[56] In diesem Zusammenhang ist es interessant zu bemerken, daß Hilbert in seinen Vorlesungen die Zermelosche Axiomatisierung der Mengenlehre — die ohne jeden Zweifel von ihm selbst angeregt worden war — lediglich 1920 in einem Unterkapitel behandelte.[57] Es stellt sich die Frage, ob Hilbert mit der Axiomatisierung von Johann (John) von Neumann (1903–1957) mehr einverstanden gewesen wäre, da diese den „naiven Mengen" Hilberts zumindest noch als *Klassen* eine Existenzberechtigung zugesteht:

[56] Es sei mir gestattet, hier kurz eine persönliche Begebenheit einzufügen. Als Student hörte ich an der ETH Zürich einen Seminarvortrag über unfundierte Mengen. Zu Beginn führte der Vortragende die Menge Ω mit $\Omega \in \Omega$ ein, woraufhin ich, in der Naivität eines Fünftsemestlers einwarf: „Aber das ist doch keine Menge!" Darauf drehte sich Ernst Specker, der das Seminar leitete, zu mir um und fragte mit einem triumphierenden Lächeln:

> „Was ist für Sie eine Menge?"

[57] *§5. Zermelos axiomatische Begründung der Mengenlehre und Analysis*; siehe [Moo02, § 9].

Zitat 49. [Neu28, S. 348]

> Es ist hier am Platze, zu erklären, was wir unter „Menge" verstehen (genauer: wodurch wir die Mengen der „naiven Mengenlehre" ersetzen wollen) [...]. Hier liegt der wesentliche Unterschied unseres Axiomensystems vom Zermelo-Fraenkelschen: Dort sind die „zu großen" Mengen einfach verboten, unherstellbar; bei uns können sie (als „Bereiche" [d.s. in heutiger Terminologie *Klassen*]) gebildet werden, nur sind sie unfähig, Elemente anderer „Mengen" oder „Bereiche" zu sein. Dies ist zumindest formal bequemer, und zur Vermeidung der Antinomien (insbesondere der Russellschen) reicht es bereits aus.

Leider findet sich kein Hinweis darauf, wie Hilbert die Arbeiten von von Neumann aufgenommen hat.

Die Richardsche Paradoxie wird von Hilbert immer im Zusammenhang der Definierbarkeit der Irrationalzahlen diskutiert. Dabei ist seine Forderung nach der Berechenbarkeit aller Irrationalzahlen heute nicht mehr haltbar. Auch die Beziehung zum Wohlordnungssatz ist aus heutiger Sicht unergiebig. Dagegen sollte sich aber die weitere Analyse als ungeheuerlich fruchtbar für die Entwicklung der mathematischen Logik erweisen.

Die Reduktion auf die Paradoxie von Berry zeigt zuerst, daß die Paradoxie nicht am Begriff der Unendlichkeit hängt und damit auch nicht einfach als Problem der Mengenlehre abgetan werden kann. Hilbert rückt dagegen den Begriff der Definition in den Vordergrund. Dessen Analyse mündet schließlich in der rigorosen logischen Formalisierung. Dabei ist hervorzuheben, daß für Hilbert die Formalisierung der Mathematik eine Forderung war, die sich als notwendige Voraussetzung zur Lösung der Paradoxien erst *nach* deren Entdeckung ergab.

Auch wenn die Formalisierung der Mathematik zuvor bereits von Frege und Russell propagiert und in Angriff genommen wurde, so ist es doch das Buch von Hilbert und Ackermann, das Anlaß zu den wichtigsten Ergebnissen der mathematischen Logik geben sollte: den Gödelschen Sätzen. Schon in seiner Dissertation [Göd30] beantwortete Kurt Gödel (positiv) die von Hilbert und Ackermann erstmals veröffentlichte Frage nach der Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe [HA28, S. 68] (siehe auch [Göd86, S. 47f]). Auch der Unvollständigkeitsbeweis geht von Richards Paradoxie und dem Lügner aus — den Beispielen, die sich im Buch von Hilbert und Ackermann finden: „Die Analogie dieses Schlusses mit der Antinomie Richard springt in die Augen; auch mit dem ‚Lügner' besteht eine nahe Verwandtschaft [. . .]" [Göd31, S. 148].

In der Summe hat Hilbert, ausgehend von den Problemen der Paradoxien, nicht nur die Mengenlehre mathematische salonfähig gemacht und ihr durch die von seinem Schüler Zermelo ausgeführten Axiomatisierung zur heute allgemein anerkannten Fundamentfunktion in der Mathematik verholfen, sondern er hat auch den Weg bereitet, auf dem die mathematische Logik mit den Unvollständigkeitsresultaten zu unerwartet tiefen Ergebnissen gelangte.

In Bezug auf die 1905 und 1917 ausgesprochenen programmatischen Ziele (siehe Zitat 6 und 7) ist es Hilbert tatsächlich gelungen, durch die Axiomatisierung die Mengenlehre vor einem Scheitern zu bewahren und durch die Formalisierung „die ganze Art des Schliessens in der ganzen Mathematik durchgreifend zu reformieren“.

Anhang A. Die Bezeichnungen der Paradoxien

Im Hinblick auf die Namen der Paradoxien haben wir im Text die heute gebräuchlichen verwendet (modulo „Zermelo“ in „Russell-Zermelo“). Aus historischer Perspektive ist es durchaus interessant, einen genaueren Blick auf Hilberts Bezeichnungen für die Paradoxien in den verschiedenen Vorlesungen zu werfen.

