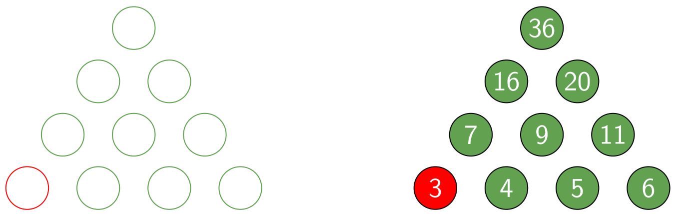
Desafio 2 – Maio 2008

A pirâmide mágica!

O Zéfiro brinca com uma pirâmide mágica, em que as posições a verde são preenchidas sempre que ele coloca um número inteiro qualquer na posição a vermelho, como mostram as figuras abaixo:



Que números deve o Zéfiro inserir na posição a vermelho, para que no topo surjam o 84 e o 44?

Descobre como se podem escrever os números que aparecem no topo e usa essa conclusão para explicar por que razão esse número nunca é o 48.

Estende o teu raciocínio para pirâmides com 5 ou 6 posições na base.

Dica:

Tenta perceber como se obtêm os números nas posições a verde.

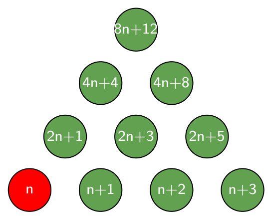
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Desafio 2 – Maio 2008

A pirâmide mágica!

Solução:

O nº no topo do triângulo aumenta 8 unidades quando aumentamos o valor na posição encarnada de 1 unidade. Para verificar isto podemos usar o diagrama auxiliar apresentado a seguir, que simula a situação em que começamos com o valor n, vindo a obter 8n + 12 no topo.



Assim, se usarmos n + 1 na 1º posição iremos obter 8n + 8 + 12 = 8n + 20.

De acordo com o diagrama, o nº no topo é sempre resultado da multiplicação de um número ímpar por 4, uma vez que 8n + 12 = 4 x (2n + 3). Ora 48 / 4 = 12 não é um número ímpar, portanto não existe nenhum inteiro capaz de conduzir ao valor 48 na posição no topo do triângulo.

Do mesmo modo, para descobrir como obter 84 no cimo do triângulo é preciso saber qual o valor n tal que 8n + 12 = 84. Esta equação é equivalente a 8n = 72 e n = 9, portanto concluímos que a posição encarnada deve conter o número 9.

Por outro lado, 8 x 4 + 12 = 44, donde a 1ª posição deverá ser 4, de modo a obter 44 no topo.

Supondo agora que a base da pirâmide tem 5 ou 6 posições podemos fazer um esquema semelhante ao anterior. Desse modo concluímos que com 5 posições na base o nº no topo é 16n + 32, enquanto que quando a pirâmide tem 6 posições na base esse nº é dado por 32n + 80.

Agora para pensar:

1. Qual o valor n a inserir na posição a encarnado que dá origem ao número 2008 no topo do triângulo? E ao número 2009?

2. Consegues perceber o que sucederia se em vez de um triângulo tivéssemos uma pirâmide, tridimensional, com uma base quadrada, e fixássemos um dos vértices da base com o valor de um inteiro n?

3. Imagina que o valor nas bolas na base do triângulo é calculado como indicado na figura:

Qual a diferença produzida então no valor no topo do triângulo?

Curiosidades:

O número total de bolas num triângulo como o deste desafio, contendo n bolas na base, é dado pelo número triangular de ordem n, T_n (ver Desafio 2 de Novembro de 2007).