Pré-Publicações do Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Preprint Number 23–09

TRABALHO COM TRILHOS DE MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

JAIME CARVALHO E SILVA

Abstract: Mathematics Trails are considered, by a growing number of educators, to be a very important tool for students to work with mathematical concepts in real-life problems and contexts, namely in a STEM or STEAM context. From 2012 onwards, an European project developed digital tools to build, execute and monitor Mathematical Trails, with a remarkable success. In this work, we intend to understand how to incorporate these new digital tools in the initial training of Mathematics teachers in Basic Education and Secondary Education, with a view to improve the Teaching of Mathematics in a positive way, integrating innovative digital tools which these future teachers did not know, nor could they have known, when they themselves were students of these levels of education.

Keywords: Mathematics trails, MathCityMap, Digital Tools, Preservice Training of Math Teachers, STEAM Methodology.
AMS Subject Classification (2010): 97M10 (97N80, 97M50, 97U80).

1. Trilhos Matemáticos na escola e na formação inicial de professores de Matemática

Uma das respostas que o sistema educativo tem dado à rejeição da Matemática por parte de muitos alunos tem sido a de os levar para fora da sala de aula de modo a que os jovens, nas palavras de Alessandra King, "explorem, descubram, apreciem e celebrem os conceitos matemáticos e os problemas em contextos da vida real" ([10]). Os Trilhos Matemáticos têm sido propostos e utilizados com cada vez maior frequência nos últimos 20 anos. Segundo Henri Pollak e seus colaboradores, um Trilho Matemático é um passeio para descobrir Matemática ([15]) e pode ser levado a cabo em quase qualquer lugar. Um Trilho Matemático pode ser explorado por um só indivíduo, em grupo ou com a família. Têm sido construídos trilhos em várias partes do mundo para vários tipos de públicos, mas sempre para descobrir matemática onde muitos não pensariam que existisse; por exemplo, Latas & Rodrigues ([12]) e Latas

Received April 17, 2023.
Paper accepted for the International Conference "VPCT2022 (A voz dos professores de C&T Encontro Internacional)" (online) and to appear in the Proceedings. This work was partially supported by the Centre for Mathematics of the University of Coimbra - UIDB/00324/2020, funded by the Portuguese Government through FCT/MCTES.

& Carvalho e Silva ([11]) referem um trilho construído em S.Tomé e Príncipe, onde foram utilizados elementos culturais locais, no contexto da construção de cestos, para explorar aspetos matemáticos escolares (com inspiração na Etnomatemática).

Numa época em que a Tecnologia nos fornece cada vez mais ferramentas úteis, é natural ter surgido a ideia de utilizar tecnologia para ajudar a desenvolver Trilhos Matemáticos e até para lhes alargar as possibilidades de desenvolvimento e diversificação. Nasceu assim em 2012 na Universidade Goethe de Frankfurt o projeto europeu MathCityMap ([13]) que desenvolveu um software base de construção e gestão de Trilhos Matemáticos e uma apliqueta para telemóvel que permite percorrer os trilhos, onde quer que haja ligação à internet (fixa ou móvel) ([9]).

O projeto MathCityMap tem tido um sucesso notável tanto na Alemanha, onde nasceu, como na Indonésia ([18]), em Espanha ([9]) ou em Portugal ([5]) e ([3]).

O uso de trilhos Matemáticos permite ir além de uma mera utilização de tecnologia na aula de Matemática de uma forma limitada, fomentando uma integração eficaz e relativamente simples de disciplinas na perspetiva da metodologia STEAM (Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática). Um dos muitos exemplos das atividades desenvolvidas é retratado nos artigos da conferência internacional "Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age"[1].

A formação inicial de professores deve antecipar alterações curriculares e incorporar as novas perspetivas e ferramentas que vão sendo desenvolvidas. Na Universidade de Coimbra já existe há mais de 20 anos no Departamento de Matemática uma disciplina virada para o uso das TIC em contexto escolar ([14]). É pois natural que ferramentas digitais inovadoras e com provas dadas sejam incluídas na formação inicial de professores à medida que vão sendo criadas. Procura-se neste momento responder a duas questões que se pretende possam ser indicadoras da eficácia da incorporação destas ferramentas digitais inovadoras (e promotoras de uma aprendizagem fora da sala de aula) num contexto de formação inicial de futuros professores de Matemática do 3° ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário:

a) Os futuros professores conseguem levar para as escolas onde irão estagiar os ensinamentos obtidos nas unidades curriculares?