Zuerst müssen wir festhalten, das Hilbert die Bezeichnung „Paradoxie“ (oder auch „Paradoxon“) und „Widerspruch“ völlig gleichwertig benutzt, während er den Terminus „Antinomie“, soweit wir sehen, überhaupt nicht verwendet.[58] Die heute (im Deutschen) geläufige Unterscheidung von Paradoxie und Antinomie, bei der jene eine überraschende (dem Glauben zuwiderlaufende) Sache bezeichnet, und diese einen (den Gesetzen widersprechenden) formalen Widerspruch bezeichnet, macht Hilbert nicht.[59] Allerdings werden alle seine Beispiel für Widersprüche in einem nicht formalisierten Kontext angeführt — mit der (wichtigen) Ausnahme der Formalisierung der Paradoxien in [HA28] —, daher können diese gar nicht als Antinomie (im Sinne des heutigen Sprachgebrauchs) behandelt werden. Wenn wir oben gesagt haben, daß Hilbert die Bedeutung der *Paradoxien* für die Mathematik im Gegensatz zu Cantor erkannt hatte, so muß hinzugefügt werden, daß diese weniger dramatisch sind, wenn sie nicht in einem streng formalisierten Rahmen auftreten. Dies unterscheidet Hilbert von Frege, für den die Russellsche Paradoxie, bezogen auf sein in den Grundgesetzen der

[58]Er benutzt an anderen Stellen den Begriff „Fehlschluß“ für mathematisch inkorrekte, aber nicht sofort als solche erkennbare Schlußweisen.

[59]Peckhaus [PK02, Fußnote 2] hat im Nachlaß von Leonard Nelson Briefe von Zermelo aus den Jahren 1907 und 1908 gefunden, in denen dieser die Unterscheidung von *Paradoxie* und *Antinomie* im genannten Sinne empfiehlt.

Arithmetik entwickelte formale System, tatsächlich eine Antinomie darstellte — mit der bekannten fatalen Konsequenz für dieses System.[60] Zudem ist für Hilbert die Formalisierung der Mathematik eine Antwort auf die Paradoxien, auf dem Weg zu deren Lösung, in einer gewissen Umkehrung der Sachlage in Freges Fall.

Die Richardsche Paradoxie. Die als Richardsche Paradoxie bekannte Paradoxie hatte Jules Richard in einem Brief an die Herausgeber der *Revue générale des sciences pures et appliquées* geschickt, wo sie in der Ausgabe vom 30. Juni 1905 veröffentlicht wurde [Ric05]. Sie ist in englischer Übersetzung z.B. in [Hei67, S. 143f] und [Gar92, S. 141f] abgedruckt. Hilberts Darstellung in Zitat 16 könnte man fast als eine Übersetzung davon ansehen, wobei aber der vorausgehende vermeintliche Widerspruch der Überabzählbarkeit mit der Aufzählung des Zahlenkontinuums bei Richard fehlt. Hilbert hat diesen Abschnitt am 10. Juli 1905 in seiner Vorlesung in Göttingen vorgetragen, wie aus einer Marginalie auf Seite 191 in der Vorlesungsausarbeitung hervorgeht. Damit ist es zwar nicht unmöglich, daß er Richards Arbeit gekannt hat, es erscheint aber doch unwahrscheinlich. In der Vorlesung von 1905 gibt Hilbert keinen Hinweis auf Richard, 1917 und 1920 benutzt er aber den Namen Richard schon in den entsprechenden Kapitelüberschriften (ohne weitere Literaturangaben[61]); erst im 2. Band der Grundlagen der Mathematik findet sich die genaue Referenz [HB39, S. 273, Fußnote 1]. Auch wenn es möglich erscheint, daß Hilbert die Paradoxie unabhängig von Richard gefunden haben könnte, spricht dagegen, daß er nur im Hinblick auf die „rein mathematische“ Paradoxie von *seiner* Entdeckung spricht (und das mit gewissem Nachdruck, siehe Zitat 6 und 7). Es ist selbstverständlich möglich, daß ihm die Paradoxie auch von dritter Seite zugetragen wurde. Zum Beispiel wurde im Rahmen des Internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904 die Mengenlehre mit all ihren Problemen kontrovers diskutiert. Auf diesem Kongreß hat neben Hilbert auch Julius König (1849–1913)

[60] Hilbert schreibt dazu: „Im Schlußwort zum zweiten Bande seines großen Werkes über die Zahlen, nach dessen Drucklegung er das Zermelosche Paradoxon erfuhr, gibt er vollkommen zu, daß dies sein ganzes Lehrgebäude vollkommen erschüttert, und wesentliche Lücken enthüllt. Diese Zugeständnis ehrt ihn ebenso sehr, wie es die Wucht dieses Beispieles zeigt.“ [Hil05a, S. 213].

