Pré-Publicações do Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Preprint Number 23–08

FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM MODELAÇÃO MATEMÁTICA COM TRILHOS DE MATEMÁTICA DIGITAIS

JAIME CARVALHO E SILVA

Abstract: The initial training of mathematics teachers must include some preparation of future teachers in the area of digital technologies, and it is interesting that some of it can help to pedagogically explore applications and mathematical modeling in the classroom. This communication investigates whether the work in initial teacher training with Mathematical Trails based on digital tools has the potential to enter classroom practice when teachers start teaching in their Pedagogical Internship in a school. The work was done with 11 future teachers in a course of initial training and it was then studied what they implemented in the school from their Internship Reports. We concluded that all of them implemented Mathematics Trails in their schools, three of them did not use digital tools and four of them went far beyond what was taught and achieved international recognition for their work.

Keywords: Mathematics Education, ICT, Mathematical modeling, Math Trails.
AMS Subject Classification (2010): 97M10 (97N80, 97M50).

1. Introdução

As aplicações e a modelação matemática são um tema cada vez mais discutido a propósito dos currículos escolares em todo o mundo. Em geral considera-se que as aplicações e a modelação matemática devem ser uma componente indispensável de qualquer currículo escolar. Num dos mais recentes relatórios da OCDE podemos ler:

> O objetivo geral do projeto OECD Future of Education and Skills 2030 (E2030) é olhar para o futuro em termos de como os currículos escolares devem evoluir, dados os avanços tecnológicos e outras mudanças que as sociedades enfrentam agora. Nesse sentido, o projeto E2030 centra-se na ideia de que a educação precisa equipar os alunos com os conhecimentos, habilidades

Received April 17, 2023.
Paper accepted for the International Conference "IX CIBEM-Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 5-9 de dezembro de 2022" (online) and to appear in the Proceedings. This work was partially supported by the Centre for Mathematics of the University of Coimbra - UIDB/00324/2020, funded by the Portuguese Government through FCT/MCTES.

> ('skills'), atitudes e valores de que precisam para se tornarem cidadãos ativos, responsáveis e empenhados [15].

Estamos efetivamente num mundo cada vez mais exigente e onde a matemática é uma ferramenta incontornável para lidar com as informações na nossa época. William H. Schmidt e seus colaboradores defendem que o nosso tempo:

> ... requer alfabetização matemática, de modo que uma pessoa seja capaz de compreender a informação que é cada vez mais de natureza numérica e muitas vezes apresentada em forma gráfica ou tabular [15].

E desenvolvem esta ideia com alguns exemplos retirados da recente pandemia de COVID-19, para concluir que:

> A educação matemática deve continuar a fornecer a todas as crianças as ideias formais, conceitos, algoritmos e procedimentos que definem a matemática formal, mas também se deve concentrar em fornecer aos alunos oportunidades de experimentar o raciocínio quantitativo (incluindo raciocínio matemático, estatístico, geométrico e algorítmico) na resolução de aplicações do mundo real [15].

O ensino das aplicações e da modelação matemática levanta muitas dificuldades, como referem por exemplo S. Schukajlow e Werner Blum na sua apresentação ao congresso internacional de educação matemática ICME-14 (2021):

> Apesar da importância da capacidade de resolver problemas de modelação para a vida dos alunos, vários estudos têm demonstrado que estudantes de todo o mundo têm dificuldades consideráveis em resolver problemas de modelação [16].

Assim, faz todo o sentido perceber em que medida os recursos tecnológicos poderão ajudar a explorar pedagogicamente as aplicações e a modelação matemática. Por outro lado, tem sido proposto com frequência que se desenvolvam Trilhos Matemáticos. Segundo Henri Pollak e seus colaboradores, um Trilho Matemático é tão somente um passeio para descobrir Matemática ([17]). Existem trilhos em várias partes do mundo e eles são organizados com objetivos variados, mas sempre para descobrir matemática onde muitos pensavam que não existiria (ver [10] e [11]). Por isso é uma possibilidade utilizar tecnologia para ajudar a desenvolver Trilhos Matemáticos.