[1]https://www.wtm-verlag.de/m-ludwig-s-jablonski-a-caldeira-and-a-moura-editors-research-on-outdoor-stem-education-in-the-digital-age/

[3] Barbosa, A., Vale, I., *Exploring the Potential of the Outdoors with Digital Technology in Teacher Education*, in A. Reis et al. (Eds.): TECH-EDU 2020, CCIS 1384 (2021) 32-43, 2021.
[4] Cahyono, A.N., Sukestiyarno, Y.L., Asikin, M., Miftahudin, Ahsan, M.G.K., & Ludwig, M., *Learning Mathematical Modelling with Augmented Reality Mobile Math Trails Program: How Can It Work?*, Journal on Mathematics Education 11 (2020) 181-192.
[5] Caldeira, A., Viamonte, A. J., Figueiredo, I. & Brás, H., *Using Math Trails as a Travel Guide*, in M. Ludwig, S. Jablonski, A. Caldeira, & A. Moura (Eds.), Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020 (2020) 197-200.
[6] Carvalho e Silva, J., *What international studies say about the importance and limitations of using computers to teach Mathematics in secondary schools*, Intelligent Computer Mathematics, Lecture Notes in Computer Science, Volume 8543, 2014, pp 1-11.
[7] Carvalho e Silva, J., *Formação de futuros professores de Matemática em modelação matemática com Trilhos de Matemática digitais*, in IX Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática - CIBEM 2022. 05/12/2022 - 09/12/2022 (em curso de publicação nas Atas).
[8] Gurjanow, I., *Manual of the Digital Classroom MathCityMap*, Goethe-Universitat Frankfurt am Main (Latest Update: 02.10.2020).
[9] Jablonski, S., Lázaro del Pozo, C., Ludwig, M., & Recio Muniz, T., *MathCityMap, paseos matemáticos a través de dispositivos móviles*, Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, 087 (2020) 47-54.
[10] King, A., *Finding the Beauty of Math Outside of Class*, Edutopia, January 9, 2018.
[11] Latas, J., Carvalho e Silva, J., *Os trilhos como recurso de educação científica em contexto não formal*, in XIX Encontro Nacional de Educação em Ciências (2021) 101-103.
[12] Latas, J., Rodrigues, A., *Trilho da Ciência: um percurso de Educação Científica na ilha do Príncipe*, Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8 (2015) 53-75.
[13] Ludwig, M., Jesberg, J., *Using Mobile technology to provide Outdoor Modelling Tasks - The MathCityMap-Project*, in Procedia Proceedings of WCES: Elsevier. (2015) 2776-2781.
[14] Rosendo, A. I., & Carvalho e Silva, J. , *Computers in Mathematics Education - An Experience*, Electronic Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Orlando, Florida, November 17-20, 1994, Paper C015.
[15] Shoaf, M., Pollak, H. & Scheider, J., *Math trails*, COMAP, 2004.
[16] Taranto, E., Jablonski, S., Recio, T., Mercat, C., Cunha, E., Lázaro, C., Ludwig, M., et al., *Professional Development in Mathematics Education - Evaluation of a MOOC on Outdoor Mathematics*, Mathematics (2021) 9(22), 2975. MDPI AG.
[17] Wijers, M., Jonker, V., & Drijvers, P., *Exploring mathematics outside the classroom*, ZDM Mathematics Education (2010) 789-799.
[18] Zender, J., Gurjanow, I., Cahyono, A. N., & Ludwig, M., *New studies in mathematics trails*, International Journal of Studies in Education and Science (2020) 1(1), 1-14.

Jaime Carvalho e Silva
CMUC, Department of Mathematics, University of Coimbra, 3001-501 Coimbra, Portugal
E-mail address: jaimecs@mat.uc.pt
URL: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/

é uma característica especialmente bem vinda dos Trilhos Matemáticos pois a realidade por vezes fica demasiado longe da sala de aula, por culpa desta. É preciso que os alunos percebam que trabalhar com aproximações de números irracionais como π e $\sqrt{2}$ é perfeitamente possível e até desejável, para se obterem resultados utilizáveis em questões da vida real.