[61] In den Ausarbeitungen finden sich generell kaum Literaturangaben; praktisch keine im laufenden Text, und nur wenige allgemeine zu Beginn der Vorlesung.

einen mengentheoretischen Vortrag gehalten, in dem er eine vermeintliche Widerlegung des Wohlordnungssatzes vorstellte.[62] Dieser Vortrag hat verständlicherweise zu heftigen Diskussionen geführt, und es ist wahrscheinlich, daß dabei auch Widersprüche zur Sprache kamen. So finden wir bei Schoenflies die folgende Erinnerung: „An die Heidelberger Tagung schloß sich eine Art Nachkongreß in Wengen. Hilbert, Hensel, Hausdorff und ich selbst fanden sich dort zufällig zusammen. Cantor [...] kam alsbald [...] zu uns herüber. Im Mittelpunkte unserer Gespräche stand immer wieder der Königsche Satz.“ [Sch22, S. 100f] Zudem hat König am 20. Juni 1905 vor der Ungarischen Akademie der Wissenschaften ein neues Argument zur Unmöglichkeit der Wohlordnung des Kontinuums vorgetragen (abgedruckt in [Kön05a]), das nach van Heijenhoort [Hei67, S. 142] „took the form of a paradox, which bears a resemblance of Richard's“. Tatsächlich hat die Argumentation sehr große Ähnlichkeit mit Hilberts Argumentation *zu Beginn* von Zitat 16, wobei König allerdings die richtige Konsequenz zieht, daß „es Elemente des Kontinuums geben [muß], die nicht endlich definiert sein können“ [Kön05a, S. 157].

Auch wenn die Paradoxie unabhängig entdeckt worden sein sollte, so war es doch Richards Veröffentlichung, die zur Verbreitung dieser Paradoxie geführt hat. Sie wurde schon 1906 von Poincaré [Poi06] und Peano [Pea06] diskutiert (siehe [Gar92, S. 142]. Daß Hilbert später die Paradoxie nach Richard benennt, mag auch durch den oben bereits angesprochenen Vortrag [Poi10] von Poincaré begründet sein, den dieser 1909 in Göttingen (auf Deutsch) auf Einladung Hilberts hielt und der die Richardsche Paradoxie zum Inhalt hatte.

Die Paradoxie von Berry. Die Varianten der Richardschen Paradoxie, die nach der „kleinsten mit höchstens x Wörtern definierbare Zahl“ fragt, ist unter dem Namen *Berrys Paradoxie* bekannt geworden. Sie wurde 1906 von Russell veröffentlicht [Rus06, S. 645], der sie von einem Bibliothekar in Oxford mit Namen Berry zugeschickt bekam.[63] Poincaré diskutiert sie z.B. in [Poi13, S. 101ff][64] als „ein von Russell gegebenes Beispiel“.

[62] Es ist ein historischer Zufall, daß dieser falsche Beweis, der von König auch sofort nach Bekanntwerden des Fehlers zurückgezogen wurde (siehe [Kön05a]) zusammen mit Zermelos Wohlordnungsbeweis von Hadamard in den *Revue générale des sciences pures et appliquées* quasi als Widerspruch dargestellt wurde, und damit den Anlaß zu Richards Brief gab, siehe [Gar92, S. 138ff].

[63] Siehe [Gar92, S. 134].

[64] siehe auch [Mes85, S. 46].

Hilbert erwähnt den Namen Berry kein einziges Mal. Er behandelt diese Paradoxie immer zusammen mit der Richardschen Paradoxie, oder sogar direkt unter dem Namen Richard.

Die Russell-Zermelosche Paradoxie. Die Russellsche Antinomie ist sicherlich die bekannteste der mengentheoretischen Paradoxien und wird auch zu Recht mit seinem Namen verbunden. Allerdings muß die unabhängige Entdeckung der Paradoxie durch Zermelo heute als gesichert angesehen werden, siehe [RT81]. Hilbert erwähnt in seinen Vorlesungen durchgängig Zermelo, wobei er 1905 (und auch in der Postkarte an Frege) extra hervorhebt, daß dieser sie ausgehend von der Hilbertschen entdeckt habe (siehe Zitat 22). 1917 fügt er Russells Namen bei der Benennung der Paradoxie hinzu; 1920 ist in der Überschrift nur Russell genannt, im Text aber wieder beide Namen. Daß es Hilbert besonders daran gelegen gewesen wäre, Zermelos Namen im Zusammenhang mit der Paradoxie in den Vordergrund zu rücken, muß aber bezweifelt werden, da er ihn im Buch mit Ackermann *nicht* erwähnt! Hier hätte er ohne Probleme öffentlich auf Zermelo hinweisen können. Interessanterweise hat zum Beispiel Abraham Fraenkel in seinem bekannten Mengenlehrebuch zwischen der ersten Auflage von 1919 und der dritten von 1928 [Fra28, S. 210] den Namen Zermelos neben den Russells gesetzt.

Die Hilbertsche Paradoxie. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß Hilbert seine eigene Paradoxie zwar nicht mit seinem eigenen Namen belegt[65], aber doch ausdrücklich von „meinem Widerspruch“ spricht (siehe Zitat 22). Im allgemeinen zieht er aber die Bezeichnung „rein mathematisches Paradoxon“ vor.

In den handschriftlichen Notizen zur Vorlesung von 1914/15 scheint dies „beste rein mathematische Paradoxon“ auch dem Namen Cantor zugeordnet zu sein (siehe Zitat 25); eine Zuordnung, die auf Grund der Nähe von Hilberts Paradoxon zu Cantors Paradoxon durchaus möglich erscheint. Allerdings ist auch zu bedenken, daß zu dieser Zeit Cantors Name wohl nicht allgemein mit einem spezifischen Paradoxon verbunden gewesen sein dürfte.

