OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Edições 2006/07 e 2007/08 (http://www.mat.uc.pt/zefiro)

Joana Teles (jteles@mat.uc.pt) e Marta Pascoal (marta@mat.uc.pt)
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Prefácio

Os Desafios do Zéfiro consiste num sítio electrónico (http://www.mat.uc.pt/zefiro), integrado no conjunto de iniciativas *Actividades Matemáticas* do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Os problemas aí propostos mensalmente dividem-se em duas categorias, uma dirigida a um público com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos, Desafio 1, e outra para jovens de 13 a 15 anos, Desafio 2. No final do mês foram disponibilizadas as resoluções dos respectivos desafios, bem como algumas curiosidades acerca dos temas abordados, mostrando ao mesmo tempo a utilização de conceitos relacionados com a Matemática no quotidiano. Os utilizadores do sítio submeteram as respostas aos desafios do mês. As participações mensais foram vez avaliadas e no final de cada edição foram anunciados os nomes dos utilizadores com os melhores resultados.

O sítio electrónico *Os Desafios do Zéfiro* foi desenvolvido em 2006 por Margarida Matos e Ricardo Sismeiro (alunos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra). A personagem Zéfiro é uma criação de Yann Thual, as restantes ilustrações estiveram a cargo de Gonçalo Forte e Yann Thual. A equipa de coordenação dos conteúdos do sítio foi constituída por Joana Teles e Marta Pascoal. Muitos dos problemas apresentados foram inspirandos por outras publicações de divulgação matemática, tais como os sítios *Figure this!* ou *Cut the knot*. Os desafios do mês de Março de 2007 foram coordenados pelo Professor João Fernandes.

O sítio teve duas edições, a primeira ao longo do ano lectivo de 2006/07 e a segunda em 2007/08. Os jovens premiados na edição de 2006/07 foram:

Desafio 1: Miguel Basílio, Ricardo Lima, Andreia Baltazar, Leonor Albuquerque, Ricardo Costa

Desafio 2: Miguel Basílio, Ricardo Lima, Andreia Baltazar, Jessica Pereira, Tiago Nunes;

na edição de 2007/08 destacaram-se:

Desafio 1: Alexandre Carvalho Truppel, Ana Isabel Pereira Mestre, Beatriz Cunha Morais, Mariana Francisco Mendes de Almeida e Paiva e Patrícia Sofia Marques dos Santos.

Desafio 2: Ana Rita Carvalho Faria, Eliana Iria Luz Barreira, Joana Sofia Pereira Mendes, Joel Neves da Silva e José Diogo Gaspar Aurélio.

Os prémios distribuídos tiveram o apoio do Banco BPI e do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. As cerimónias de entrega de prémios incluiram actividades diversas e contaram com a colaboração do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, da Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra, do Museu da Ciência da Universidade de Coimbra e dos restantes colegas envolvidos nas *Actividades Matemáticas*, assim como com as contribuições dos Professores António Leal Duarte e Paulo Oliveira.

Finda a competição apresentamos uma compilação dos problemas e das resoluções propostas ao longo das duas edições desta iniciativa, e que continuam também acessíveis no, ainda activo, sítio original (*Os Desafios do Zéfiro*). Pensamos que este texto pode servir como ferramenta de trabalho ou de lazer a alunos, famílias e professores, e por isso renovamos o convite para acompanharem o Zéfiro e aceitarem o desafio! Em casa ou na escola esperamos que utilizem estes desafios como motivação para aprenderem e descobrirem novos temas.

Coimbra, Janeiro de 2010

Joana Teles e Marta Pascoal

OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

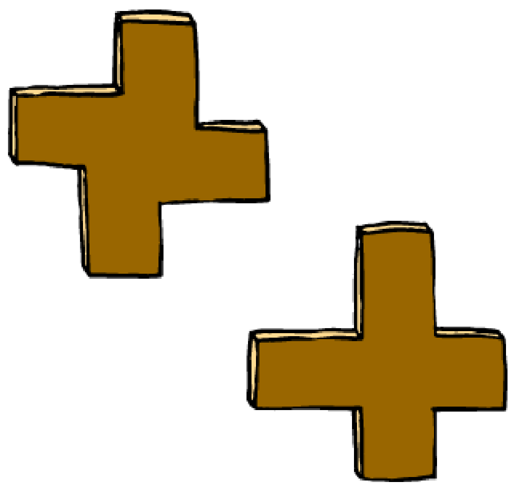
Edição 2006/07

Conteúdo

Desafio 1 – Outubro 2006

Qual é a melhor bolacha de chocolate?

O Zéfiro adora chocolate! Em casa ele tem bolachas com as formas das figuras abaixo, que têm como cobertura uma camada com a mesma espessura de chocolate.



Qual das duas bolachas é a preferida do Zéfiro?

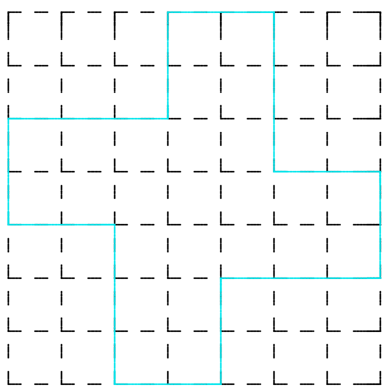
Dica:
Pensa como podes medir a área do topo de cada bolacha, por exemplo, usando papel quadriculado

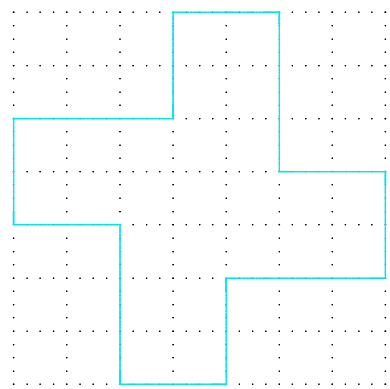
Qual é a melhor bolacha de chocolate?

Solução:

O Zéfiro prefere a bolacha com maior área. Existem vários possíveis processos de resolver este problema.

1. Usa papel quadriculado, ou mesmo milimétrico, e conta o número de quadrados que cada bolacha cobre. (Quanto mais pequenos forem os quadrados mais exacta é a estimativa da área.)



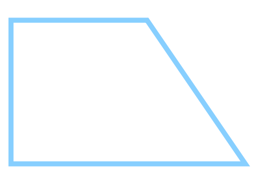


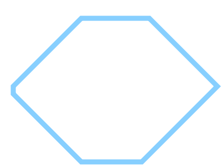
2. Num papel desenha as duas bolachas, pinta-as de cores diferentes e recorta-as. Coloca uma sobre a outra. Se não conseguires cobrir a primeira bolacha com as partes da segunda, então a primeira tem uma área maior. Caso contrário a que tem uma área maior é a segunda.

Agora para pensar:

1. Podes usar uma corda para descobrir o perímetro de cada bolacha. Será verdade que uma bolacha com um perímetro maior tem também uma área maior? Porquê?

2. É possível calcular as áreas de algumas figuras dividindo-as em quadrados, rectângulos ou triângulos. Como podias dividir as formas abaixo para saber a sua área?





Curiosidades:

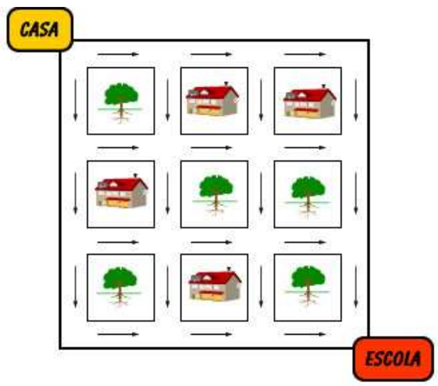
1. Algumas pessoas dizem que uma parte da costa litoral tem um comprimento infinito. O que querem dizer com isto?

2. Um planímetro é uma ferramenta que mede a área de figuras com forma irregular, com base no perímetro da figura.

Desafio 2 – Outubro 2006

Quantos caminhos?

O Zéfiro está ansioso por ir para a escola! Andando pelo passeio, de quantas maneiras diferentes pode ele ir de casa até à escola? (Claro que ele não quer voltar para trás!)



Dica:

Começa por tentar contar quantos caminhos existem entre duas esquinas próximas.

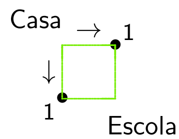
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

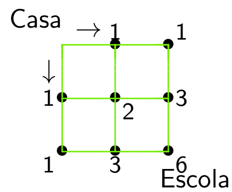
Desafio 2 – Outubro 2006

Quantos caminhos?

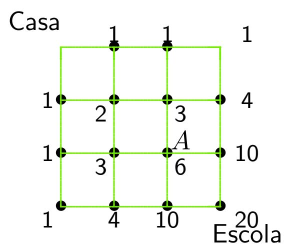
Solução:

Começa por olhar para o caso em que existe apenas um ou dois blocos de casas entre os pontos de partida e de destino:





No primeiro caso existem 2 caminhos distintos entre a casa e a escola. Agora observa que, no segundo caso, o número de caminhos possíveis para chegar a cada esquina é igual à soma do número de caminhos possíveis para chegar a cada uma das esquinas adjacentes. Os números indicam de quantas maneiras se pode chegar a cada vértice. Continuando pelo mesmo processo podemos completar a contagem. Assim, o Zéfiro pode ir para a escola através de 20 caminhos diferentes.

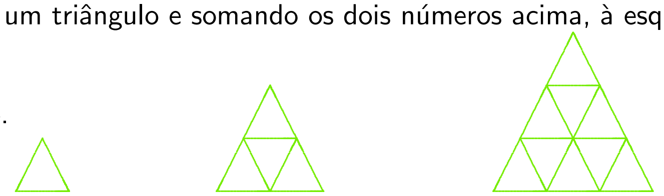


Agora para pensar:

1. Existem diferentes caminhos com o mesmo comprimento?
2. Qual o comprimento do caminho mais curto de casa do Zéfiro até à escola?
3. De quantas maneiras pode o Zéfiro ir para a escola, se no caminho quiser passar na casa do seu amigo Zéfirão, que fica no ponto A?
4. Porque é importante para as companhias de transportes a escolha de caminhos eficientes?

Curiosidades:

Blaise Pascal foi um matemático Francês do século XVII, que trabalhou com um padrão de números para resolver vários problemas de contagem. Este padrão, conhecido como triângulo de Pascal, forma-se começando com linhas de 1's em dois lados de um triângulo e somando os dois números acima, à esquerda e à direita, para obter cada novo número do padrão.

