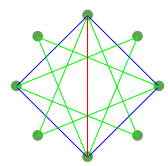
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Desafio 2 – Janeiro 2008

Estrela de números!

Ao marcar 8 pontos à mesma distância num círculo o Zéfiro pode percorrê-los usando passos de comprimento 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7. Contudo, com alguns destes passos não toca em todos os pontos. Por exemplo, escolhendo os pontos de 2 em 2, ou de 4 em 4, alguns ficam de fora, o que já não acontece de 3 em 3.



Passo 2
Passo 3
Passo 4

Para este caso, de que outras maneiras se pode passar em todos os pontos?

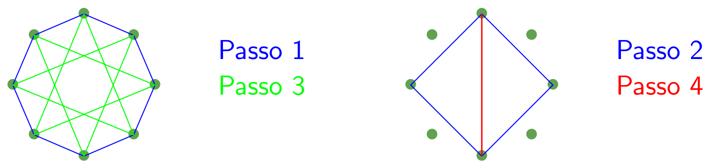
Se o Zéfiro marcar 5 pontos pode alcançá-los a todos, independentemente do passo que escolher. Que outros números têm esta propriedade?

Dica:

Tenta descobrir a relação entre o nº de pontos no círculo e o nº de passos que asseguram que todos os pontos são tocados.

Estrela de números!

Solução: Para o círculo com 8 pontos que aparece, podemos verificar que com passos de 1 em 1, de 3 em 3 ou de 5 em 5 conseguimos passar por todos os pontos (figura à esquerda), enquanto que isso já não acontece ao usarmos passos de 2 em 2, de 4 em 4, de 6 em 6 ou de 8 em 8 (figura à direita).



Repara que com passo 5 obtemos o mesmo resultado que com passo 3, e que com passo 6 obtemos o mesmo resultado que com passo 2. Além disso, saltando pontos de 8 em 8 apenas atingimos o ponto de onde partimos.

Contando o nº de pontos que é atingido com cada um destes passos observamos que estes são 4 se o passo é 2 ou 6, 2 se o passo é 4, e 1 se o passo é 8, que são o menor nº pelo qual é necessário multiplicar o nº de passos de modo a obter um múltiplo de 8. Neste caso, 2 x 4 = 8, 6 x 4 = 24 = 3 x 8, 4 x 2 = 8 e 8 x 1 = 8.

Deste modo, para verificar se um passo atinge todos os pontos de um círculo basta determinar o máximo divisor comum (MDC) entre o nº de pontos e o tamanho do passo. Se o MDC é 1, então o passo alcança todos os pontos do círculo.

Por exemplo, procedendo do mesmo modo para um círculo com 10 pontos observamos o seguinte:

1. Passamos por todos os pontos se o passo é 1, 3, 7 ou 9 (neste caso o MDC é 1).
2. Não passamos por todos os pontos se o passo é 2, 4, 6 ou 8 (o MDC é 2), nem se é 5 (o MDC é 5).

Então, neste caso, existem 4 passos com os quais conseguimos passar em todos os pontos e esta conclusão funciona para um círculo com qualquer nº de pontos. Isto significa que só alcançamos todos os pontos se o MDC for sempre 1, ou seja, se o nº de pontos marcado for um número primo!

Agora para pensar:

1. Tenta verificar que a conclusão acima funciona para um círculo com qualquer nº de pontos.
2. De quantas maneiras diferentes podemos percorrer todos os pontos ao marcar 20 pontos e que passos permitem fazer isso?
3. Como escolher os passos que permitem alcançar todos os pontos num círculo com um nº de pontos qualquer?

Curiosidades:

1. Quando o MDC entre dois números é 1 dizemos que estes números são primos entre si.
2. A função de Euler associa a cada natural n, o nº de naturais entre 1, 2, . . . , n que são primos com n. Por exemplo, se n é um número primo então é primo com 1, . . . , $n-1$, e esta função tem o valor $n-1$.
3. Muitas aplicações no campo da criptografia (estudo de técnicas para modificar informação a ser entendida apenas pelo destinatário) baseam-se em propriedades dos números inteiros e dos números primos.