Die (zeitliche und inhaltliche) Beziehung zwischen Hilberts und Cantors Paradoxie ist auf Grund der erhaltenen Dokumente nicht klar zu rekonstruieren. Es findet sich lediglich ein expliziter Hinweis Hilberts in der Ausarbeitung von

[65]Bei anderer Gelegenheit hat Hilbert keine Probleme, seinen eigenen Namen in den Ausarbeitungen explizit anzuführen, z.B. 1920 in der Kapitelüberschrift: *Die Hilbertschen Gedanken zum Beweis der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie* [Hil20, Inhaltsübersicht].

1905, daß er Cantor seine Paradoxie mitgeteilt habe: „Ich habe diesen Widerspruch nicht publiciert; er ist aber den Mengentheoretikern, insbesondere G. Cantor, bekannt.“ [Hil05a, S. 204]

Hilberts Hotel. Da die Hilbertsche Paradoxie keinen Eingang in die Literatur fand, hat es sich ergeben, daß diese Bezeichnung in manchen populären Darstellungen des Unendlichen für einen anderen Sachverhalt verwendet wird. Unter der Bezeichnung *Hilberts Hotel* oder eben auch *Hilberts Paradoxon* wird die Gleichmächtigkeit unterschiedlicher unendlicher Mengen durch ein Hotels mit unendlich vielen Zimmern illustriert, bei dem man durch Umverteilen der Zimmer auch in einem ausgebuchten Hotel noch Platz schaffen kann.

Der diesem „Paradoxon“ zugrunde liegende Sachverhalt findet sich z.B. schon bei Galilei, der durch eine ein-eindeutige Abbildung der natürlichen Zahlen auf die Menge der Quadratzahlen feststellte, daß Begriffe „größer“ und „kleiner“ auf unendliche Mengen nicht anwendbar seien.[66] Derartige Paradoxien waren schon in der Antike bekannt, und Bernhard Bolzano hat diese „vormengentheoretischen“ Paradoxien in seinem Buch *Die Paradoxien des Unendlichen* diskutiert, ein Buch, das auch Cantor beeinflußt hat.

Die genannte Illustration durch ein Hotel findet sich tatsächlich bei Hilbert, zuerst in einer handschriftlichen Notiz in den Aufzeichnungen zur Vorlesung *Zahlbegriff und Quadratur des Kreises* 1897/98:

Zitat 50. [Hil98, S. 14]

> Hotel mit 100 Zim̄ern; kann der Wirt durch Umverteilen[?] der Zimmer nicht für einen einzigen Gast Platz schaffen.
>
> bittet jeden Gast das Zimmer mit doppelter Num̄er zu beziehen. wird uns nicht [unleserliches Wort]: alle abzählbare Mengen sind evident aequivalent.

Ausgeführt ist sie später in der Mengenlehre-Vorlesung [Hil17, S. 66].[67] Wir wollen hier aber dafür plädieren, den Begriff der *Hilbertschen Paradoxie* für den mathematisch wesentlich tiefer gehenden, mengentheoretischen Widerspruch zu reservieren, insbesondere da auch nur dieser von Hilbert selbst als Paradoxie behandelt wurde.

---

[66] Siehe z.B. [Mes85, S. 23].

[67] Worauf auch Moore hinweist, [Moo02, S. 52].

Anhang B. Hilberts Paradoxie im Original

[Marginalie: 18. Vorles. 10. VII.] [...] |[204] Ich komme nun noch zu 2 Beispielen für Widersprüche, die viel überzeugender sind, der erste, der rein mathematischer Natur ist, scheint mir besonders bedeutsam; als ich ihn fand, glaubte ich zuerst, daß er der Mengentheorie unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg legte, an denen sie scheitern müßte; ich glaube jedoch jetzt sicher, daß wie stets bisher in der Wissenschaft, nach der Revision der Grundlagen alles Wesentliche erhalten bleiben wird. Ich habe diesen Widerspruch nicht publiciert; er ist aber den Mengentheoretikern, insbesondere G. Cantor, bekannt. Wir sehen die endlichen Mengen, durch endlich viele Zahlen repräsentiert, jedenfalls als erlaubte Operationsbasis an, und ebenso die abzählbar unendliche Menge $1, 2, 3 \ldots$ aller natürlichen Zahlen. Ferner erscheint es erlaubt, 2 solche Mengen $(1, 2, 3 \ldots)$ und $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ zu einer neuen Begriffseinheit $(1, 2, 3 \ldots, a_1, a_2, a_3 \ldots)$, einer neuen Menge, zusammenzufassen, die jedes Element der beiden Mengen enthält. Ebenso können wir auch mehrere Mengen und sogar unendlich viele zu einer Vereinigungsmenge zusammenfassen. Wir bezeichnen das als Additionsprincip, und schreiben |[205] die so aus $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \ldots$ hervorgehende Menge kurz