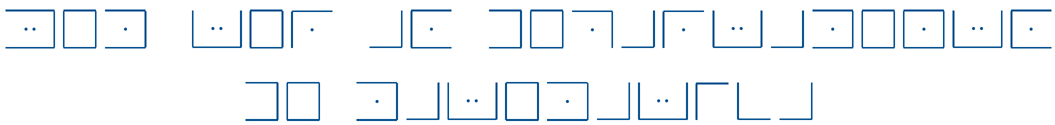


OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Desafio 1 – Novembro 2006

Decifra a mensagem secreta!

O Zéfiro achou um bilhete com a mensagem:



Noutro papel o Zéfiro encontrou as correspondências seguintes:

A	B	C	J	K	L	S	T	U
D	E	F	M	N	O	V	X	W
G	H	I	P	Q	R	Y	Z	

Será que consegues decifrar a mensagem?

Dica:
Escreve o alfabeto todo para obteres o código completo.

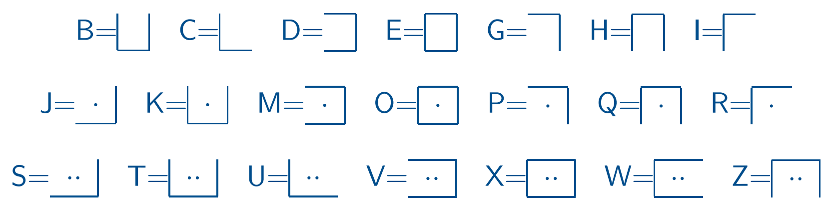
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Desafio 1 – Novembro 2006

Decifra a mensagem secreta!

Solução:

Cada letra é representada pelos traços da posição em que se encontra na grelha respectiva. Além disso, as letras de uma grelha são distinguidas das da anterior por terem mais um ponto. Assim, as letras da primeira grelha não têm nenhum ponto, as da segunda têm apenas um ponto e as da terceira têm dois pontos. Seguindo este raciocínio as restantes letras do alfabeto têm as correspondências seguintes:



e portanto a mensagem secreta é:

VEM TER AO DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Agora para pensar:

1. Existem muitos códigos, uns simples, como a cifra de César, outros bem complicados como a encriptação RSA, que usa números primos grandes e que é muito comum no comércio electrónico.

   Na cifra de César cada letra do alfabeto é deslocada para a direita um número fixo de casas. Por exemplo, quando esse número é 3 temos:

   A=D F=I L=O N=Q Y=A

   Escreve a mensagem que o Zéfiro recebeu usando este código.

2. No máximo quantas tentativas são necessárias para um espião quebrar uma mensagem encriptada com a cifra de César?

3. Cria o teu código, escreve uma mensagem secreta e depois pede a um amigo para a revelar.

Curiosidades:

1. Os códigos são usados há séculos como forma de comunicar em segredo. As pessoas que os criam chamam-se criptólogos, enquanto que as que se ocupam em "quebrá-los" se chamam criptanalistas. O código da mensagem que o Zéfiro recebeu apareceu no século XII e chama-se cifra "pig pen".

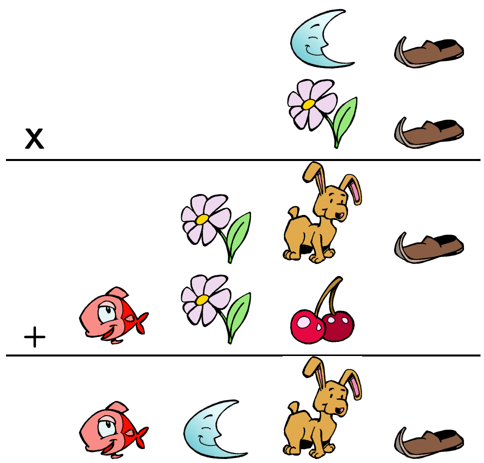
2. O imperador romano Júlio César usava a "Cifra de César" para enviar ordens secretas aos seus generais.

3. Durante a II Guerra Mundial a Alemanha utilizou uma máquina para codificar as suas mensagens. Chamavam-lhe a máquina Enigma.

Desafio 2 – Novembro 2006

Criptenigma!

O Zéfiro sabe que nesta operação aritmética cada figura corresponde a um algarismo.



Consegues ajudá-lo a descobrir quanto vale cada figura?

Dica:

Começa por identificar os valores possíveis de .

OS DESAFIOS DO ZĒFIRO

Desafio 2 – Novembro 2006

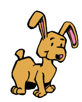
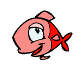
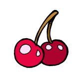
Criptenigma!

Solução:

Numa resolução, de várias possíveis, podemos começar por reparar que:

- as unidades de sapato vezes sapato são sapato, portanto este apenas pode ser 0, 1, 5 ou 6,
- sapato vezes lua sapato tem 3 algarismos, logo sapato não pode ser 0 nem 1, e se cão mais cerejas dá cão, então cerejas é 0, sapato é 5 e flor é par,
- duas flores são a lua, logo flor é 2 ou 4,
- uma vez que lua é par as dezenas de lua sapato vezes sapato, ou seja, cão, têm que ser 2, portanto flor é 4 e lua 8,
- por fim, peixe só pode ser 3.

Resumindo,

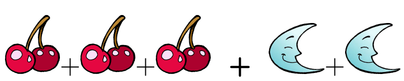
 = 8  = 5  = 4  = 2  = 3  = 0

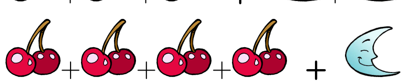
Agora para pensar:

1. Descobre quanto vale cada letra nesta operação:

$$\begin{array}{cccccc} & & & F & O & R \\ \times & & & Y & O & U \\ \hline & & Y & F & Z & O \\ + & F & O & R & O & \\ \hline & F & Y & Q & Z & O \end{array}$$

2. Imagina agora que lua e cerejas representam números e descobre quanto valem cada figura, sabendo que:

 = 76

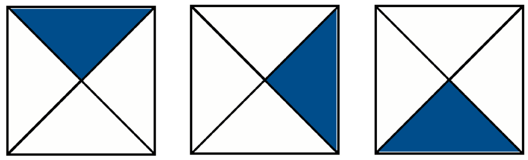
 = 68

Curiosidades:

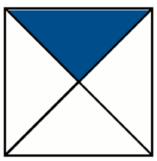
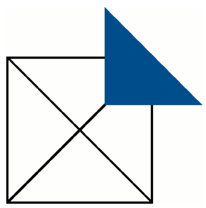
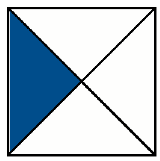
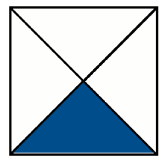
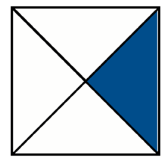
1. Enigmas deste tipo envolvem operações aritméticas e os dígitos, ou números, são substituídos por símbolos, que por vezes são letras. Os símbolos são chamados de incógnitas e as expressões de equações.
2. As equações têm aplicação em muitos campos, como por exemplo engenharia e gestão.
3. A teoria dos jogos e a lógica são ramos da matemática em que se estudam jogos e puzzles.

Quadrados malucos!

O Zéfiro muda de posição um quadrado e nos três primeiros movimentos vê a sequência abaixo:



Em qual das seguintes posições estará o quadrado se o Zéfiro fizer 2007 movimentos?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

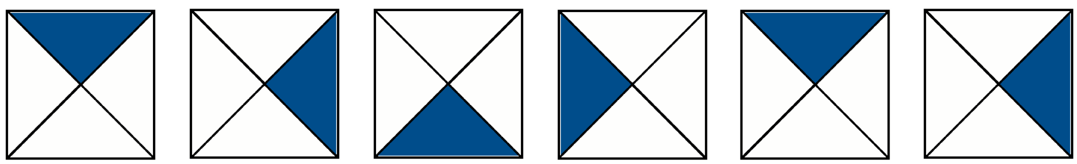
Dica:

Começa por descobrir as posições do quadrado depois de cada um dos primeiros seis movimentos.

Quadrados malucos!

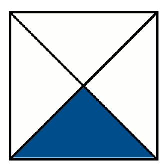
Solução:

O Zéfiro está a girar o quadrado no sentido dos ponteiros do relógio, logo nos seis primeiros movimentos temos:



Então, de quatro em quatro movimentos repete-se a mesma sequência.

Como $2007 = 501 \times 4 + 3$, as últimas posições que o quadrado assume são as três primeiras, logo a resposta correcta é a (d):



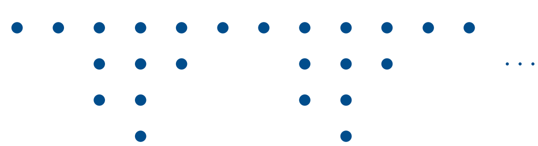
Agora para pensar:

1. As figuras $\triangle$, $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$ e $\square$ são repetidas na sequência:

   $$\triangle\ \clubsuit\ \diamondsuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \square\ \triangle\ \clubsuit\ \diamondsuit\ \cdots$$

   Que figura da sequência aparece na 2007ª posição?

2. O colar de safiras da Cleópatra indicado na figura abaixo tem 2007 pedras na primeira fila.

   Quantas pedras tem o colar?

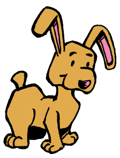
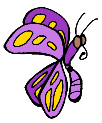
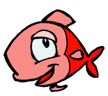
Curiosidades:

Em todos estes problemas procura-se um padrão. Depois de encontrado o padrão é suficiente determinar um resto para saber quais os últimos elementos da sequência.

Desafio 2 – Dezembro 2006

Quem joga com quem?

No Sábado à tarde há quatro jogos de xadrez (imaginários) entre animais. Os amigos do Zéfiro tentaram prever quem iria ganhar cada um dos jogos. Os palpites de cada um estão na figura ao lado.

-  escolheu o pato, o burro, a cegonha e o dromedário.
-  escolheu a cegonha, o esquilo, a foca e o pato.
-  escolheu o burro, a foca, o pato e o golfinho.
- Por alguma razão desconhecida ninguém escolheu o hipopótamo.

Descobre quem jogou contra quem.

Dica:

Repara que jogadores escolhidos pelo mesmo animal não podem ter jogado um contra o outro.

Quem joga com quem?

Solução:

1. Uma das posíveis formas de resolvermos este desafio é começarmos por construir um quadro, onde marcamos todos os animais escolhidos pelo cão na primeira coluna e os animais restantes na primeira linha.

	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato				
Burro				
Cegonha				
Dromedário				

Ora, uma vez que a borboleta escolheu a cegonha, o esquilo, a foca e o pato, sabemos que estes animais não jogaram uns contra os outros e podemos assinalar essas situações na tabela escrevendo "×".