O software desenvolvido pelo projeto MASCE3 é efetivamente simples de utilizar, de funcionamento intuitivo e fornece opções muito interessantes e versáteis para construir tarefas baseadas em dados que podem ser recolhidos localmente. O professor pode, através da sala de aula digital, perceber o que se passa e quem precisa de ajuda; os alunos encontram assim problemas com um realismo difícil de simular dentro da sala de aula.

A preparação de futuros professores para usar novas ferramentas que vão sendo desenvolvidas exige que esse uso seja feito de forma ativa e interventiva, para que os futuros professores se apropriem das ferramentas e as consigam transpor para as suas futuras realidades. O contacto com outras realidades (próximas, de colegas, ou longínquas de outros professores de diferentes países, nos MOOC) é também importante para esclarecer, motivar e até incentivar os futuros professores a incorporarem nas suas práticas tarefas que não experienciaram quando foram alunos do Ensino Básico e Secundário porque ainda não existiam.

Existem outros estudos com futuros professores ([2] e [3]) feitos com futuros professores do 1° ciclo do Ensino Básico usando o software MathCityMap e ([1]) com futuros professores de Matemática do 3° ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário feitos em papel sem usar a apliqueta para telemóvel. Em todos as conclusões são essencialmente concordantes sobre a reação positiva dos futuros professores ao uso dos Trilhos Matemáticos em papel ou digitais. Com uma formação inicial que alarga a formação dos futuros professores a trabalhos fora da sala de aula e à exploração de apliquetas que potenciem o uso de Trilhos Matemáticos, os futuros professores de Matemática estarão melhor preparados para enfrentar um panorama escolar que está longe de ser fácil relativamente a uma disciplina tão estruturante para o cidadão do século XXI como é a Matemática.

References

[1] Barbosa, A., Vale, I., Ferreira, R.A.T., *Trilhos matemáticos - Promovendo a criatividade de futuros professores*, Educação & Matemática, 135 (2015) 57-64.

[2] Barbosa, A., Vale, I., *Math Trails: Meaningful Mathematics Outside the Classroom with Pre-Service Teachers*, Journal of the European Teacher Education Network 11 (2016) 63-72.

b) Os futuros professores encaram de forma favorável esta nova ferramenta?

Neste trabalho descreve-se a metodologia usada para incorporar os Trilhos Matemáticos e a apliqueta MathCityMap na unidade curricular referida e a reação de futuros professores de Matemática.

2. Dois anos de Trilhos Matemáticos Digitais na formação inicial de professores de Matemática

Em 2020/2021 e 2021/2022 todos os estudantes da formação inicial de professores de Matemática (Mestrado) trabalharam Trilhos Matemáticos digitais. Descreve-se aqui o que foi feito em cada ano. No caso dos alunos de 2020/2021 também foi analisado o que se passou nas escolas onde estagiaram mas essa discussão foi feita em outro trabalho ([7]).

O trabalho concebido pelo projeto europeu MASCE3 - *Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe* inclui software de base (com versão em português), acessível na página

https://mathcitymap.eu/pt/

Com este software é possível construir tarefas e trilhos (conjuntos de tarefas). Todas as tarefas e trilhos precisam de ser aprovados pelos coordenadores do projeto para garantir a respetiva qualidade. Para concretizar os trilhos utiliza-se uma apliqueta num telemóvel recente (com sistema operativo Android ou iOS).

2.1. O primeiro ano. Em 2020/2021 todos os estudantes se inscreveram no MOOC[2] "Task Design for Math Trails" organizado pelo projeto europeu MASCE3. O próprio docente também frequentou o curso (que não conhecia) e os diferentes módulos do curso foram discutidos e explorados na sala de aula (quase todas as aulas decorreram a distância devido à pandemia). O curso continha vários documentos (em inglês) e vídeos (em inglês com legendas em português) que foram todos lidos, esclarecidos e discutidos na sala de aula. Como o decorrer do curso se sobrepôs ao período das aulas, foi possível acompanhar com detalhe o trabalho de cada estudante e ultrapassar todas as suas dificuldades.