Education in the digiTal Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020 (2020) 197-200.
[6] Carvalho e Silva, J., *Promoting Mathematics Literacy in Europe*, in Pope, S. (Ed.) Informal Proceedings of the 9th British Congress of Mathematics Education (2018) 118-121.
[7] Carvalho e Silva, J., *What international studies say about the importance and limitations of using computers to teach Mathematics in secondary schools*, Intelligent Computer Mathematics, Lecture Notes in Computer Science, Volume 8543, 2014, pp 1-11.
[8] Even, R., Ball, D.L., *Setting the Stage for the ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*, In: Even, R., Ball, D.L. (eds) The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. New ICMI Study Series, vol 11. Springer, Boston, MA, 2009.
[9] Jablonski, S., Lázaro del Pozo, C., Ludwig, M., & Recio Muniz, T., *MathCityMap, paseos matemáticos a través de dispositivos móviles*, Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, 087 (2020) 47-54.
[10] Latas, J., Carvalho e Silva, J., *Os trilhos como recurso de educação científica em contexto não formal*, in XIX Encontro Nacional de Educação em Ciências (2021) 101-103.
[11] Latas, J., Rodrigues, A., *Trilho da Ciência: um percurso de Educação Científica na ilha do Príncipe*, Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8 (2015) 53-75.
[12] Ludwig, M., Jesberg, J., *Using Mobile technology to provide Outdoor Modelling Tasks - The MathCityMap-Project*, in Procedia Proceedings of WCES: Elsevier. (2015) 2776-2781.
[13] Rosendo, A. I., & Carvalho e Silva, J. , *Computers in Mathematics Education - An Experience*, Electronic Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Orlando, Florida, November 17-20, 1994, Paper C015.
[14] Schmidt, W. H., Tatto, M.T., Bankov, K., Blomek, S. et al., *The Preparation Gap: Teacher Education for Middle School Mathematics in Six Countries*, (Mathematics Teaching in the 21st century (MT21)). East Lansing: MSU Center for Research in Mathematics and Science Education, 2007.
[15] Schmidt, W. H., Houang, R. T., Sullivan, W. F. & Cogan, L. S., *When practice meets policy in mathematics education: A 19 country/jurisdiction case study*, (Vol. 268). Paris: OECD, 2022.
[16] Schukajlow, S., Blum, W., *Teaching methods for modelling problems*, in ICME-14 TSG 22: Mathematical applications and modelling in mathematics education, Beijing, July 13th 2021.
[17] Shoaf, M., Pollak, H. & Scheider, J., *Math trails*, COMAP, 2004.
[18] Taranto, E., Jablonski, S., Recio, T., Mercat, C., Cunha, E., Lázaro, C., Ludwig, M., et al., *Professional Development in Mathematics Education - Evaluation of a MOOC on Outdoor Mathematics*, Mathematics (2021) 9(22), 2975. MDPI AG.
[19] Wijers, M., Jonker, V., & Drijvers, P., *Exploring mathematics outside the classroom*, ZDM Mathematics Education (2010) 789-799.
[20] Zender, J., Gurjanow, I., Cahyono, A. N., & Ludwig, M., *New studies in mathematics trails*, International Journal of Studies in Education and Science (2020) 1(1), 1-14.

Jaime Carvalho e Silva
CMUC, Department of Mathematics, University of Coimbra, 3001-501 Coimbra, Portugal
E-mail address: jaimecs@mat.uc.pt
URL: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/

2. Formação inicial de professores de matemática

A formação inicial de professores de matemática tem sido objeto de muito debate e investigação; um marco importante é o 15° estudo do ICMI intitulado "The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics" ([8]). Destaco também um estudo comparativo de 19 países, coordenado por William H. Schmidt, que concluiu que, para além da formação científica, os futuros professores nos países com mais sucesso são expostos a muitas "experiências de aprendizagem" em "pedagogia prática". Esse estudo conclui que devem existir "oportunidades educacionais numerosas em matemática e nos aspetos práticos do ensino da matemática" ([14]).

O uso de tecnologias para melhorar o ensino da Matemática deve pois inserir-se nesta linha, de proporcionar "experiências de aprendizagem" aos futuros professores para que estes as integrem mais tarde na sua prática letiva. E como pretendemos que as tecnologias ajudem os futuros professores a trabalhar as aplicações e a modelação matemática na sua formação precisamos de desenhar "experiências de aprendizagem" com tecnologia no contexto das aplicações e modelação matemática.

Há mais de 30 anos que no Departamento de Matemática existe uma disciplina com o objetivo de preparar os futuros professores de Matemática do 3° ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário para utilizar as tecnologias na sua futura atividade profissional ([13]). Mas as tecnologias vão evoluindo e todos os anos é forçoso encarar novos desafios. A partir de 2020 pretendi investigar em que medida os futuros professores conseguem ganhar na sua formação suficiente à vontade com o uso de software matemático (apliquetas) nos telemóveis, para os usar mais tarde na sua atividade profissional, tentando perceber se a tecnologia móvel fornece "experiências de aprendizagem" significativas no contexto das aplicações e modelação matemática.