	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato	×	×		
Burro				
Cegonha	×	×		
Dromedário				

Procedendo do mesmo modo para o peixinho, que escolheu o burro, a foca, o pato e o golfinho, obtemos o seguinte quadro:

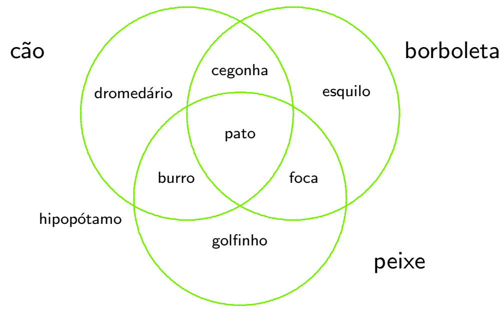
	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato	×	×	×	
Burro		×	×	
Cegonha	×	×		
Dromedário				

Descobrimos então que o hipopótamo só pode ter jogado com o pato (o que assinalamos com "○"), e portanto não jogou com nenhum dos outros animais. Repetindo o raciocínio chegamos ao quadro final:

	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato	×	×	×	○
Burro	○	×	×	×
Cegonha	×	×	○	×
Dromedário	×	○	×	×

e concluímos que o pato jogou contra o hipopótamo, o burro contra o esquilo, a cegonha contra o golfinho e o dromedário contra a foca.

2. Uma alternativa para resolvermos este problema é desenharmos um "diagrama de Venn", em que os animais escolhidos por um amigo do Zéfiro são representados num conjunto, e dois animais no mesmo conjunto não podem jogar um contra o outro:



Como todos escolheram o pato e ninguém escolheu o hipopótamo, então estes dois animais jogaram um contra o outro. Além disso, tanto o cão como o peixe escolheram o burro e o único animal que nenhum dos dois escolheu foi o esquilo, portanto o burro jogou contra o esquilo. Repetindo este raciocínio para os restantes animais chegamos ao resultado anterior.

Agora para pensar:

1. Lewis Carroll, autor de "Alice no país das maravilhas", escreveu o seguinte argumento lógico, em que a última afirmação é uma conclusão baseada nas duas primeiras:

   Todas as águias podem voar.
   Alguns porcos não podem voar.
   Alguns porcos não são águias.

   Inventa os teus argumentos lógicos e tenta ver se um amigo acredita neles.

2. O Zéfiro perguntou a 100 amigos se gostam das cores amarelo, encarnado e verde, e obteve estas respostas:

   - 55 disseram gostar de amarelo, e 47 disseram gostar de encarnado,
   - 15 disseram gostar de amarelo e de encarnado mas não de verde,
   - 5 disseram gostar de encarnado e de verde mas não de amarelo,
   - 20 disseram gostar de amarelo e de verde mas não de encarnado,
   - 10 disseram gostar das 3 cores, e 12 disseram gostar apenas de verde.

   Quantos amigos do Zéfiro não gostam de amarelo, encarnado ou verde?

Curiosidades:

1. O inglês John Venn (1834-1923) desenvolveu os diagramas de Venn para representar conjuntos e as suas reuniões e intersecções.

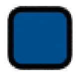
2. Os tipos sanguíneos podem ser representados usando diagramas de Venn.

3. O conto "Alice no país das maravilhas", de Lewis Carroll, está repleto de puzzles lógicos.

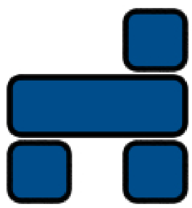
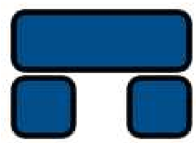
Desafio 1 – Janeiro 2007

Construções valiosas!

O Zéfiro tem um jogo de construções cujo objectivo é formar cadeiras ou mesas com os seguintes dois tipos de peças:

Tipo 1:  Tipo 2: 

Cada cadeira construída vale 5 pontos, enquanto que cada mesa vale 4 pontos. As cadeiras e as mesas têm as seguintes formas:

Cadeira:  Mesa: 

Quantas cadeiras e quantas mesas deve o Zéfiro construir se tiver 10 peças do tipo 1 e 4 peças do tipo 2, de modo a ter a maior pontuação possível?

Dica:

Começa por descobrir quais são as combinações possíveis de cadeiras e mesas que o Zéfiro pode formar com as peças que tem e quanto vale cada uma.

Construções valiosas!

Solução:

1. Uma forma de resolvermos este desafio é analisar todas as combinações de cadeiras e mesas que podemos formar com as peças disponíveis dos tipos 1 e 2, e calcular o total de pontos recebidos por cada uma dessas combinações. Além disso, uma vez que queremos obter a pontuação máxima, tentamos utilizar o maior número de peças possível.

   Começamos por variar o número de cadeiras que conseguimos construir e, para cada um desses valores, descobrir quantas mesas ainda podemos obter com as peças restantes.

   Os resultados estão no quadro seguinte:

Cadeiras	Mesas	Tipo 1	Tipo 2	Pontos
3	0	9	3	15
2	2	10	4	18
1	3	9	4	17
0	4	8	4	16

   e daqui concluímos que a pontuação máxima, de 18 pontos, é obtida se o Zéfiro construir 2 cadeiras e 2 mesas.

2. Os números de cadeiras e de mesas têm que ser positivos

   nº de cadeiras, nº de mesas ≥ 0

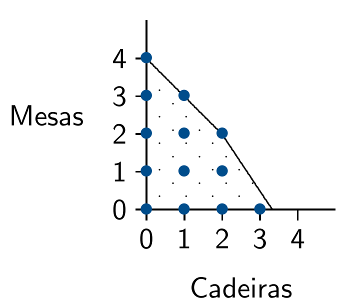
   Além disso, as construções possíveis dependem das peças que temos de cada tipo. Ora, cada cadeira tem 3 peças do tipo 1 e cada mesa tem 2 do mesmo tipo, logo:

   3 x nº de cadeiras + 2 x nº de mesas ≤ 10

   Do mesmo modo, cada cadeira e cada mesa têm 1 peça do tipo 2, portanto:

   nº de cadeiras + nº de mesas ≤ 4

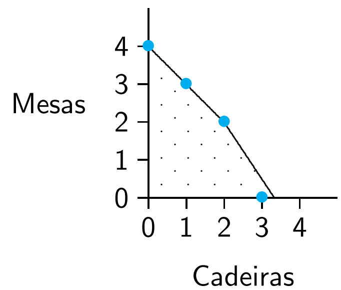
   Além destas condições sabemos que os números de cadeiras e de mesas têm que ser inteiros. Podemos agora representar graficamente estas condições e em seguida marcar, na região obtida, apenas os pontos que podem ser solução (•):



Por outro lado, queremos encontrar a combinação, ou seja, a solução possível, que maximiza a pontuação, sendo esta dada por

5 x nº de cadeiras + 4 x nº de cadeiras

Para achar a melhor solução é suficiente comparar as pontuações que se obtêm para as soluções representadas agora por •



Estes pontos correspondem às combinações:

- 0 cadeiras e 4 mesas,
- 1 cadeira e 3 mesas,
- 2 cadeiras e 2 mesas,
- 3 cadeiras e 0 mesas,

e avaliando o número de pontos atribuído a cada uma concluímos que o melhor resultado se obtém construindo 2 cadeiras e 2 mesas.

Agora para pensar:

1. Qual seria a solução se o Zéfiro não quisesse construir mais do que 1 cadeira?

2. O Zéfiro quer comprar pelo menos 40 gomas, que podem ser de laranja ou de morango. A loja onde o Zéfiro compra as gomas apenas tem disponíveis 25 gomas de laranja e 30 de morango. Sabendo que as primeiras custam 10 cêntimos e as segundas 6 cêntimos, quantas gomas deve o Zéfiro comprar de cada tipo, por forma a gastar o menos possível?

3. Um agricultor tem 90 hectares para plantar batatas e milho, e recebeu encomendas de 10 hectares de batatas e 5 hectares de milho. Além disso ele tem que seguir regras que o obrigam a plantar pelo menos 2 vezes mais milho do que batatas. Se o lucro for de 100 euros por hectar de milho e de 200 euros por hectar de batatas, quantos hectares de cada produto lhe darão o maior lucro?

Curiosidades:

1. Problemas como este, em que se querem calcular os valores que maximizam (ou minimizam) uma expressão linear admitindo um conjunto de restrições do mesmo tipo, dizem-se programas lineares.

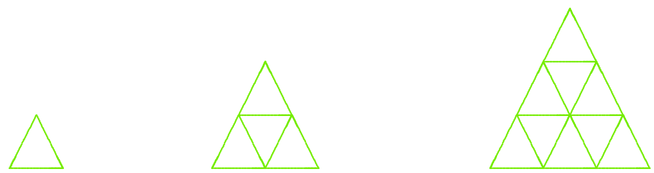
2. Quando os valores que procuramos têm que ser inteiros (como os números de cadeiras e de mesas neste desafio) o problema diz-se de programação inteira.

3. O Norte-Americano George Dantzig foi um Matemático que trabalhou para a Força Aérea durante a II Guerra Mundial e desenvolveu a programação linear, na altura com o objectivo de optimizar o planeamento militar. Mais tarde o método de Dantzig começou a ser aplicado noutras áreas em que se pretende minimizar despesas, ou maximizar lucros, sujeitas a restrições.

Desafio 2 – Janeiro 2007

Contar triângulos!

O Zéfiro constrói triângulos sucessivos usando fósforos velhos, tal como na sequência abaixo:



Consegues descobrir quantos fósforos são necessários para o Zéfiro construir o 30º triângulo?

Dica:

Analisa os primeiros casos e, em seguida, tenta generalizar.

Desafio 2 – Janeiro 2007

Contar triângulos!

Solução:

1. Uma das formas de resolvermos este desafio é construir os primeiros triângulos. Assim vemos que:
   - para obter o 2º é preciso acrescentar 2 x 3 fósforos ao 1º,
   - para obter o 3º é preciso acrescentar 3 x 3 fósforos ao 2º,
   - para obter o 4º é preciso acrescentar 4 x 3 fósforos ao 3º,

   portanto o 30º é obtido do 29º após juntar 30 x 3 fósforos. Uma vez que a figura inicial tem 3 fósforos, então o número de fósforos é de:
   - 3 + 2 x 3 = (1 + 2) x 3 para o 2º triângulo,
   - 3 + 2 x 3 + 3 x 3 = (1 + 2 + 3) x 3 para o 3º triângulo,
   - 3 + 2 x 3 + 3 x 3 + 4 x 3 = (1 + 2 + 3 + 4) x 3 para o 4º triângulo,

   e assim sucessivamente. Sabemos então que na 30ª figura da sequência existem (1 + ⋯ + 30) x 3 fósforos.

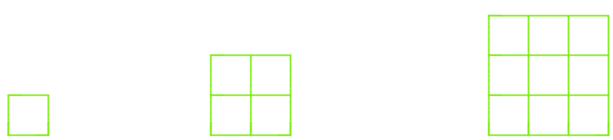
   Como 1 + ⋯ + 30 = (1 + 30) + (2 + 29) + ⋯ + (15 + 16) = 31 + ⋯ + 31 = 31 x 15 = 465, então o número de fósforos no triângulo 30 é 465 x 3 = 1395.