O MOOC era constituído por 5 módulos, para além da introdução, e cada um durava cerca de duas semanas. Em cada módulo era preciso entregar

[2]MOOC: Massive Online Open Course (curso a distância aberto e sem limite de inscritos).

trabalhos escritos, normalmente cópias de écran do trabalho com tarefas no software de base das tarefas e trilhos.

O acompanhamento do curso foi assegurado por 6 membros do projeto MASCE3, de 6 países distintos. O curso foi programado para 12 semanas, sendo que em cada semana o esforço estimado era de 2-3 horas. Um fórum geral e um fórum em cada módulo asseguravam um apoio escrito aos formandos. O curso teve 524 participantes, mas muitos não o concluíram.

FIGURE 1. Aula de 9-3-2021 com um vídeo onde intervém uma docente portuguesa do MOOC, Elisabete Cunha (IPVC)

Todos os 11 estudantes da formação inicial de professores de Matemática (2 do sexo masculino e 9 do sexo feminino) concluíram com sucesso o MOOC e obtiveram o respetivo certificado final. Uma tarefa obrigatória para obter a aprovação era construir um trilho matemático que incluísse um mínimo de 8 tarefas e que, claro, fosse aprovado pela coordenação do projeto.

A tabela 1 mostra uma das tarefas dadas como exemplo no MOOC. A recomendação dada no curso era que as tarefas deveriam ser constituídas por uma boa imagem do objeto em estudo, um bom título para a tarefa proposta, uma questão bem construída ("Your question should be compelling, it should trigger the urge to actually answer that question because the answer will help you understand better the world around you"[3]), uma possível resposta à questão proposta e duas ou mais sugestões que possam ajudar os estudantes que tentarem resolver a questão.

Todos os 11 estudantes elaboraram um mínimo de 8 tarefas cada um (alguns elaboraram mais) pelo que o trabalho na disciplina deu como subproduto mais de 90 novas tarefas para o MathCityMap. Na tabela 2 estão as imagens de três dessas tarefas que vamos descrever brevemente.

[3]"On the field" (documento do MOOC).

dar oportunidade aos alunos da escola de fazerem atividades fora da sala de aula como a dos Trilhos Matemáticos.

As respostas completas dos alunos podem ser vistas nas páginas pessoais que eles construíram durante o semestre e se encontram disponíveis em:

http://www.mat.uc.pt/ jaimecs/mce22/alunos.html

3. Discussão e avaliação da implementação da prática profissional

Relativamente aos alunos de 2020/2021 em trabalho anterior ([7]) concluiu-se que todos os 11 estagiários implementaram Trilhos Matemáticos na escola onde estagiaram em 2021/2022, com um sucesso total. Os estagiários, graças à sua participação ativa na disciplina da formação inicial em 2020/2021, conseguiram transpor essa atividade para as escolas onde estagiaram, criaram novos trilhos, levaram os seus alunos a trabalhar a matemática de forma ativa, indo até por vezes mais além do que o que se poderia esperar. Com efeito, quatro desses estagiários candidataram com sucesso as suas duas escolas a "Escola Parceira" do MathCityMap, divulgaram entre os outros professores os Trilhos Matemáticos e inclusive fizeram uma sessão de formação para professores de outra escola.

Aos alunos de 2021/2022 não foi aplicada a mesma metodologia que aos de 2020/2021 porque o MOOC já não teria apoio dos seus coordenadores nem concederia sequer certificados de conclusão com sucesso. Os estudantes de 2021/2022 frequentaram outros MOOC (foram dois, um da European Schoolnet relativo ao ensino com metodologia STEM e outro relativo ao projeto europeu eTwinning). Sendo assim a opção em 2021/2022 foi levar os estudantes de 2021/2022 a observarem o trabalho dos estudantes de 2020/2021. Seria suficiente? Os resultados do inquérito realizado e resumido em 2.3 levam-nos a crer que sim. Será de esperar que os quatro estudantes portugueses incorporem de algum modo os trilhos matemáticos na sua prática de ensino da Matemática.

As questões práticas de trabalhar matemática fora da sala de aula aparecem naturalmente, tendo os alunos revelado alguma dificuldade em trabalhar com aproximações e estimativas, até porque deixa de ser possível exigir uma opção de resposta única. O software admite que uma resposta possa ficar num intervalo razoável (sendo a razoabilidade definida pelo criador da tarefa). Quando se efetua uma medição com uma fita métrica num objeto real, não podemos esperar que todos obtenham o mesmo resultado. Mas essa

"lembrar-se das fórmulas usadas". E ainda que "mostrar algumas aplicações práticas da matemática é uma boa ideia para aumentar o interesse dos alunos na disciplina".