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \cdots$$

Diese Zusammenfassungen sind Processe, die man in der Logik stets ohne jedes Bedenken in noch weit komplicierteren Fällen anwendet; es scheint also, daß man auch hier ohne weiteres davon Gebrauch machen könnte. Außer diesem Additionsprincip verwenden wir noch eine weitere Betrachtung zur Bildung neuer Mengen. Es sei $y = f(x)$ eine zahlentheoretische Funktion, die zu jedem ganzzahligen Wert x ein ganzzahliges y zuordnet; in sofort zu verstehendem Sinne können wir eine solche Funktion auch als eine Belegung der Zahlenreihe mit sich selbst bezeichnen, indem wir etwa an ein Schema denken:

$$\begin{aligned} x &= 1, 2, 3, 4 \ldots \\ y &= 2, 3, 6, 9 \ldots \end{aligned}$$

Das System aller solcher zahlentheoretischen Funktionen $f(x)$ oder aller möglichen Belegungen der Zahlenreihe mit Elementen ihrer selbst bildet eine neue Menge, die "durch Selbstbelegung aus der Zahlenreihe $\mathcal{M}$ entstehende," wir schreiben sie $\underline{\mathcal{M}^{\mathcal{M}}}$. Als aus den |[206] Zusammenfassungsgesetzen der üblichen Logik folgendes und nach ihr gänzlich unbedenkliches Princip können wir nun das ansehen, daß aus wohldefinierten Mengen durch Selbstbelegung immer wieder wohldefinierte Mengen entstehen. (Belegungsprincip). Durch dies Princip entsteht aus dem Continuum aller reellen Zahlen beispielsweise die Menge aller reellen Funktionen. Allein mit diesen beiden nach aller bisherigen Mathematik und Logik unbedenklichen Principen wollen wir arbeiten.

Wir gehen von allen endlichen Mengen von Zahlen und der aus ihnen bereits durch Addition entstehenden unendlichen Reihe $1, 2, 3\ldots$ der natürlichen Zahlen aus, und fassen alle Mengen auf, die aus ihnen durch die beiden beliebig oft anzuwendenden Processe der Addition und Selbstbelegung entstehen; diese Mengen bilden wieder eine wohldefinierte Gesammtheit, nach dem Additionsprincip vereinige ich sie alle zu einer Summenmenge $\mathcal{U}$, die wohldefiniert ist. Bilde ich nun die Menge $\mathcal{F} = \mathcal{U}^{\mathcal{U}}$ der Selbstbelegungen von $\mathcal{U}$, so entsteht diese auch aus der ursprünglichen Zahlenreihe lediglich durch die beiden Processe der Addition und |[207] Selbstbelegung; sie gehört also auch zu den Mengen, aus deren Addition erst $\mathcal{U}$ entstand, und muß daher ein Teil von $\mathcal{U}$ sein:

$$(1) \qquad \mathcal{F} \text{ ist in } \mathcal{U} \text{ enthalten.}$$

Ich zeige nun, dass dies zu einem Widerspruch führt. Es seien $u_1, u_2, u_3\ldots$ die Elemente von $\mathcal{U}$; jedes Element f von $\mathcal{F} = \mathcal{U}^{\mathcal{U}}$ repräsentiert dann eine Belegung von $\mathcal{U}$ mit sich selbst, d. h. eine Funktion gewissermaßen, die jedem Elemente u_i von $\mathcal{U}$ ein anderes $u_{f(i)}$ zuordnet, wobei die $u_{f(i)}$ keineswegs untereinander verschieden zu sein brauchen; wir stellen dies Element f am besten also durch ein Schema dar:

$$f(u_1) = u_{f(1)}, f(u_2) = u_{f(2)}, f(u_3) = u_{f(3)}\ldots$$

Unser Resultat (1), daß $\mathcal{F}$ in $\mathcal{U}$ enthalten ist, kann man nun näher so aussprechen: Man kann jedem Elemente u_i von $\mathcal{U}$ eines f_i von $\mathcal{F}$ eindeutig zuordnen, so daß alle f_i dabei verwendet werden, eventuell sogar mehrfach, aber immer jedem u_i nur <u>genau ein</u> f_i entspricht; das heißt ja offenbar nichts anderes, als daß es "nicht mehr" Elemente f_i gibt, als u_i. Eine solche Zuordnung betrachten wir nun: |[208]

$$u_1|f_1, u_2|f_2, u_3|f_3\ldots,$$

und daraus werde ich eine neue Belegung g von $\mathcal{U}$ mit sich selbst bilden, die von allen f_i verschieden ist, also gar nicht in $\mathcal{F}$ enthalten wäre, da ja bei unserer Zuordnung alle Elemente von $\mathcal{F}$ zur Verwendung kommen sollten; da aber $\mathcal{F}$ alle möglichen Belegungen enthält, so haben wir hier den Widerspruch. Wir wenden wieder das Princip des Cantorschen Diagonalverfahrens an. In der Belegung f_1 entspreche dem Element u_1 dasjenige $u_{f_1^{(1)}}$:

$$f_1(u_1) = u_{f_1^{(1)}};$$

ist $u_{g^{(1)}}$ ein von $u_{f_1^{(1)}}$ verschiedenes Element, so ordnen wir in der neu zu konstruierenden Belegung g dies dem u_1 zu:

$$g(u_1) = u_{g^{(1)}} \neq u_{f_1^{(1)}}.$$

Nach diesem Princip verfahren wir weiter; die Bezeichnung der Elemente von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{F}$ durch Zahlenindices ist übrigens unwesentlich und soll nicht etwa andeuten, daß diese Mengen abzählbar sind, was keineswegs der Fall ist. Ist u_2 irgend ein Element von $\mathcal{U}$, so gehört ihm in der Abbildung von f auf u eine Belegung f_2 |[209] zu; wir suchen das Element $f_2(u_2) = u_{f_2^{(2)}}$, das sie dem u_2 zuordnet, wählen $u_{g^{(2)}} \neq u_{f_2^{(2)}}$ und definieren eine Belegung g, die dies dem u_2 zuordnet:

$$g(u_2) = u_{g^{(2)}} \neq u_{f_2^{(2)}}$$

Die Belegung g, die wir so erhalten, hat das Schema

$$g(u_1) = u_{g^{(1)}} \neq u_{f_1^{(1)}}, g(u_2) = u_{g^{(2)}} \neq u_{f_2^{(2)}}, g(u_3) = u_{g^{(3)}} \neq u_{f_3^{(3)}} \ldots$$

Sie unterscheidet sich von jeder Belegung f_k aus $\mathcal{F}$ in mindestens einer Zuordnung; ist nämlich u_k das in der Abbildung von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{U}$ dem f_k entsprechende Element (oder eines derselben), so ist nach der Definition von g:

$$f_k(u_k) = u_{f_k^{(k)}} \qquad g(u_k) = u_{g^{(k)}} \neq u_{f_k^{(k)}}.$$

Wir haben damit in der Tat den Widerspruch, daß die wohldefinierte Belegung g nicht in der Menge aller Belegungen enthalten sein könnte. Wir könnten ihn auch dahin formulieren, daß gemäß der letzten Betrachtung die Menge $\mathcal{U}^{\mathcal{U}}$ stets größer [von Hilberts Hand: von grösserer Mächtigkeit] als $\mathcal{U}$ ist, nach der ersten aber in $\mathcal{U}$ enthalten. Dieser Widerspruch ist noch keineswegs geklärt; es ist wohl zu sehen, daß er jedenfalls darauf beruhen muß, daß die Operationen des Zusammenfassens irgend welcher Mengen, Dinge zu |[210] neuen Mengen, Allheiten doch unerlaubt ist, obwohl es die traditionelle Logik doch stets gebraucht, und wir es in vorsichtiger Weise stets nur auf ganze Zahlen und daraus entstehende Mengen, also auf rein mathematisches anwandten.

Literatur[68]

[Abr89] Abrusci, Vito M.: David Hilbert's 'Vorlesungen' on logic and foundations of mathematics. In: Corsi, G. (Hrsg.) ; Mangione, C. (Hrsg.) ; Mugnai, M. (Hrsg.): *Atti del convegno internazionale de storia della logica, San Gimignano, 1987*, 1989, S. 333–338

[68]Bei der Literaturrecherche waren die digitalisieren Texte vieler älterer Zeitschriftenbeiträge, die über das Göttinger Digitalisierungs-Zentrum frei zugänglich sind, eine große Hilfe: `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/de/index.html`

[Ack28] Ackermann, Wilhelm: Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. In: *Mathematische Annalen* 99 (1928), S. 118–133

[Ber35] Bernays, Paul: Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik. In: *David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen* Bd. III, [Hil35]. Springer, 1935, S. 196–216

[Blu35] Blumenthal, Otto: Lebensgeschichte. In: *David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen* Bd. III, [Hil35]. Springer, 1935, S. 388–429

[Can97] Cantor, Georg: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In: *Mathematische Annalen* 46/49 (1895/97), S. 481–512, 207–246

[Can32] Cantor, Georg: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Herausgegeben von Ernst Zermelo, Springer, 1932

[Can91] Cantor, Georg: *Briefe*. Herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson, Springer, 1991

[Can0x] Cantini, Andrea: *Paradoxes, Self-Reference and Truth in the 20th Century*. 200x. – soll erscheinen in: *The Handbook of the History of Logic*, Volume 10 (D. Gabbay and J. Woods, editors). Der Artikel ist auf der Homepage des Verfassers verfügbar: `http://www.philos.unifi.it/materiali/preprint/index.htm`

[CF74] Curry, Haskell ; Feys, Robert: *Combinatory Logic*. Bd. I. 3. Auflage. North-Holland, 1974

[CHS72] Curry, Haskell ; Hindley, J. ; Seldin, Jonathan: *Combinatory Logic*. Bd. II. North-Holland, 1972

[CMT79] Calude, Cristian ; Marcus, Solomon ; Tevy, Ionel: The first example of a recursive function which is not primitve recursive. In: *Historia Mathematica* 6 (1979), S. 380–384

[Dal90] Dalen, Dirk van: The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the Mathematische Annalen. In: *Mathematical Intelligencer* 12 (1990), S. 17–31

[Fef00] Feferman, Solomon: Does Reductive Proof Theory Have a Viable Rationale? In: *Erkenntnis* 53 (2000), Nr. 1–2, S. 63–96

[Fer99] Ferreirós, José: *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, 1999

[Fra27] Fraenkel, A.: *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*. Teubner, 1927 (Wissenschaft und Hypothese, XXXI). – Reprint Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1972

[Fra28] Fraenkel, A.: *Einleitung in die Mengenlehre*. 3. Auflage. Springer, 1928