2. De outro modo podemos reparar que a 1ª figura tem 1 triângulo, a 2ª tem 1 + 2 triângulos, a 3ª tem 1 + 2 + 3 triângulos, e assim a figura 30 terá 1 + ⋯ + 30 = 465 triângulos. Ora cada triângulo têm 3 fósforos, portanto o número total de fósforos da figura 30 é 465 x 3 = 1395.

Agora para pensar:

1. E no triângulo 2007, quantos fósforos há?

2. Imagina que em vez de triângulos o Zéfiro quer construir quadrados. Quantos fósforos são necessários para fazer a figura 30 desta sequência?



3. Consegues mostrar que para todo o natural n se tem $1 + \cdots + n = \frac{1+n}{2} \times n$?

Curiosidades:

1. Compreender padrões de crescimento é importante em áreas como a economia ou a biologia.

2. Uma sequência como 1, 2, 3, . . . , em que se soma um a cada novo termo, diz-se uma sequência aritmética.

Desafio 1 – Fevereiro 2007

Já fizeste anos em 2007?

O Zéfiro quer convencer um amigo de que consegue adivinhar se ele já fez anos este ano. Para isso pede-lhe que escolha um número qualquer entre 1 e 99 e que faça as seguintes operações:

- multiplique o número por 50,
- some 2 ao resultado,
- se ele não tiver feito anos este ano, então volte a somar 2, caso contrário some agora 99,
- e, por fim, multiplique o resultado por 3.

No final o amigo revela que o resultado destas operações é 3762 e então o Zéfiro afirma que ele ainda não fez anos em 2007.

Achas que o Zéfiro está certo? Porquê?

Dica:

Tenta perceber como pode o Zéfiro distinguir as duas hipóteses.

Já fizeste anos em 2007?

Solução:

Como todo o inteiro multiplicado por um número par continua a ser um par, qualquer que seja o valor em que o amigo do Zéfiro pensou, o resultado do primeiro passo, ou seja, a sua multiplicação por 50, é um par e isto mantém-se depois de adicionarmos 2.

Se o amigo do Zéfiro já tiver feito anos em 2007, então adiciona 99 e obtém um número ímpar, senão adiciona 2 e obtém um número par.

Por outro lado, a multiplicação por um ímpar mantém a paridade do outro número, portanto o resultado final é ímpar se o amigo do Zéfiro tiver feito anos em 2007 e é par caso contrário.

Ora, o amigo do Zéfiro chegou ao valor par 3762, logo isto significa que ele ainda não fez anos em 2007, e portanto a afirmação do Zéfiro é correcta.

Agora para pensar:

1. Pede a um amigo que:

   - escolha um dos dois números: 14 e 23,
   - multiplique o número que escolheu por um qualquer ímpar,
   - multiplique o outro número por um par,
   - adicione os dois produtos.

   Por fim pede-lhe que anuncie o resultado a que chegou e, a partir desse valor, descobre qual dos dois números iniciais o teu amigo escolheu.

2. Inventa o teu próprio truque, testa-o com um amigo e, no final, explica-lhe como funciona.

3. O Zéfiro escreve os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 e em seguida procede, por nove vezes, do seguinte modo:

   - apaga dois números quaisquer e
   - escreve a diferença entre eles.

   É par ou ímpar o resultado que o Zéfiro obtém no final?

Curiosidades:

1. Se n é um número inteiro qualquer, então $2n$ é sempre um número par e $2n+1$ é sempre ímpar.

2. O calendário que usamos baseia-se nos movimentos do sol e da lua.

Desafio 2 – Fevereiro 2007

Números mágicos!

O Zéfiro escolheu um número entre 1 e 50 e em seguida efectuou as seguintes operações:

- somou-lhe 5,
- multiplicou o resultado por 3,
- e, por fim, subtraiu 17.

No final obteve o número 28. Qual foi o número em que o Zéfiro pensou inicialmente?

Dica:

Começa por analisar os resultados que o Zéfiro obteria se tivesse pensado nos números 1, 2, 3,. . . .

Números mágicos!

Solução:

Se seguirmos a sugestão e aplicarmos as operações que o Zéfiro realizou a 1, 2, 3 e 4 obtemos:

- $3 \times (1 + 5) - 17 = 3 \times 1 + 15 - 17 = 3 \times 1 - 2 = 1$,
- $3 \times (2 + 5) - 17 = 3 \times 2 + 15 - 17 = 3 \times 2 - 2 = 4$,
- $3 \times (3 + 5) - 17 = 3 \times 3 + 15 - 17 = 3 \times 3 - 2 = 7$,
- $3 \times (4 + 5) - 17 = 3 \times 4 + 15 - 17 = 3 \times 4 - 2 = 10$.

Do mesmo modo, escolhendo o número n obtemos:

- $3 \times (n + 5) - 17 = 3 \times n + 15 - 17 = 3 \times n - 2$.

Assim, sabemos que o resultado que o Zéfiro obteve, ou seja, 28, é igual a $3n$-2 e precisamos de descobrir o valor de n. Ora resolvendo a equação

$$3n - 2 = 28,$$

concluímos, sucessivamente, que

$$3n - 2 + 2 = 3n = 28 + 2 = 30$$
$$3n/3 = n = 30/3 = 10,$$

portanto o Zéfiro escolheu o número 10.

Agora para pensar:

1. Inventa o teu próprio truque, usa-o para modificar um número e depois tenta que um amigo adivinhe o número em que pensaste. No fim explica-lhe como funciona.
2. Pede a um amigo que pense num número e lhe adicione 15. Em seguida pede-lhe que multiplique a soma por 4, subtraia 8 e divida a diferença por 4. Por fim o teu amigo deve subtrair 12 ao quociente. A partir do resultado destas operações tenta descobrir o valor em que o teu amigo pensou.
3. É mais fácil seguir uma sequência de operações aritméticas se for descrita por palavras, ou se for expressa algebricamente?

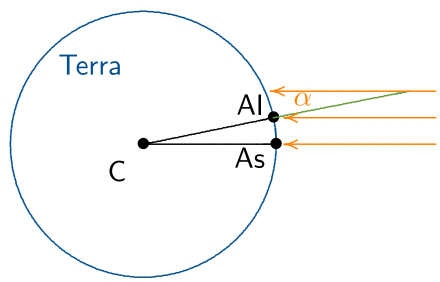
Curiosidades:

1. A palavra *álgebra* vem do Árabe *al-jabr*, que significa redução.
2. O matemático Grego Diofanto (que terá vivido por volta do ano 250 d.C.) é considerado por alguns como o pai da álgebra.

Medindo a Terra!

Há mais de 2200 anos um matemático Grego, de nome Eratóstenes, determinou o raio da Terra por um processo que envolveu a observação do Sol em duas cidades egípcias: Assuão (antigamente Siena) e Alexandria.

Eratóstenes tinha conhecimento de que em Assuão, ao meio-dia do Solstício de Verão, o Sol se encontrava a pique, uma vez que iluminava a água de um poço. Entretanto, o matemático observou que, à mesma hora e dia, um pilar vertical existente em Alexandria projectava uma sombra. Tal como o próprio Eratóstenes terá correctamente concluído, isto deve-se ao facto da Terra ser esférica.



Observa a figura e considera que

- Al é Alexandria,
- As é Assuão,
- C é centro da Terra,
- α é o ângulo entre o raio solar e o pilar vertical (representado a verde).

Eratóstenes sabia que a distância entre Assuão e Alexandria era aproximadamente 930 km, mediu o ângulo α obtendo 7^o, e conseguiu determinar o raio da Terra. Qual o valor que encontrou? Compara esse valor com o raio da Terra conhecido actualmente.

Dica:

O perímetro de uma circunferência de raio r é dado por $2 \times \pi \times r$, onde $\pi = 3.1415926$.

Repara na relação entre α e o ângulo definido pelos segmentos de recta que unem o centro da Terra (C) às cidades de Alexandria e Assuão.

[Coordenação de João Fernandes]

Medindo a Terra!

Solução:

Uma vez que, à hora indicada, os raios solares incidem sobre a terra de forma paralela à do segmento que une C a As, o ângulo $\alpha = 7^{\text{o}}$ tem amplitude igual à do ângulo definido pelos segmentos de recta que unem C a Al e a As.

Mas, como a Terra é esférica e a distância de Alexandria a Assuão é de 930 Km, que corresponde a 7º, então o perímetro da Terra, correspondente a 360º é

$$\frac{930 \times 360}{7}\ \text{km}.$$

Ora, como o perímetro de uma circunferência é dado por $2 \times \pi \times r$, onde r representa o raio, temos

$$2 \times \pi \times r = \frac{930 \times 360}{7},$$

donde

$$r = \frac{930 \times 360}{2 \times 7 \times \pi} = \frac{334800}{14 \times 3.1415926} \approx 7612,$$

e concluímos que o valor do raio da Terra determinado por Eratóstenes foi aproximadamente 7612 km.

Hoje em dia considera-se que o valor do raio da Terra é 6378 km.

Agora para pensar:

Como é que podes determinar, por observação, o ângulo α?

Para responderes a esta pergunta pensa como podes utilizar a sombra, no chão, do pilar vertical.

Curiosidades:

Na realidade a Terra não é, exactamente, uma esfera sendo achatada nos pólos. Por isso, a forma da Terra aproxima-se melhor a um elipsóide de revolução. A diferença entre a distância do centro da Terra ao Equador e a distância do centro da Terra aos pólos é aproximadamente 22 km.

Para saberes mais sobre este assunto consulta a ".Forma da Terra." no Wikipedia:

(http://pt.wikipedia.org/wiki/Forma_da_Terra).

A duração dos dias!

A Duração do Dia (DD) é o intervalo de tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol num dado local. O valor de DD depende da latitude geográfica (ϕ) do local de observação e do dia do ano.

A fórmula abaixo permite calcular DD (em horas) para um qualquer valor da latitude e dia do ano. A letra n representa o número de dias que decorreram desde 1 de Janeiro até ao dia considerado. Por exemplo, para o dia 5 de Janeiro $n = 5$, para 10 de Fevereiro $n = 41$ (31 dias de Janeiro + 10 dias de Fevereiro) e assim sucessivamente.

$$\cos\left(\frac{15 \times DD}{2}\right) = -\tan(\phi) \times \tan\left(23.45 \times \operatorname{sen}\left(\frac{360}{365}(284+n)\right)\right).$$

Consegues determinar o valor de DD para Coimbra, nos dias 28 de Fevereiro, 21 de Junho e 19 de Novembro de 2007? E qual é o valor máximo de DD em Coimbra e o valor de DD no Equador Terrestre?

