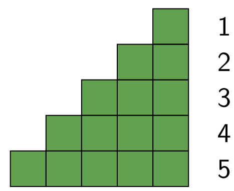
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

**Desafio 2 – Novembro 2007**

## Números triangulares

O Zéfiro descobriu os números triangulares, números que podem ser descritos como a soma do número de quadrados que formam um triângulo. Por exemplo, $T_5$ representa-se por:




Assim, $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Consegues ajudar o Zéfiro a encontrar o 2007º número triangular, ou seja, a saber o valor de $T_{2007}$?

### Dica:

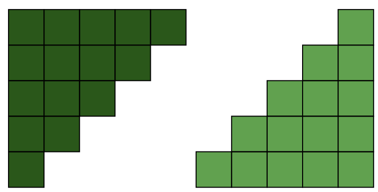
Pensa como podes calcular $T_{2007} + T_{2007}$.

## Números triangulares

### Solução:

A resposta é $T_{2007} = 2015028$. A seguir mostramos duas maneiras de descobrir a solução do problema.

1. Representando geometricamente o número $T_5$ duas vezes, e juntando os respectivos triângulos, obtemos um rectângulo com 6 unidades de comprimento e 5 de altura.

   Daqui concluímos que $T_5 + T_5 = 6 \times 5 = 30$ e portanto $T_5 = 15$. Do mesmo modo, para um inteiro positivo qualquer, $n$, podemos representar $T_n + T_n$ por um rectângulo de dimensão $(n+1) \times n$ e então $T_n + T_n = (n+1) \times n$, logo $T_n = \dfrac{(n+1) \times n}{2}$. Em particular, para $n = 2007$ temos $T_{2007} = \dfrac{2008 \times 2007}{2} = 2015028$.

2. Tal como $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, podemos obter o 2007-ésimo número triangular através de

$$
\begin{aligned}
T_{2007} &= 1 + 2 + \cdots + 2007 \\
&= (0+2007) + (1+2006) + (2+2005) + \cdots + (1003+1004) \\
&= 2007 + 2007 + \cdots + 2007 \\
&= 2007 \times 1004 = 2015028.
\end{aligned}
$$

### Agora para pensar:

1. Pensa numa maneira simples de verificar se um número qualquer é triangular.
2. De entre 4851, 6214, 7626 e 8656, quais os números que são triangulares?
3. O regulamento de um torneio de futebol diz que cada equipa joga com as restantes uma única vez. Quantos jogos serão realizados se o torneio tiver quatro equipas inscritas? E se forem 12 equipas?
4. Na turma do Zéfiro há o hábito de, ao chegar, beijar os colegas que já chegaram à escola. Sabendo que a turma tem 20 alunos, quantos são os beijos em cada dia?

### Curiosidades:

1. As duas fórmulas seguintes podem ser usadas para calcular números triangulares:

$$T_n = 1 + \cdots + n \quad \text{e} \quad T_n = T_{n-1} + n, \ \text{com } T_1 = 1.$$

2. Carl Friedrich Gauss foi um Matemático, Astrónomo e Físico, Alemão, do final do século XVIII e início do século XIX. Na esperança de manter Gauss sossegado por algum tempo (ele era bastante irrequieto!), um dia o professor pediu-lhe que calculasse: 1 + 2 + 3 + $\cdots$ + 100. Rapidamente Gauss descobriu que a soma dos primeiros n inteiros é dada pela expressão n x (n-1) / 2 e calculou: 50 x 101 = 5050.