Em 2020/2021, um total de 11 estudantes, futuros professores de matemática, estudaram o software MathCityMap em moldes que serão descritos a seguir. No ano seguinte foram estagiar em diversas Escolas Secundárias. Foi-lhes pedido que utilizassem esse software com os alunos das escolas onde iriam estagiar, mas sem qualquer orientação suplementar.

Neste trabalho pretendemos fazer um relatório do que aconteceu no ano letivo 2021/2022 com esses 11 estudantes estagiários e futuros professores de Matemática. Os estudantes são genericamente designados por "estagiários" sendo que 8 eram do sexo feminino e 3 do sexo masculino.

FIGURE 1. Estudantes do 1° ano do Mestrado em Ensino em 2020/2021

Na disciplina da formação inicial de 2020/2021 havia 11 estudantes que criaram páginas pessoais, com o software livre SEA MONKEY, que ainda estão disponíveis aqui:

http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mce21/alunos.html

As aulas decorreram em formato híbrido numa sala com computadores suficientes para todos os estudantes.

3. MathCityMap

Todos os estudantes e também o docente da disciplina frequentaram com sucesso o curso online "Task Design for Math Trails", criado sob responsabilidade do projeto europeu MASCE3 - Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe. O docente da disciplina conhecia o projeto, mas não conhecia o curso nem tinha alguma vez utilizado o software; o curso online foi oferecido pela primeira vez em 2021.

Neste curso (com o formato de um MOOC e por isso sem interação direta com os responsáveis) todos aprenderam a construir trilhos matemáticos com a ajuda de um software desenhado pela equipa do projeto. Um trilho é constituído por um conjunto de tarefas dirigidas a alunos de um determinado ano de escolaridade e cada tarefa tem de ser aprovada pela equipa do projeto antes de poder ser utilizada. Cada tarefa é realizada num determinado local da escola ou da cidade (pode ser um parque, um jardim, uma praça ou mesmo uma simples rua). Cada tarefa inclui uma questão a ser resolvida com dados recolhidos no local e o software permite que sejam fornecidas sugestões aos utilizadores ou mesmo que a tarefa seja dividida em subtarefas. É natural que, para realizar uma tarefa com sucesso, seja necessário efetuar medições no local, seja necessário efetuar estimativas de medidas de objetos inacessíveis a partir das de outros objetos acessíveis, que seja necessário contar elementos de objetos, etc.

Este Núcleo de Estágio também candidatou a escola a Escola Parceira do MathCityMap o que foi aprovado pela organização internacional.

Vemos assim que todos os 11 estagiários implementaram Trilhos Matemáticos na escola onde estagiaram, com um sucesso total. Os Trilhos Matemáticos cumpriram a sua função de levar os alunos a sair da sala de aula e explorar o mundo à sua volta com uma visão matemática.

5. Conclusões

Tal como observaram Barbosa e Vale ([1]) os trilhos do MathCityMap têm o potencial de ajudar o ensino e de desencadear atitudes positivas perante a Matemática envolvendo os alunos de forma direta e ativa. Estes também passam a encarar a Matemática de outro modo, reconhecendo que a matemática está à sua volta na vida de todos os dias.

Este fenómeno verificou-se duplamente na experiência aqui descrita, sendo que a principal conclusão é a de que os estagiários, com a sua participação ativa na disciplina da formação inicial, conseguiram transpor essa atividade para as escolas onde estagiaram, levaram os seus alunos a trabalhar a matemática de forma ativa, indo até por vezes mais além do que o que se poderia esperar, candidatando duas escolas a "Escola Parceira" do MathCityMap, divulgando entre os outros professores os Trilhos Matemáticos e inclusive fazendo uma sessão de formação para outros professores.

Podemos, pois, concluir que os telemóveis e as apliquetas matemáticas usadas pelos futuros professores de Matemática fornecem "experiências de aprendizagem" significativas no contexto das aplicações e modelação matemática, encorajam os futuros professores de Matemática a levá-las para as suas salas de aula, e depois os seus próprios alunos também vivem as mesmas "experiências de aprendizagem" significativas.

References

[1] Barbosa, A., Vale, I., *Math Trails: Meaningful Mathematics Outside the Classroom with Pre-Service Teachers*, Journal of the European Teacher Education Network 11 (2016) 63-72.