Dica:

Na fórmula sen, $\cos$ e $\tan$ representam as funções seno, co-seno e tangente de um ângulo. Utiliza a função inversa do co-seno na máquina de calcular para descobrir o ângulo α com um dado co-seno.

[Coordenação de João Fernandes]

A duração dos dias!

Solução:

Para os dias indicados temos os seguintes valores de n:

dia	dias passados desde 1 de Janeiro de 2007 (n)
28 de Fevereiro	31 + 28 = 59
21 de Junho	31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 21 = 172
19 de Novembro	31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 19 = 323

Substituindo n pelos valores desta tabela e considerando a latitude de Coimbra igual a 40º, isto é, fazendo $\phi = 40$, na fórmula dada, concluímos que $\cos\left(\frac{15\times DD}{2}\right)$ apresenta os seguintes valores:

dia	$\cos\left(\frac{15\times DD}{2}\right)$
28 de Fevereiro	$-\tan(40)\times\tan\left(23.45\times\text{sen}\left(\dfrac{360\times 343}{365}\right)\right) = 0.12795129$
21 de Junho	$-\tan(40)\times\tan\left(23.45\times\text{sen}\left(\dfrac{360\times 456}{365}\right)\right) = -0.36397676$
19 de Novembro	$-\tan(40)\times\tan\left(23.45\times\text{sen}\left(\dfrac{360\times 607}{365}\right)\right) = 0.30596890$

Utilizando agora a máquina de calcular podemos determinar DD e, representando por arcos a função inversa do co-seno, obtemos

$\cos\left(\frac{15DD}{2}\right)$	$DD = \frac{2}{15}\text{arcos}\left(-\tan(40)\tan\left(23.45\text{sen}\left(\frac{360(n+284)}{365}\right)\right)\right)$
0.12795129	11.01983717
-0.36397676	14.84594991
0.30596890	9.62447138

donde a duração do dia:

- em 28 de Fevereiro é de aproximadamente 11 horas,
- em 21 de Junho é de aproximadamente 15 horas,
- em 19 de Novembro é de aproximadamente 9 horas e 40 minutos.

Como a função inversa do co-seno é decrescente, o maior valor que $\frac{15DD}{2}$ toma, fixando a latitude de 40º, é atingido para o menor valor de $-\tan(40)\tan\left(23.45\text{sen}\left(\dfrac{360(n+284)}{365}\right)\right)$. Por outro lado, a função tangente é crescente, logo este valor é alcançado quando $\text{sen}\left(\frac{360(n+284)}{365}\right) = 1$, o que acontece aproximadamente para $n = 172.25$, ou seja, por volta das 6 horas de 21 de Junho, para $DD = 14.8459809$, isto é, com uma duração de cerca de 14 horas e 50 minutos.

No Equador a latitude é de 0º. Como $\tan(0) = 0$ e o co-seno do ângulo de 90º é 0, $DD = \frac{2}{15}\times 90 = 12$, logo a esta latitude a duração do dia é igual a 12 horas.

Agora para pensar:

1. Repara que a duração máxima coincide com o instante do solstício de Verão que, como é sabido, é o dia mais longo do ano (no hemisfério norte). De uma forma similar obteremos a duração mínima no dia 21 de Dezembro.

   E qual será o valor de DD nos equinócios?

2. Constrói o gráfico de variação de DD ao longo do ano, dando valores a n igualmente espaçados.

   Que conclusão tiras do gráfico sobre os "dias que crescem" e/ou "dias que decrescem"?

Curiosidades:

Se substituíres a latitude e o número de dias por $\phi = 70^{\text{o}}$ e $n = 172$ (correspondente a 21 de Junho) obténs $\cos\left(\frac{15DD}{2}\right) < -1$. Este resultado é interpretado como a DD ser maior do que 24 horas, ou seja, o Sol nunca se põe. Eis algo que também é do conhecimento geral: há locais na Terra, perto dos pólos, onde (durante aproximadamente 6 meses) o Sol está sempre visível (ou invisível).

Corrida desencontrada

O Zéfiro e um amigo participam num rally automóvel que consiste em percorrer várias vezes o mesmo circuito. O Zéfiro percorre o circuito em 25 minutos, enquanto que o amigo demora 30 minutos a percorrê-lo.

Supondo que os dois corredores partem ao mesmo tempo, ao fim de quanto tempo o Zéfiro volta a apanhar o amigo?

Dica:

Tenta descobrir as posições do Zéfiro e do seu amigo quando o primeiro deles termina uma volta ao circuito.

Corrida desencontrada

Solução:

1. Uma forma de resolvermos este desafio é notarmos que 25 minutos após a partida o Zéfiro termina a primeira volta, enquanto que o amigo faz apenas 25/30, ou seja, 5/6 do circuito. Nesse instante o amigo está, portanto, no ponto 5/6 do circuito e atrás do Zéfiro. Por outro lado, o Zéfiro ganha ao amigo 1/6 do circuito a cada 25 minutos que passam.

   Para alcançar o amigo o Zéfiro precisa ainda de 5 vezes 25 minutos. Ora, $6 \times 25 = 150$, logo o Zéfiro necessita, na totalidade, de 150 minutos, isto é, de 2 horas e meia, para voltar a cruzar-se com o amigo.

2. Em alternativa sabemos que o Zéfiro completa uma nova volta ao fim de 25, 50, 75, 100, 125, 150,... minutos (a cada múltiplo de 25). O amigo demora 30, 60, 90, 120, 150, 150,... minutos (os múltiplos de 30) a voltar ao início do circuito. O 1º momento em que os dois se voltam a cruzar é o menor dos múltiplos comuns a 25 e a 30, ou seja, ao fim de 150 minutos, após 6 voltas do Zéfiro e 5 voltas do amigo.

Agora para pensar:

1. A escola do Zéfiro tem quatro clubes: o de Desportos, o de Literatura, o de Xadrez e o de Canto. No dia 1 de Outubro, reuniram-se os quatro clubes e combinaram funcionar da seguinte forma:

   - o de Desportos funcionaria dia sim dia não;
   - o de Literatura funcionaria a cada 3 dias;
   - o de Xadrez, de 5 em 5;
   - e o de Canto, de 6 em 6.

   Seguindo esta combinação, em que data se voltaram a reunir os clubes todos de novo?

2. A caminho da escola o Zéfiro passa numa escadaria. Se ele a subir de 2 em 2 degraus consegue chegar ao cimo e isso também acontece se a subir de 3 em 3 ou de 5 em 5 degraus. Qual o menor número possível de degraus?

Curiosidades:

1. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum entre os números a e b estão relacionados do seguinte modo: mmc(a,b) = a × b / mdc(a,b).

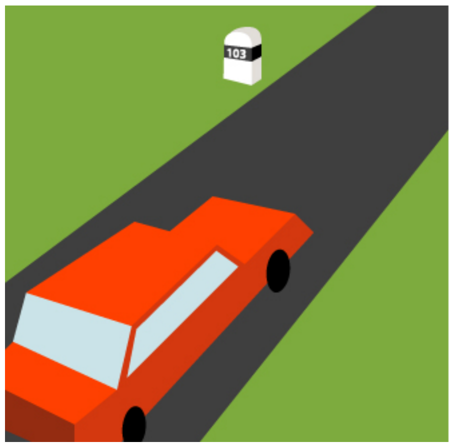
2. O filósofo Grego Zenão (por volta do ano 490 a.C.) é conhecido pelos paradoxos que propôs, com os quais Zenão pretendia mostrar a falsidade das teses que combatia.

   No Paradoxo de Aquiles e a tartaruga supõe-se que o herói grego Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida de 100m. Como Aquiles é 10 vezes mais rápido do que a tartaruga, esta começa a corrida 80m na frente da linha de partida. Então, enquanto Aquiles percorre os 80m que o separam da tartaruga, esta percorre 8m e continua na frente do herói. Em seguida Aquiles avança mais 8m, e a tartaruga mais 0,8m, e assim sucessivamente. Independentemente do tempo que passe Aquiles nunca alcança a tartaruga.

   A solução deste paradoxo usa os conceitos de limite e convergência de séries numéricas. Supondo que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma progressão geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga.

Viagem ao mundo da velocidade

O Zéfiro sai de Coimbra, viajando a velocidade constante. Passa por um marco quilométrico que contém dois algarismos. Uma hora depois passa por outro marco, contendo os mesmos dois algarismos, mas em ordem inversa. Uma hora depois passa um terceiro marco, contendo os mesmos algarismos, separados por um zero.



Qual é a velocidade a que o Zéfiro viaja?

Dica:
Pensa nos dois algarismos do primeiro marco e verifica o que lhes acontece nos marcos seguintes.

Viagem ao mundo da velocidade

Solução:

Uma vez que o número de quilómetros contido no 1º marco tem dois dígitos, escreve-se como: 10 x a + b, em que a representa o algarismo das dezenas e b o algarismo das unidades. Do mesmo modo, o número de quilómetros contido no 2º marco escreve-se como: 10 x b + a. No 3º marco uma das duas letras, a ou b, representa o número das centenas e o número de quilómetros escreve-se como: 100 x a + b ou 100 x b + a.

Se o Zéfiro viaja a uma velocidade constante, então o trajecto entre o 2º e o 3º marcos deve ser igual ao que existe entre o 1º e o 2º e deve também ser inferior a 100, donde se conclui que o número das centenas é igual a 1. Como o número do 1º marco que contém as dezenas, a, deve ser inferior ao número do 2º marco que contém as dezenas, b, então a tem que ser 1.

Por outro lado, se a velocidade é constante, então as distâncias percorridas numa hora têm que ser iguais e estas são dadas pelas diferenças entre os números dos marcos sucessivos, pelo que temos:

$$\text{Marco 2 - Marco 1} = \text{Marco 3 - Marco 2}$$
$$(10b + 1) - (10 + b) = (100 + b) - (10b - 1)$$

Mas então

$$9b - 9 = 99 - 9b \Leftrightarrow 18b = 108 \Leftrightarrow b = 6$$

e assim concluímos que os números nos marcos são 16, 61, 106 e que o Zéfiro viaja à velocidade de 45 km/h.

Agora para pensar:

1. Consegues dizer quantos números com dois algarismos existem?

2. A ideia de agrupar marcas foi utilizada nos sistemas mais antigos de numeração, como por exemplo o egípcio. Nesse sistema 1 era representado por: I, 2 por: II, e assim por diante. Ao chegar a 10 as dez marcas eram substituídas por um novo símbolo, ∩. Trocando cada dez marcas iguais por uma nova os egípcios escreviam todos os números de que necessitavam. Os símbolos que usavam eram:

Valor	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Hieróglifo	I	∩	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
Descrição	Corda	Calcanhar	Espiral	Flor de Lótus	Dedo	Girino	Homem

Quanto é ∩∩III e como seria representado 1502 neste sistema?