A segunda questão incidia na eficácia e poder de motivação dos trilhos para a aprendizagem matemática dos alunos. O estudante 1 entende que "o Math City Map é uma ótima ferramenta para consolidar matérias matemáticas" e "para motivar muitos alunos que com exercícios rotineiros da sala de aula não se motivariam". O estudante 2 entende que este tipo de atividades "são no geral uma boa forma de aplicar matemática, visto que estamos a usar a matemática num cenário diferente da sala de aula, dando a ideia aos alunos que a matemática está presente no nosso dia a dia". O estudante 3 entende que as tarefas motivam os alunos e criam bom ambiente para que se discuta Matemática e ainda "confronta os alunos com problemas concretos e propicia uma aprendizagem mais completa, enriquecendo-a com aplicações práticas da matemática onde se acabam por treinar várias capacidades (nomeadamente análise, crítica, síntese, argumentação e refutação de hipóteses, etc.) na ótica da resolução de problemas." O estudante 4 realça que "sair da sala para aprender desperta o interesse nos alunos, motivando-os" embora alerte que se "exige algum cuidado na preparação das tarefas, para que não se tornem repetitivas e sejam interessantes". O estudante 5 entende que "o MathCityMap fornece um ambiente perfeito para discutir matemática" e que com "tarefas e trilhos fora da escola, é mais fácil os alunos se interessarem pela matéria e lembrar-se do que fizeram".

A terceira questão pretendia aferir da sensibilidade dos estudantes sobre a praticabilidade de Trilhos Matemáticos digitais com o software MathCityMap. Todos acharem que era "simples de usar". O estudante 2 entende mesmo que "a possibilidade de usar o percurso de outros utilizadores" é um elemento de ajuda e que "nem que seja apenas só uma atividade por ano letivo, o MathCityMap poderá ajudar bastante os alunos a alcançar os objetivos requeridos".

Com a última questão pretendia-se perceber a reação dos estudantes ao facto de os colegas do ano anterior terem conseguido que a escola onde estavam a estagiar fosse considerada uma escola parceira do projeto internacional (na altura só se sabia desta situação numa escola). Todos apoiaram a iniciativa e se mostraram motivados para fazer o mesmo na escola onde vierem a estar. Mas também declaram que o mais importante será mesmo

TABLE 1. Exemplo de tarefa e de trilho usados no MOOC

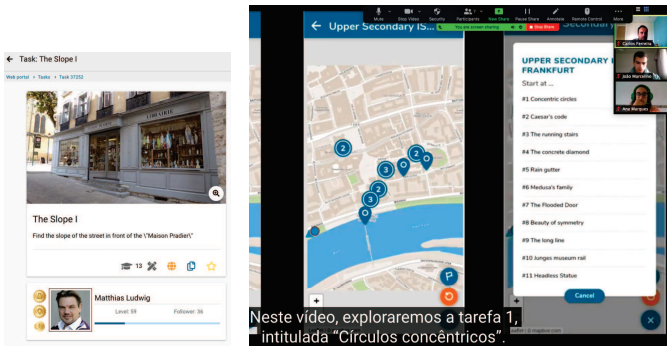
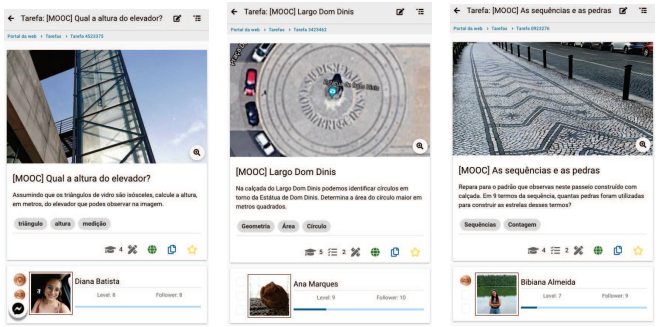


