Desafio 1 – Abril 2008

A jogar. . . à geometria!

Um poliedro em forma de bola de futebol, como mostra a figura, é constituído por 32 figuras, 20 das quais são hexágonos regulares e 12 são pentágonos regulares.

Consegues descobrir quantos vértices tem este poliedro?

Dica:

Repara que cada vértice pertence a várias figuras simultaneamente.

A jogar. . . à geometria!

Solução:

Uma vez que a bola é composta por hexágonos e pentágonos podíamos pensar em contar o número de vértices de um hexágono, 6, e multiplicá-lo pelo número de hexágonos no poliedro, 20. Obteríamos assim um total de 6 x 20 = 120 vértices. Contudo, tal como se alerta na dica, os vários hexágonos tocam-se e portanto, deste modo, estaríamos a contar o mesmo vértice mais do que uma vez, o que não é correcto. Em alternativa podemos pensar dos seguintes modos:

1. Todo o vértice do poliedro é vértice de um pentágono e os pentágonos não se tocam. Ora a bola de futebol contém 12 pentágonos, logo tem 5 x 12 = 60 vértices.

2. Como vimos nos pentágonos há 5 x 12 = 60 vértices e nos hexágonos 6 x 20 = 120 vértices, logo no total 180 vértices. No entanto, no poliedro cada vértice é comum a três polígonos (2 hexágonos e 1 pentágono), portanto a bola contém 180 : 3 = 60 vértices.

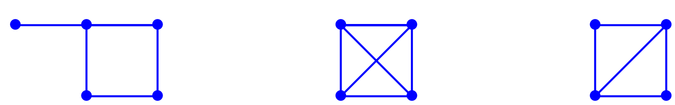
Agora para pensar:

1. Em 1750 Euler descobriu uma igualdade que relaciona os números V de vértices, F de faces e A de arestas de um poliedro: V + F - A = 2. Tenta verificar se para o poliedro dado no desafio esta fórmula é verdadeira.

2. Procura outros poliedros para os quais a fórmula de Euler não é válida.

3. A fórmula de Euler pode ser usada igualmente em alguns grafos, notando que estes dividem o plano em várias regiões fechadas e a região exterior ilimitada. Sendo A o número de arestas, N o número de vértices e R o número de regiões para tais gráficos tem-se, novamente: N + R - A = 2.

   Verifica se os grafos a seguir satisfazem esta fórmula e tenta perceber o que os distingue.



Curiosidades:

1. Leonhard Euler foi um matemático suíço do século XVIII com importantes contribuições em várias áreas da Matemática e da Física, como a geometria, a trigonometria, o cálculo ou a teoria de números.

2. As figuras abaixo são exemplos de poliedros não-eulerianos, também designados, carinhosamente, por "monstros".