Curiosidades:

1. O sistema de numeração que usamos, em geral, é o decimal (ou de base 10). Com este sistema no número 115 o primeiro algarismo 1 representa 100 (uma centena ou 1×10^2), o segundo 1 representa 10 (uma dezena ou 1×10^1) e o 5 representa simplesmente 5 (5 unidades ou 5×10^0). Assim, nessa notação,

$$115 = 1 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

2. Os computadores utilizam o sistema binário (ou de base 2) para representar a informação. Aqui 115 é representado pelos restos da divisão de 115 por potências de 2, isto é, como 1110011, uma vez que:

$$115 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0.$$

Desafio 1 – Maio 2007

Combinar pontos

Num dado normal os pontos não são dispostos ao acaso, mas sim colocados de modo a que as faces opostas tenham por soma 7: assim, 6 está oposto a 1, 4 a 3 e 5 a 2.

Contudo, é possível dispor os pontos nas seis faces de um dado de outras maneiras diferentes. Quantas maneiras existem para fazer isso?

Dica:

Experimenta começar por fixar a face que contém o número 1 e pensa nos números que podem pertencer às faces vizinhas.

Combinar pontos

Solução:

Coloquemos o número 1 numa face do dado. Uma vez que existem mais cinco números, existem também cinco maneiras de escolher o que será oposto a 1.

Feito isto, é preciso dispor os quatro números restantes sobre as quatro faces dispostas em círculo. Apresentamos duas formas de fazer esta contagem.

1. Considere-se um dos quatro números restantes, existem então três processos de escolher o número que lhe será oposto.

   Em seguida resta-nos colocar os dois números finais sobre duas faces opostas, o que se pode fazer de dois modos diferentes.

   Assim sendo, existem $3 \times 2 = 6$ possibilidades de colocar estes quatro números.

2. Se o problema fosse dispor quatro números em fila, teríamos 4 hipóteses para escolher o primeiro número da fila, 3 para escolher o segundo, duas para escolher o terceiro, e uma para o último, ou seja, $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades de os colocar em fila. Acontece que, por exemplo as filas 1234 e 2341 são filas diferentes mas quando colocados em círculo dão origem a sequências iguais. Temos então que cada escolha de quatro números em círculo corresponde a quatro filas diferentes, ou seja, apenas temos $24 : 4 = 6$ possibilidades de colocar quatro números em círculo.

O número total de possibilidades é, portanto, de $5 \times 6 = 30$. Existem 30 processos diferentes de dispor os pontos nas faces de um dado.

Agora para pensar:

1. De quantas maneiras podes escolher o PIN (*Personal Identification Number*) para o teu telemóvel?
2. E se os algarismos não se podem repetir?
3. Quantos números de telefone diferentes podem existir com o indicativo 239 (zona de Coimbra)?
4. A combinação de um cofre usa três números entre 0 e 39. O cofre abre se os números são marcados numa ordem particular, o primeiro para a direita, o segundo para a esquerda e o terceiro de novo para a direita. Quantas combinações possíveis existem?

Curiosidades:

A palavra "combinação" em Matemática é usada de modo diferente do da "combinação" de um cofre. Numa combinação (matemática) a ordem em que um elemento aparece não é importante. Se a ordem dos elementos interessar a palavra utilizada em Matemática é "arranjo".

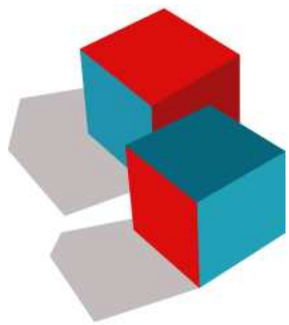
Desafio 2 – Maio 2007

Jogos de azar

O Zéfiro e um amigo jogam com dois dados, mas não utilizam os números. Em vez disso eles pintaram algumas faces de vermelho e outras de azul e lançam os dois dados ao mesmo tempo.

O Zéfiro ganha sempre que as duas faces voltadas para cima são da mesma cor e o amigo ganha sempre que são de cor diferente. Deste modo, são iguais as oportunidades que cada um tem de ganhar.

O primeiro dado tem cinco faces vermelhas e uma azul. Quantas faces vermelhas tem o segundo dado?



Dica:

Tenta descobrir os números de combinações de duas faces do dado com a mesma cor.

Jogos de azar

Solução:

Cada dado tem seis faces. Quando se lançam dois dados, existem 6 x 6 = 36 combinações possíveis de duas faces. Para que as oportunidades de obter duas vezes a mesma cor sejam metade da totalidade das oportunidades é necessário que 18 combinações dêem duas faces da mesma cor.

O primeiro dado tem cinco faces vermelhas e uma azul. Seja V o número de faces vermelhas do segundo dado. O número de faces azuis do mesmo dado será: 6 - V.

O número de combinações em que o resultado são duas faces vermelhas é igual ao produto do número de faces vermelhas do primeiro dado pelo número de faces vermelhas do segundo: 5 x V.

Do mesmo modo, o número de combinações em que o resultado são duas faces azuis é o produto de 6 - V por 1, ou seja, 6 - V.

Então, o número de combinações que dão duas faces com a mesma cor é:

$$5V + 6 - V = 18 \Leftrightarrow 4V + 6 = 18 \Leftrightarrow 4V = 12 \Leftrightarrow V{=}3,$$

portanto o segundo dado tem de ter três faces vermelhas e três azuis.

Agora para pensar:

1. Qual dos dois amigos teria mais hipóteses de ganhar se ambos os dados tivessem o mesmo número de faces azuis e vermelhas, ou seja, três faces de cada cor?

2. De um baralho com 52 cartas o Zéfiro retira, uma a uma, 2 cartas. De quantas maneiras diferentes pode ele obter:

   (a) um ás e um rei; (b) pelo menos uma carta vermelha; (c) duas cartas com figuras.

3. O Zéfiro joga agora um jogo diferente: ele escolhe um número de 1 a 6 e, em seguida, lança três vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Se o número escolhido pelo Zéfiro sai b vezes (no total dos três lançamentos) ele ganha b euros, b = 1, 2, 3. Em contrapartida, se o número escolhido pelo Zéfiro nunca ocorre, então ele perde 1 euro.

   Em média qual é o ganho do Zéfiro ao jogar este jogo?

Curiosidades:

1. Ao atirar uma moeda ao ar as hipóteses de sairem cinco caras seguidas e depois cinco coroas são as mesmas que sairem cinco caras e cinco coroas alternadamente.

2. As probabilidades são uma forma de medir hipóteses e encontram aplicação em áreas como a biologia, os jogos ou a análise de risco.

3. As probabilidades tiveram o primeiro grande impulso na Idade Média, com os tradicionais jogos de azar e apostas que se efectuavam na Corte.

   A primeira discussão profunda envolvendo probabilidades surgiu através da correspondência trocada entre Blaise Pascal e seu amigo Pierre De Fermat, chegando estes, através de caminhos distintos, à mesma solução do *problema da divisão das apostas* em 1654, que havia sido posto a Pascal pelo Cavaleiro De Méré, um jogador... profissional.

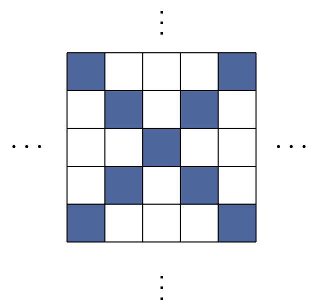
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Edição 2007/08

Conteúdo

Em busca do número perdido...

O Zéfiro pintou de preto os quadrados pequenos das duas diagonais de uma folha quadriculada quadrada. Ele pintou 101 quadrados e deixou em branco todos os outros.



Qual é o numero de quadrados pequenos brancos que ficaram na folha?

Dica:

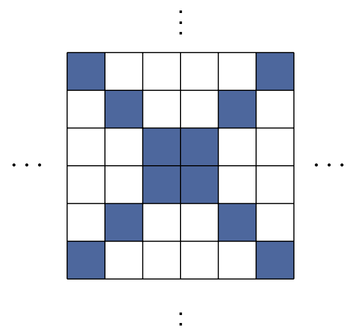
Conta o número de quadrados pretos em cada diagonal e a partir daí descobre quantos são os quadrados brancos. Se quiseres começa com um exemplo mais pequeno.

Em busca do número perdido...

Solução:

Um quadrado grande com n quadrados pequenos de cada lado tem n quadrados em cada diagonal.

Se n é par não há quadrados comuns às duas diagonais e o número total de quadrados nas diagonais é $n+n=2n$, um número par. Por exemplo, para $n=6$ teríamos



Se n é ímpar, como na figura do enunciado, então há um quadrado comum às duas diagonais e o número total de quadrados nas diagonais é $n+n-1=2n-1$, um número ímpar.

Uma vez que o Zéfiro pintou 101 quadrados de azul, o quadrado grande tem de ter um número ímpar de quadrados de lado. Assim, temos $2n-1=101$, donde obtemos $n=51$, o que significa que o quadrado grande tem 51 quadrados pequenos de lado. No total, o quadrado grande é formado por 51 x 51 = 2601 quadrados pequenos.

Como dos 2601 quadrados pequenos 101 estão pintados de azul, então existem 2601 - 101 = 2500 quadrados brancos.

Agora para pensar:

1. Qual seria a resposta se tivéssemos 200 quadrados pintados de azul?
2. Qual o tipo de quadrados cujo número aumenta mais rapidamente, os azuis ou os brancos?
3. O que acontecia se o Zéfiro pintasse de azul quadrados alternados?

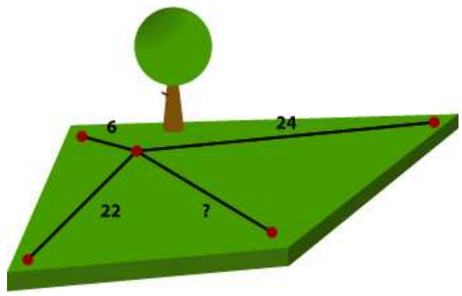
Curiosidades:

Problemas como este permitem prever como cresce um conjunto inicial, de acordo com uma determinada lei. Têm aplicação em áreas tão diversas como a Biologia, a Computação ou as Finanças.

Desafio 2 – Outubro 2007

Descobrir distâncias

O Zéfiro e três amigos têm de medir as distâncias de um ponto interior de um terreno rectangular até às esquinas do terreno. Os três amigos fazem o trabalho rapidamente e obtêm, em esquinas consecutivas, os valores 24, 6 e 22 metros, respectivamente. O Zéfiro, aproveitando o trabalho dos amigos e sem se mover do sítio inicial, determina a medida que falta.



