



## Desafio 1 – Novembro 2007

### Quadrados pares, pares em quadrados?

O Zéfiro tem um jogo com o tabuleiro abaixo.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Escolhendo números consecutivos deste diagrama ele pode formar quadrados de várias dimensões. Por exemplo:

1 × 1:  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{8}$ , ...

2 × 2:  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 6 & 7 \\ \hline \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 7 & 8 \\ \hline \end{array}$ , ...

...

Quantos são os quadrados deste tipo, de qualquer tamanho, tais que a soma dos seus números é um número par?

#### Dica:

Pensa em quantos números ímpares precisa um quadrado de ter para que a soma de todos os seus números seja um número par.



## Quadrados pares, pares em quadrados?

### Solução:

Podemos formar quadrados com 1, 2, 3, 4 ou 5 quadrados de lado. Além disso, a soma de números pares é sempre um par, enquanto que a soma de números ímpares apenas é um par se tivermos uma quantidade par de números ímpares. Para que a soma dos números de um quadrado seja um número par, este terá que conter uma quantidade par de números ímpares. Deste modo, temos os seguintes casos:

1. Todo o quadrado com um número par de elementos de cada lado tem um número par de elementos, pelo que é constituído por igual quantidade de números pares e ímpares:

- $4 / 2 = 2$  nos quadrados  $2 \times 2$ , e
- $16 / 2 = 8$  nos quadrados  $4 \times 4$ ,

logo existem 16 quadrados  $2 \times 2$ , e 4 quadrados  $4 \times 4$ , cuja soma dos seus elementos é um número par.

2. Para os quadrados com um número ímpar de elementos podemos ter 1, 3 ou 5 elementos de cada lado.
  - Um quadrado com um elemento é simplesmente um número, portanto a soma é o próprio número. Assim, temos 12 destes quadrados  $1 \times 1$  que contêm um número par.
  - Os quadrados  $3 \times 3$  podem conter 4 números pares e 5 números ímpares, ou 5 números pares e 4 números ímpares, se o 1º elemento (canto superior esquerdo) for um número ímpar ou par, respectivamente. Interessam-nos pois aqueles cujo 1º elemento é um número par, ou seja:

2	3	4
7	8	9
12	13	14

6	7	8
11	12	13
16	17	18

8	9	10
13	14	15
18	19	20

12	13	14
17	18	19
22	23	24

logo, existem 4 quadrados  $3 \times 3$ , cuja soma dos seus elementos é um número par.

- O único quadrado  $5 \times 5$  é o inicial, formado por 13 números ímpares, logo não existem quadrados  $5 \times 5$  cuja soma dos seus elementos é um número par.

Concluimos então que o número pedido é  $16 + 4 + 12 + 4 = 36$ .

### Agora para pensar:

1. Dois números inteiros têm a mesma paridade, quando são ambos pares ou ambos ímpares. Qual é a paridade do produto de dois números pares? E a do produto de um número ímpar por outro qualquer?
2. Num quartel existem 100 soldados e, todas as noites, 3 são escolhidos para fazer de sentinela. É possível, após algum tempo, um dos soldados ter trabalhado com cada um dos outros exactamente uma vez?

### Curiosidades:

Em Informática o termo paridade designa o número de *bits* iguais a 1 de uma palavra. O código de paridade (0 se houver um número par de 1's e 1 caso contrário) é utilizado para indentificar a ocorrência de erros.