[Fre03] Frege, Gottlob: *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschriftlich abgeleitet*. Bd. 2. Hermann Pohle, Jena, 1903. – Nachgedruckt zusammen mit Band 1, Olms, Hildesheim 1966

[Fre76] Frege, Gottlob: *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Herausgegeben von Gottfried Gabriel et al., Meiner, 1976

[Gar92] Garciadiego, Alejandro R.: *Bertrand Russell and the Origins of the Set-theoretic 'Paradoxes'*. Birkhäuser, 1992

[Gen43] Gentzen, Gerhard: Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. In: *Mathematische Annalen* 119 (1943), Nr. 1, S. 140–161

[GG78] Grattan-Guinness, Ivor: How Bertrand Russell discovered his paradox. In: *Historia Mathematica* 5 (1978), S. 127–137

[Göd30] Gödel, Kurt: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. In: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37 (1930), S. 349–360. – Hier zitiert nach [Göd86].

[Göd31] Gödel, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. In: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), S. 173–198. – Hier zitiert nach [Göd86].

[Göd86] Gödel, Kurt: *Collected Works*. Bd. I. Herausgegeben von Solomon Feferman et al., Oxford University Press, 1986

[HA28] Hilbert, David ; Ackermann, Wilhelm: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer, 1928

[HB34] Hilbert, David ; Bernays, Paul: *Grundlagen der Mathematik I*. Springer, 1934 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 40). – 2. Auflage 1968.

[HB39] Hilbert, David ; Bernays, Paul: *Grundlagen der Mathematik II*. Springer, 1939 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 50). – 2. Auflage 1970.

[Hei67] Heijenoort, Jean van (Hrsg.): *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Harvard University Press, 1967

[Hes06] Hessenberg, Gerhard: Grundbegriffe der Mengenlehre. In: *Abhandlungen der Fries'schen Schule, n. s.* 1 (1906), S. 479–706

[Hil98] Hilbert, David: *Zahlbegriff und Quadratur des Kreises*. Handschriftliche Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 1897/98, (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 549), 1897/98

[Hil99] Hilbert, David: Grundlagen der Geometrie. In: *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, herausgegeben vom Fest-Comitee*. Teubner, 1899, S. 1–92

[Hil00a] Hilbert, David: Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. In: *Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse* (1900), S. 53–297

[Hil00b] Hilbert, David: Über den Zahlbegriff. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8 (1900), S. 180–184

[Hil05a] Hilbert, David: *Logische Principien des mathematischen Denkens*. Vorlesung Sommersemester 1905, Ausarbeitung von Ernst Hellinger (Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen), 1905

[Hil05b] Hilbert, David: *Logische Principien des mathematischen Denkens*. Vorlesung Sommersemester 1905, Ausarbeitung von Max Born (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 558a), 1905

[Hil05c] Hilbert, David: Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. In: Krazer, Adolf (Hrsg.): *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Leipzig, 1905, S. 174–185

[Hil10] Hilbert, David: *Elemente und Prinzipienfragen der Mathematik*. Vorlesung Sommersemester 1910, Ausarbeitung von Richard Courant (Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen), 1910

[Hil15] Hilbert, David: *Probleme und Prinzipien der Mathematik*. Handschriftliche Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 1914/15, (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 559), 1914/15

[Hil17] Hilbert, David: *Mengenlehre*. Vorlesung Sommersemester 1917, Ausarbeitung (Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen), 1917

[Hil18] Hilbert, David: Axiomatisches Denken. In: *Mathematische Annalen* 78 (1918), Nr. 3/4, S. 405–415

[Hil20] Hilbert, David: *Probleme der mathematischen Logik*. Vorlesung Sommersemester 1920, Ausarbeitung von N. Schönfinkel und P. Bernays (Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen), 1920

[Hil26] Hilbert, David: Über das Unendliche. In: *Mathematische Annalen* 95 (1926), S. 161–190

[Hil35] HILBERT, David: *Gesammelte Abhandlungen.* Bd. III: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Lebensgeschichte. Springer, 1935. – 2. Auflage 1970.

[HM04] HALLETT, Michael (Hrsg.) ; MAJER, Ulrich (Hrsg.): *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891–1902.* Springer, 2004 (David Hilbert's Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics, 1891–1933, 1)

[Hod98] HODGES, Wilfrid: An editor recalls some hopeless papers. In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 4 (1998), Nr. 1, S. 1–16

[Kan04] KANAMORI, Aki: Zermelo and set theory. In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 10 (2004), Nr. 4, S. 487–553

[Kön05a] KÖNIG, J.: Zum Kontinuum Problem. In: KRAZER, Adolf (Hrsg.): *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904.* Leipzig, 1905, S. 144–147. – Auch abgedruckt als [Kön05b]

[Kön05b] KÖNIG, J.: Zum Kontinuum Problem. In: *Mathematische Annalen* 60 (1905), S. 177–180. – Berichtigung, *ibid.*, S. 462

[Man99] MANCOSU, Paolo: Between Russell and Hilbert: Behmann on the Foundations of Mathematics. In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1999), Nr. 3, S. 303–330

[Mes85] MESCHKOWSKI, Herbert: *Wandlungen des mathematischen Denkens.* 5. Auflage. Piper, 1985. – 1.–4. Auflage erschienen im Vieweg-Verlag

[MG81] MOORE, Gregory ; GARCIADIEGO, Alejandro: Burali-Forti's Paradox: A Reappraisal of Its Origins. In: *Historia Mathematica* 8 (1981), S. 319–350