[2] Barbosa, A., Vale, I., *Matemática Fora da Sala de Aula com o MathCityMap*, Interacções 18 (2022) 122-144.

[3] Barlovits, S., Jablonski, S., Lázaro, C., Ludwig, M., & Recio, T., *Teaching from a Distance - Math Lessons during COVID-19 in Germany and Spain*, Education Sciences 11 (2021) 1-17.

[4] Cahyono, A.N., Sukestiyarno, Y.L., Asikin, M., Miftahudin, Ahsan, M.G.K., & Ludwig, M., *Learning Mathematical Modelling with Augmented Reality Mobile Math Trails Program: How Can It Work?*, Journal on Mathematics Education 11 (2020) 181-192.

[5] Caldeira, A., Viamonte, A. J., Figueiredo, I. & Brás, H., *Using Math Trails as a Travel Guide*, in M. Ludwig, S. Jablonski, A. Caldeira, & A. Moura (Eds.), Research on Outdoor STEM

e disponibilizaram a todos os professores presentes. Uma grande maioria dos professores presentes considerou a formação muito boa e entende que é aplicável na prática escolar e não apenas para a disciplina de matemática. Este Núcleo de Estágio candidatou a escola a Escola Parceira do MathCityMap, o que foi aceite pela organização internacional e assim abriu portas a uma futura cooperação internacional entre escolas que usem o MathCityMap.

iii) Núcleo C de dois estagiários

Construiram um novo trilho com nove tarefas, adequadas à cidade onde estiveram a estagiar (ver primeira figura da tabela 1). O seu objetivo era mostrar aos alunos as conexões entre a matemática e o quotidiano, estabelecendo uma ponte entre os conteúdos matemáticos trabalhados na sala de aula e a realidade exterior.

Como os alunos eram do 7° ano de escolaridade, os estagiários desafiaram os seus alunos a realizarem o Trilho com as suas famílias e amigos durante uma semana. Cerca de 50 alunos realizaram o Trilho, o que os estagiários puderam comprovar através da sala de aula digital do MathCityMap. Os alunos tiveram assim oportunidade de praticar matemática fora da sala de aula e aumentar o gosto pela matemática. Os estagiários disponibilizaram o trilho aos restantes professores da escola para que o possam vir a utilizar futuramente.

iv) Núcleo D de dois estagiários

Os estagiários elaboraram um Trilho com sete tarefas para alunos do 9° ano de escolaridade onde incluíram temas como parábolas, elipses, perímetros, áreas e volumes. Todas as tarefas eram realizadas sem sair do perímetro da escola, foram feitas com grupos de 3 ou 4 alunos e a atividade teve uma duração de 90 minutos. Os estagiários apresentaram um inquérito aos alunos e estes acharam esmagadoramente que o tema e o Trilho eram bons ou muito bons e que aprenderam matemática com o Trilho.

v) Núcleo E de um estagiário

Este Núcleo, apesar de ter apenas um estagiário não foi menos ativo que os outros no que diz respeito ao MathCityMap. O estagiário elaborou três trilhos diferentes para três grupos de alunos diferentes do 10° e 11° anos de escolaridade, divididos em grupos de 4 ou 5 alunos. Todos os trilhos se podiam realizar sem sair do recinto da escola. O estagiário escreveu no seu relatório que "os alunos ficaram muito entusiasmados com os trilhos e foram bastante participativos por ser uma atividade diferente e cativante."

Realizar um trilho é realizar cada uma das tarefas que constituem o trilho. Quem constrói o trilho pode obrigar a que sejam feitos por uma ordem fixa ou pode deixar que sejam feitos por uma ordem à escolha do estudante.

TABLE 1. Trilhos e tarefas do MathCityMap

O software MathCityMap inclui um portal de edição onde se podem criar trilhos e tarefas, mas também permite ativar uma sala de aula digital onde, ao concretizar um trilho com os alunos, é possível seguir o trabalho de cada grupo de alunos e perceber que dificuldades estão a ter[1].

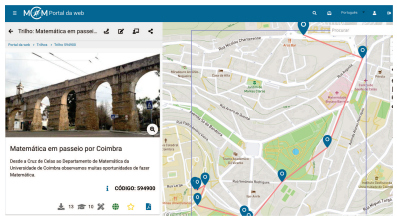

FIGURE 2. Portal do MathCityMap

O portal tem várias ferramentas para ajudar as pessoas a construírem o seu trilho. Uma das ferramentas do software é um mapa onde se pode ver a localização geográfica de cada tarefa, se pode ver qual o comprimento total do trilho e ainda a lista de todas as tarefas de cada trilho.