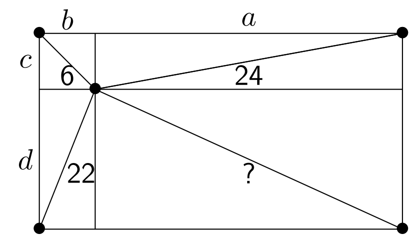
Qual é esse valor?

Dica:
Tenta descobrir o comprimento dos lados do rectângulo.

Descobrir distâncias

Solução:

O terreno em causa pode ser esboçado do seguinte modo:



Agora, aplicando, sucessivamente, o Teorema de Pitágoras aos vários triângulos com um dos lados de comprimento conhecido, conseguimos descobrir os valores de a, b, c e d, bem como o comprimento da diagonal em falta. Temos então:

(1) $a^2 + c^2 = 24^2$ (2) $b^2 + c^2 = 6^2$ (3) $b^2 + d^2 = 22^2$

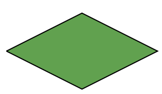
Subtraindo agora a equação (2) à (1) obtemos

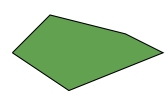
(4) $a^2 - b^2 = 24^2 - 6^2$

e adicionando (3) e (4) vem $a^2 + d^2 = 24^2 - 6^2 + 22^2$.

Representando por x o valor que pretendemos calcular, e usando novamente o Teorema de Pitágoras, temos por fim $a^2 + d^2 = x^2 = 24^2 - 6^2 + 22^2 = 1024$ e então o comprimento da diagonal que o Zéfiro deveria medir é $x = \sqrt{1024} = 32$.

Agora para pensar:

1. Sabendo que o losango  mede 6 unidades de lado. Qual é a sua área?

2. Imagina agora que queres medir a área de um terreno com a forma . Pensa como podes fazê-lo, dividindo a região em vários triângulos.

Curiosidades:

1. O cálculo de áreas de terrenos (ainda que de formas irregulares) pode ser feito a partir da divisão da região correspondente em vários triângulos, como sugerido acima.

2. Os instrumentos usados em Topografia (ciência dedicada à medição da superfície terrestre) permitem medir ângulos e lados de triângulos, e desse modo obter informação diversa acerca de terrenos, como por exemplo áreas, perímetros e altitudes.

Desafio 1 – Novembro 2007

Quadrados pares, pares em quadrados?

O Zéfiro tem um jogo com o tabuleiro abaixo.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Escolhendo números consecutivos deste diagrama ele pode formar quadrados de várias dimensões. Por exemplo:

1 x 1: $\boxed{1}$, $\boxed{8}$, $\cdots$

2 x 2: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 6 & 7 \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 7 & 8 \\ \hline \end{array}$, $\cdots$

$\ldots$

Quantos são os quadrados deste tipo, de qualquer tamanho, tais que a soma dos seus números é um número par?

Dica:

Pensa em quantos números ímpares precisa um quadrado de ter para que a soma de todos os seus números seja um número par.

Quadrados pares, pares em quadrados?

Solução:

Podemos formar quadrados com 1, 2, 3, 4 ou 5 quadrados de lado. Além disso, a soma de números pares é sempre um par, enquanto que a soma de números ímpares apenas é um par se tivermos uma quantidade par de números ímpares. Para que a soma dos números de um quadrado seja um número par, este terá que conter uma quantidade par de números ímpares. Deste modo, temos os seguintes casos:

1. Todo o quadrado com um número par de elementos de cada lado tem um número par de elementos, pelo que é constituído por igual quantidade de números pares e ímpares:

    - 4 / 2 = 2 nos quadrados 2 x 2, e
    - 16 / 2 = 8 nos quadrados 4 x 4,

    logo existem 16 quadrados 2 x 2, e 4 quadrados 4 x 4, cuja soma dos seus elementos é um número par.

2. Para os quadrados com um número ímpar de elementos podemos ter 1, 3 ou 5 elementos de cada lado.

    - Um quadrado com um elemento é simplesmente um número, portanto a soma é o próprio número. Assim, temos 12 destes quadrados 1 x 1 que contêm um número par.
    - Os quadrados 3 x 3 podem conter 4 números pares e 5 números ímpares, ou 5 números pares e 4 números ímpares, se o 1º elemento (canto superior esquerdo) for um número ímpar ou par, respectivamente. Interessam-nos pois aqueles cujo 1º elemento é um número par, ou seja:

2	3	4
7	8	9
12	13	14

6	7	8
11	12	13
16	17	18

8	9	10
13	14	15
18	19	20

12	13	14
17	18	19
22	23	24

    logo, existem 4 quadrados 3 x 3, cuja soma dos seus elementos é um número par.

    - O único quadrado 5 x 5 é o inicial, formado por 13 números ímpares, logo não existem quadrados 5 x 5 cuja soma dos seus elementos é um número par.

Concluímos então que o número pedido é 16 + 4 + 12 + 4 = 36.

Agora para pensar:

1. Dois números inteiros têm a mesma paridade, quando são ambos pares ou ambos ímpares. Qual é a paridade do produto de dois números pares? E a do produto de um número ímpar por outro qualquer?

2. Num quartel existem 100 soldados e, todas as noites, 3 são escolhidos para fazer de sentinela. É possível, após algum tempo, um dos soldados ter trabalhado com cada um dos outros exactamente uma vez?

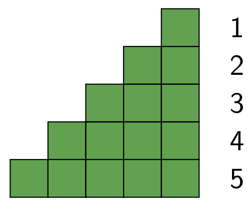
Curiosidades:

Em Informática o termo paridade designa o número de *bits* iguais a 1 de uma palavra. O código de paridade (0 se houver um número par de 1's e 1 caso contrário) é utilizado para indentificar a ocorrência de erros.

Desafio 2 – Novembro 2007

Números triangulares

O Zéfiro descobriu os números triangulares, números que podem ser descritos como a soma do número de quadrados que formam um triângulo. Por exemplo, T_5 representa-se por:



Assim, $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Consegues ajudar o Zéfiro a encontrar o 2007º número triangular, ou seja, a saber o valor de T_{2007}?

Dica:

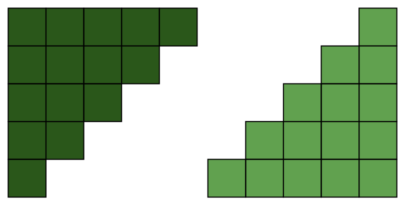
Pensa como podes calcular $T_{2007} + T_{2007}$.

Números triangulares

Solução:

A resposta é $T_{2007} = 2015028$. A seguir mostramos duas maneiras de descobrir a solução do problema.

1. Representando geometricamente o número T_5 duas vezes, e juntando os respectivos triângulos, obtemos um rectângulo com 6 unidades de comprimento e 5 de altura.



   Daqui concluímos que $T_5 + T_5 = 6 \times 5 = 30$ e portanto $T_5 = 15$. Do mesmo modo, para um inteiro positivo qualquer, n, podemos representar $T_n + T_n$ por um rectângulo de dimensão $(n+1) \times n$ e então $T_n + T_n = (n+1) \times n$, logo $T_n = \dfrac{(n+1) \times n}{2}$. Em particular, para $n = 2007$ temos $T_{2007} = \dfrac{2008 \times 2007}{2} = 2015028$.

2. Tal como $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, podemos obter o 2007-ésimo número triangular através de

$$\begin{aligned} T_{2007} &= 1 + 2 + \cdots + 2007 \\ &= (0+2007) + (1+2006) + (2+2005) + \cdots + (1003+1004) \\ &= 2007 + 2007 + \cdots + 2007 \\ &= 2007 \text{ x } 1004 = 2015028. \end{aligned}$$

Agora para pensar:

1. Pensa numa maneira simples de verificar se um número qualquer é triangular.

2. De entre 4851, 6214, 7626 e 8656, quais os números que são triangulares?

3. O regulamento de um torneio de futebol diz que cada equipa joga com as restantes uma única vez. Quantos jogos serão realizados se o torneio tiver quatro equipas inscritas? E se forem 12 equipas?

4. Na turma do Zéfiro há o hábito de, ao chegar, beijar os colegas que já chegaram à escola. Sabendo que a turma tem 20 alunos, quantos são os beijos em cada dia?

Curiosidades:

1. As duas fórmulas seguintes podem ser usadas para calcular números triangulares:

$$T_n = 1 + \cdots + n \quad \text{e} \quad T_n = T_{n-1} + n, \ \text{com } T_1 = 1.$$

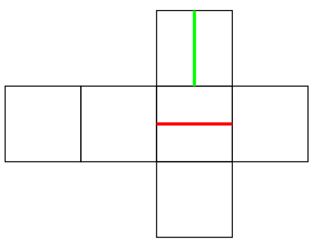
2. Carl Friedrich Gauss foi um Matemático, Astrónomo e Físico, Alemão, do final do século XVIII e início do século XIX. Na esperança de manter Gauss sossegado por algum tempo (ele era bastante irrequieto!), um dia o professor pediu-lhe que calculasse: 1 + 2 + 3 + ··· + 100. Rapidamente Gauss descobriu que a soma dos primeiros n inteiros é dada pela expressão n x (n-1) / 2 e calculou: 50 x 101 = 5050.

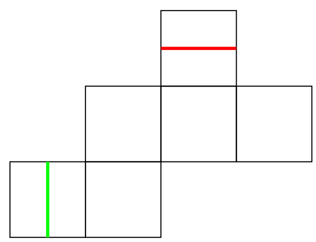
Desafio 1 – Dezembro 2007

Prendas ou cubos, fitas ou linhas?

O Zéfiro embrulha uma prenda e enfeita-a a toda a volta com três fitas de cores diferentes, uma encarnada, uma amarela e uma verde.

Se o Zéfiro abrisse o papel que envolve a prenda (imaginando que as fitas estão coladas ao papel) poderia obter uma das formas abaixo.





Consegues completar as figuras com as fitas coloridas que faltam?

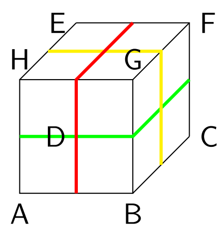
Dica:

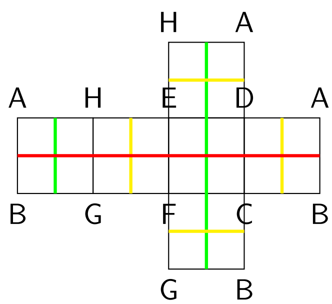
Tenta imaginar como ficariam os vários lados da prenda ao abrir o papel. Podes testar as várias formas com um modelo.