[Moo02] MOORE, Gregory H.: Hilbert on the Infinite: The Role of Set Theory in the Evolution of Hilbert's Thought. In: *Historia Mathematica* 29 (2002), S. 40–64

[Mos74] MOSCHOVAKIS, Yiannis: *Elementary induction on abstract structures.* North-Holland, 1974

[Neu28] NEUMANN, Johann von: Die Axiomatisierung der Mengenlehre. In: *Mathematische Zeitschrift* 27 (1928), S. 669–752. – Hier zitiert nach dem Wiederabdruck in [Neu61, S. 339–422]

[Neu61] NEUMANN, John von: *Collected Works.* Bd. I. Pergamon Press, 1961

[Pea06] PEANO, G.: Super theorema de Cantor-Bernstein et additione. In: *Rivista di Matematica* 8 (1906), S. 136–157

[Pec90] PECKHAUS, Volker: *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie.* Vandenhoeck & Ruprecht, 1990 (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, 7)

[Pec95] PECKHAUS, Volker: The Genesis of Grelling's Paradox. In: MAX, Ingolf (Hrsg.) ; STELZNER, Werner (Hrsg.): *Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium Jena 1993.* de Gruyter, 1995 (Perspectives in Analytical Philosophy, 5), S. 269–280

[Pec04] PECKHAUS, Volker: Paradoxes in Göttingen. In: LINK, Godehard (Hrsg.): *One Hundred Years of Russell's Paradox.* de Gruyter, 2004 (de Gruyter Series in Logic and Its Applications, 6), S. 501–515

[PI87] PURKERT, Walter ; ILGAUDS, Hans J.: *Georg Cantor 1845–1918.* Birkhäuser, 1987 (Vita Mathematica, 1)

[PK02] PECKHAUS, Volker ; KAHLE, Reinhard: Hilbert's Paradox. In: *Historia Mathematica* 29 (2002), Nr. 2, S. 157–175

[Poi06] POINCARÉ, H.: Les mathématiques et la logique. In: *Revue de Métaphysique et de Morale* 14 (1906), S. 294–317. – 3. Teil (von 3).

[Poi10] POINCARÉ, Henri: Über transfinite Zahlen. In: *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik.* Teubner, 1910, S. 43–48

[Poi13] Poincaré, Henri: *Letzte Gedanken*. 1913

[Ric05] Richard, Jules: Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. In: *Revue générale des sciences pures et appliquées* 16 (1905), S. 541

[RT81] Rang, Bernhard ; Thomas, W.: Zermelo's Discovery of the 'Russell Paradox'. In: *Historia Mathematica* 8 (1981), S. 15–22

[Rus03] Russell, Bertrand: *The Principles of Mathematics*. Bd. I. The University Press, Cambridge, 1903

[Rus06] Russell, Bertrand: Les paradoxes de la logique. In: *Revue de Métaphysique et de Morale* 14 (1906), S. 627–650

[Rus78] Russell, Bertrand: *Autobiographie II, 1914–1944*. 2. Auflage. suhrkamp, 1978

[Sch06] Schönflies, A.: Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre. In: *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15 (1906), S. 19–25

[Sch11] Schoenflies, A.: Über die Stellung der Definition in der Axiomatik. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 20 (1911), S. 222–255

[Sch22] Schoenflies, A.: Zur Erinnerung an Georg Cantor. In: *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31 (1922), S. 97–106

[Sch24] Schönfinkel, Moses: Über die Bausteine der mathematischen Logik. In: *Mathematische Annalen* 92 (1924), S. 305–316

[Sch60] Schütte, Kurt: *Beweistheorie*. Springer, 1960

[Sch77] Schütte, Kurt: *Proof Theory*. Springer, 1977

[Sie99] Sieg, Wilfried: Hilbert's programs: 1917-1922. In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1999), Nr. 1, S. 1–44

[Sie00] Sieg, Wilfried: Towards finitist proof theory. In: Hendricks, V. (Hrsg.) ; Pedersen, S. (Hrsg.) ; Jørgensen, K. (Hrsg.): *Proof Theory — History and Philosophical Significance*. Kluwer, 2000 (Synthese Library, 292), S. 95–114

[Sud27] Sudan, Gabriel: Sur le nombre tranfini ω^ω. In: *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences* Janvier–Juin 30 (1927), S. 11–30

[Sza69] Szabo, M. E. (Hrsg.): *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. North-Holland, 1969

[Thi95] Thiel, Christian: Cantorsche Antinomie. In: Mittelstrass, Jürgen (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosphie und Wissenschaftstheorie* Bd. 1. Metzler, 1995

[Wey18] Weyl, Hermann: *Das Kontinuum*. Leipzig, 1918

[WR13] Whitehead, Alfred N. ; Russell, Bertrand: *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, 1910–13. – 3 Bände. 1. Auflage

[Zer08] Zermelo, Ernst: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. In: *Mathematische Annalen* 65 (1908), S. 261–281

[Zer30] Zermelo, Ernst: Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. In: *Fundamenta Mathematicae* 16 (1930), S. 29–47

Reinhard Kahle
Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, P–3001-454 Coimbra, Portugal

E-mail address: kahle@mat.uc.pt
URL: http://www.mat.uc.pt/~kahle