[1]https://mathcitymap.eu/pt/

No âmbito da disciplina de formação inicial, todos os estudantes tiveram de construir um trilho com um mínimo de oito tarefas; essa construção foi várias vezes discutida em sala de aula; a maioria dos estudantes participou numa aula no exterior em que testaram no local algumas das tarefas de um dos trilhos produzidos por um dos estudantes.

No final da disciplina os estudantes foram incentivados a usarem aqueles ou outros trilhos no seu ano de estágio.

FIGURE 3. Estudantes de 2020/2021 a testar um trilho na Universidade

A questão era, pois, de saber quantos estudantes iriam fazer alguma atividade deste tipo com os alunos das escolas onde iriam estagiar e como a iriam orientar.

Todo o projeto por detrás da construção do software MathCityMap pretendia levar professores e alunos a realizarem tarefas de modelação fora da sala de aula ([12], [19], [20]) de modo a que os alunos olhassem para o mundo que os rodeia de modo diferente. O uso dos telemóveis com GPS iria permitir que tarefas previamente construídas pudessem ser usadas nos locais apropriados. Muitos alunos podem não ter telemóveis com GPS, mas como as tarefas são desenhadas para serem realizadas em grupo, basta que haja um telemóvel por cada grupo de alunos.

4. Análise da reação dos estudantes

Terminado o ano letivo de 2021/2022 foi possível ver como os estudantes de 2020/2021 levaram o que aprenderam para a escola onde estagiaram. Como os estudantes tiveram de escrever e defender em provas públicas o relatório do seu estágio, podemos agora elencar com algum detalhe o que aconteceu em 2021/2022 nas cinco escolas onde houve estágios. Por diversas razões os estudantes de 2020/2021 estiveram distribuídos pelas escolas em grupos, designados por Núcleos de Estágio, desiguais. Assim, havia dois Núcleos com

três estagiários cada, dois Núcleos com dois estagiários cada e um Núcleo apenas com um estagiário. Analisemos o que se passou em cada Núcleo.

i) Núcleo A de três estagiários

Os estagiários planearam três trilhos diferentes dirigidos cada um a um ano de escolaridade diferente (7°, 8° e 9° ano de escolaridade) para que "explorassem a Matemática existente na Escola". Decidiram não usar tecnologia por dificuldades no acesso à internet dentro da escola e porque preferiram não sair da escola pois teriam de pedir a autorização dos pais para isso.

ii) Núcleo B de três estagiários

Este foi o Núcleo de Estágio que mais aprofundou o trabalho com o MathCityMap. Começou por recolher um conjunto de tarefas realizadas no ano anterior e construiu um novo trilho, a que chamou "Uma Aventura Matemática", com oito tarefas e um comprimento total de 2,5 km. Os estagiários conseguiram autorização para os seus alunos (do 10° ano de escolaridade) percorreram a cidade para realizar a tarefa; os alunos foram divididos em 5 grupos e receberam pontuações conforme o número de tentativas para responder corretamente às tarefas e o número de ajudas a que recorreram. Os estagiários elaboraram um questionário online para os alunos darem a sua opinião sobre o trilho que fizeram. Todos os alunos gostaram de uma atividade tão diferente do habitual e a maioria acha que ajudou a consolidar os conhecimentos matemáticos. O objetivo declarado dos estagiários era de mostrar aos alunos que a matemática está em todo o lado e esse parece ter sido um objetivo conseguido.

Mais tarde construíram novo trilho com 10 tarefas em vários locais da cidade e com uma extensão de 3,7 km. Duas turmas do 10° ano e 11° ano de escolaridade realizaram este trilho; estas turmas eram da área de Humanidades. No final os estagiários elaboraram um inquérito e puderam verificar que a grande maioria dos estudantes gostou das tarefas propostas, achou que aprendeu matemática e pretende ter mais atividades como esta. Mais uma vez os alunos fizeram vários comentários, como por exemplo: "Eu gostei da atividade pois foi bom para relembrar conceitos matemáticos e foi um jeito de ver a matemática no dia a dia".

Mas este Núcleo de Estágio não se ficou por aqui e promoveu uma sessão de formação para professores de outra escola, com a duração de duas horas, onde mostrou como funciona o software MathCityMap e como pode ser usado para ensinar matemática. Todos os professores tinham o seu próprio computador e elaboraram uma tarefa que depois os estagiários compilaram