TABLE 2. Trilhos e tarefas do MathCityMap



Na primeira tarefa tratava-se de estimar a altura do elevador do Mercado Municipal de Coimbra a partir da contagem do número de triângulos de vidro da parede do elevador e da medição feita no local de um lado adequado do triângulo. Na segunda tarefa pretendia-se estimar a área do círculo maior desenhado no solo, sabendo que não seria possível usar uma simples fita métrica pois a estátua do Rei D. Dinis está no centro do largo. Na terceira tarefa pretendia-se que se estimasse o número de pedras da calçada portuguesa usadas numa rua de Coimbra para construir as estrelas de pedra negra que aparecem em 9 termos da sequência geométrica em que se baseia o desenho do passeio; primeiro seria necessário contar quantas estrelas apareciam

nos 9 termos e depois observar quantas pedras seriam necessárias para fazer cada estrela (eram entre 25 e 28 pedras).

Todos os 11 estudantes partilharam com os colegas os trilhos e tarefas que construíram e assim cada estudante conseguiu observar o que cada um dos colegas ia construindo. Numa das últimas aulas, já com as restrições por causa da COVID-19 menos severas, todos os estudantes presentes (7) foram para a rua e testaram algumas das tarefas construídas por um dos colegas.

FIGURE 2. Estudantes do 1° ano do Mestrado em Ensino a testar uma das tarefas

2.2. O segundo ano. Em 2021/2022 os estudantes (apenas 5, um dos quais ao abrigo do programa Erasmus, de nacionalidade italiana) tiveram oportunidade de testar quase todas as tarefas de um dos trilhos e puderam observar como funciona a sala de aula digital ([8]) que permite seguir os estudantes ou grupos de estudantes que estão a realizar um trilho. Duas das aulas foram dedicadas à descrição e discussão dos Trilhos Matemáticos digitais baseados no software MathCityMap.

Com base nessa experiência e no conhecimento do relato do que um dos Núcleos de Estágio Pedagógico, que no ano anterior tinha trabalhado com o MathCityMap, fez na escola onde funcionava o Núcleo de Estágio, elaboraram uma reflexão escrita que é resumida na secção seguinte.

2.3. A opinião dos estudantes. Os 5 estudantes de 2021/2022 tiveram de responder a um questionário no final da disciplina onde refletiam sobre a sua experiência com a apliqueta MathCityMap.

A primeira pergunta foi relativa à adequação do trilho e suas tarefas a alunos do Ensino Básico e Secundário. O estudante 1 acha que as tarefas

FIGURE 3. Estudantes do 1° ano do Mestrado em Ensino na sala de aulas

eram adequadas ao Ensino Básico e que mostravam "aplicações diretas da matemática" mas para o Ensino Secundário não traziam nada de novo; contudo acha que as tarefas exigiam "muitas estimativas", o que é "pouco estimulado na sala de aula" e isso "impossibilita uma resposta certa, mesmo que os cálculos estejam" certos; na apliqueta este problema é ultrapassado admitindo respostas num intervalo previamente definido. O estudante 2 acha que são acessíveis a estudante pelo menos do 9° ano pois numa tarefa "temos o cálculo do volume de uma esfera". O estudante 3 acha que as tarefas eram acessíveis a alunos do Ensino Básico e Secundário, embora ache que os alunos do Ensino Básico precisam de um acompanhamento "mais próximo". Este estudante também tem dúvidas sobre o melhor modo de lidar com estimativas e sugere que algumas tarefas "penso que devem ter um passo intermédio ou ajuda extra que tente estabelecer se as estimativas para as medidas de comprimento que estamos a tomar são ou não adequadas: por exemplo, determinar a medida de comprimento de um dos blocos paralelepipédicos que formam a base das esferas e comparar com um valor de referência para aferir se as estimativas têm um 'erro suficientemente pequeno' ". O estudante 4 também entende que os alunos do Ensino Básico precisariam de algum apoio mas para os do Ensino Secundário "os alunos já têm autonomia para realizar o trabalho". Também tem preocupação com as tarefas envolvendo estimativas e sugere que "nas tarefas que exigem várias medições haja mais subtarefas de modo a garantir um estreito intervalo nos valores corretos, de modo a evitar a acumulação de erros". O estudante 5 entende que as tarefas são acessíveis e que há "muitas tarefas no âmbito dos sólidos geométricos". Entende que, com a realização das tarefas, os alunos irão mais facilmente