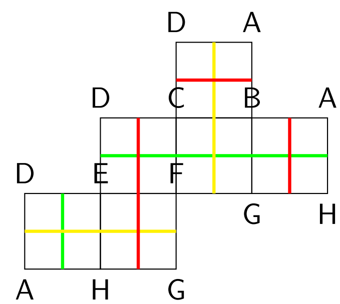
Fitas e prendas

Solução:

Uma maneira de resolvermos este desafio é construir um modelo, por exemplo um cubo de papel onde marcamos as fitas encarnada, amarela e verde, e depois abri-lo de forma a transformá-lo numa figura com 2 dimensões. Procedendo deste modo e associando letras a cada vértice do cubo inicial, como se vê abaixo, obtemos as seguintes planificações:

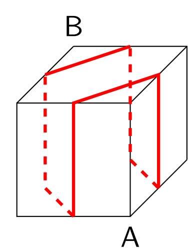






Agora para pensar:

1. Quanto mede a fita encarnada usada para enfeitar uma prenda com a forma de um cubo com 20 cm de lado, que atravessa os pontos médios das arestas, como na figura ao lado?



2. Qual é a menor quantidade de fita necessária para ligar os vértices A e B nessa prenda?

3. Tenta desenhar em 2 dimensões outros sólidos geométricos.

Curiosidades:

1. A linha aérea mais curta que liga Londres a Nova Iorque não é uma linha recta, mas sim uma curva que passa por cima da Islândia.

2. As linhas são muito usadas para definir e marcar trajectos, e podem distinguir-se através de traços ou cores diferentes. Dois exemplos são os diagramas das redes de transportes metropolitanos de Lisboa (www.metrolisboa.pt) e do Porto (www.metrodoporto.pt).

3. Profissões técnicas ligadas à arquitectura e à engenharia recorrem frequentemente à representação de objectos tridimensionais em vários desenhos a 2 dimensões.

Partilhar

O Zéfiro e outros cinco amigos querem dividir entre eles um bolo com cobertura de chocolate, com a forma de um cubo com 18 centímetros de lado.

De que modo hão-de os seis amigos repartir o bolo, sem que nenhum fique prejudicado? Há uma maneira única de fazer esta partilha?

Lembra-te que todos querem igual quantidade de cobertura!

Dica:

Pensa que se seis pessoas querem comer bolo, então cada grupo de três irá partilhar uma metade.

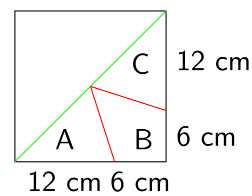
Desafio 2 – Dezembro 2007

Partilhar

Solução:

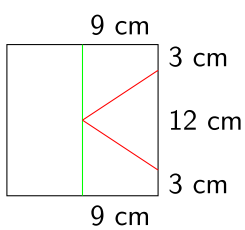
Para que todos fiquem com igual quantidade de bolo as fatias têm de ter o mesmo volume e para que todos tenham igual quantidade de cobertura a área da superfície lateral das fatias que tem chocolate tem de ser igual. Se os cortes forem feitos perpendicularmente ao prato, e uma vez que o bolo tem a forma de um cubo, as fatias têm o mesmo volume se as suas áreas no topo do bolo forem iguais. Assim, por um lado temos de dividir o quadrado do topo do bolo em 6 regiões com a mesma área. Por outro lado, para que as fatias tenham igual quantidade de cobertura, o perímetro das fatias comum ao perímetro do quadrado do topo tem de ser igual, ou seja, temos que dividir o perímetro do quadrado em 6 partes iguais. Existem várias formas de fazer esta divisão.

1. Começando por dividir o quadrado pela sua diagonal, como na linha verde na figura a seguir, temos em seguida que dividir cada 36 cm de perímetro por 3 pessoas, devendo cada uma receber uma fatia com 12 cm de lado em comum com o perímetro do quadrado. Resultam então as fatias marcadas a encarnado.



Podemos verificar que as áreas do topo (e portanto o volume das fatias) também são iguais. Os triângulos das fatias A e C têm 12 cm de base e 9 cm de altura (metade da largura do bolo), logo têm uma área de 12 x 9 / 2 = 54 cm^2.

Por outro lado, a área do triângulo da fatia B pode ser calculada subtraindo 54 cm^2 a metade da área do quadrado todo, que é 18 x 18, isto é, 18 x 9 - 2 x 54 = 162 - 108 = 54 cm^2.

2. 

Em alternativa podemos começar por dividir o topo do bolo em 2 rectângulos iguais. Em seguida dividimos cada rectângulo em 3 fatias com 12 cm de perímetro em comum com o perímetro do quadrado, tal como mostra a figura.

Agora para pensar:

1. Verifica que as várias fatias de bolo do segundo método de resolução têm todas o mesmo volume.
2. De que modo se poderia fazer a divisão do bolo por 5 pessoas?
3. Imagina agora que era necessário dividir em vários lotes um terreno à beira-rio. Que factores devem ser levados em conta para realizar esta divisão?

Curiosidades:

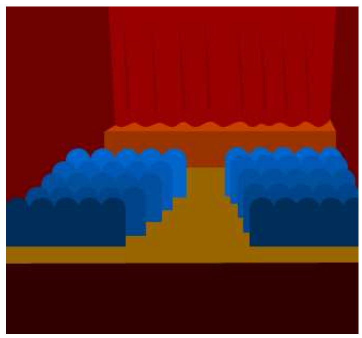
1. A divisão de figuras geométricas de acordo com certos factores e critérios é essencial no trabalho de engenheiros, desenhadores gráficos e até agentes imobiliários.
2. O matemático e astrónomo italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) iniciou uma nova era da geometria com a teoria dos indivisíveis.

Desafio 1 – Janeiro 2008

Todos aos seus lugares!

Na localidade em que o Zéfiro mora foi inaugurada uma sala de espectáculos com capacidade para 1050 espectadores.

As cadeiras estão dispostas em várias filas, de 42 lugares, e inicialmente cada um era numerado de 1 até 1050 (o nº 1 ficava mais perto do palco do que o nº 43, e assim por diante). Alguns espectáculos depois o director do espaço apercebeu-se que esta numeração não era prática e decidiu modificá-la. Agora cada bilhete apresenta uma letra, que indica a fila, e um número de 1 até 42 (a letra "A" fica mais perto do palco do que a letra "B").



1. Descobre os códigos correspondentes aos números 500 e 168.
2. Os pais do Zéfiro compraram os bilhetes 839, 840, 841 e 842. Será que a família vai conseguir ficar junta?

Dica:

Tenta perceber quais são os números que representam o 1º lugar de cada fila na numeração inicial.

Todos aos seus lugares!

Solução: Podemos começar por fazer um esquema dos vários lugares na sala de espectáculos do seguinte modo,

Fila 1	1	2	···	42	Letra A
Fila 2	43	44	···	84	Letra B
···	···	···		···	···
Fila i	42 x (i - 1) + 1	42 x (i - 1) + 2	···	42 x i	Letra ?
···	···	···		···	···
Fila 25	1009	1010	···	1050	Letra Y

donde notamos que o lugar j da fila i corresponde ao número 42 x (i - 1) + j. Uma vez feito este plano é simples responder às questões.

1. Como 500 = 42 x 11 + 38, então a cadeira número 500 está na fila 12, que corresponde à letra "L", e no lugar número 38. Assim, o bilhete tem o código "L38".

   Do mesmo modo, 168 = 42 x 4, e então a cadeira número 168 está na 4ª fila, que corresponde à letra "D", e no lugar número 42. Este bilhete tem o código "D42".

2. Uma vez que 839 = 42 x 19 + 41, a cadeira número 839 está na vigésima fila (letra "T") e no lugar número 41. Além disso, 840 = 20 x 42, logo a cadeira número 840 está no 42º lugar da mesma fila.

   Por outro lado, 841 = 42 x 20 + 1 e 842 = 42 x 20 + 2, pelo que estas duas cadeiras ocupam os lugares 1 e 2 da vigésima primeira fila (letra "U"), portanto a família não vai ficar junta.

Agora para pensar:

1. Repara que, exceptuando o último lugar de cada fila, a letra de cada fila é a que corresponde a 1 mais o resultado da divisão inteira do número inicial por 42, enquanto que o lugar nessa fila é dado pelo resto dessa divisão. Para o último lugar esta operação dá o lugar que lhe segue na nova numeração.

   Por exemplo, 500 / 42 = 11 com resto 38 e 168 / 42 = 4 com resto 0.

2. Explica porque razão o lugar número 89 fica mais à frente do que o "C5".

3. Na sala do Zéfiro os alunos sentam-se, por ordem do número, em filas com 4 carteiras individuais. Se o Joaquim tem o número 13, qual será o seu lugar na sala?

Curiosidades:

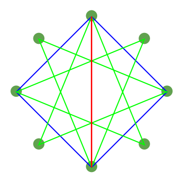
1. Um quadro com m linhas e n colunas, como o que usámos para representar a sala de espectáculos chama-se uma matriz com dimensão m por n.

2. As matrizes podem ser usadas simplesmente como uma estrutura para armazenar informação, mas também para representar transformações de sistemas. Por esta razão têm aplicações em áreas como a robótica, a computação gráfica ou a teoria dos jogos, entre outras.

Desafio 2 – Janeiro 2008

Estrela de números!

Ao marcar 8 pontos à mesma distância num círculo o Zéfiro pode percorrê-los usando passos de comprimento 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7. Contudo, com alguns destes passos não toca em todos os pontos. Por exemplo, escolhendo os pontos de 2 em 2, ou de 4 em 4, alguns ficam de fora, o que já não acontece de 3 em 3.



Passo 2
Passo 3
Passo 4

Para este caso, de que outras maneiras se pode passar em todos os pontos?

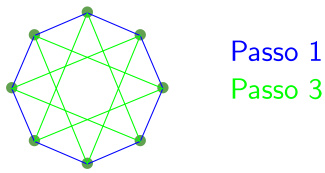
Se o Zéfiro marcar 5 pontos pode alcançá-los a todos, independentemente do passo que escolher. Que outros números têm esta propriedade?

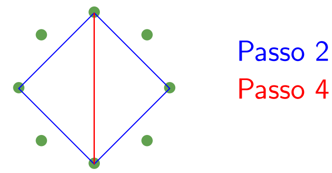
Dica:

Tenta descobrir a relação entre o nº de pontos no círculo e o nº de passos que asseguram que todos os pontos são tocados.

Estrela de números!

Solução: Para o círculo com 8 pontos que aparece, podemos verificar que com passos de 1 em 1, de 3 em 3 ou de 5 em 5 conseguimos passar por todos os pontos (figura à esquerda), enquanto que isso já não acontece ao usarmos passos de 2 em 2, de 4 em 4, de 6 em 6 ou de 8 em 8 (figura à direita).





Repara que com passo 5 obtemos o mesmo resultado que com passo 3, e que com passo 6 obtemos o mesmo resultado que com passo 2. Além disso, saltando pontos de 8 em 8 apenas atingimos o ponto de onde partimos.

Contando o nº de pontos que é atingido com cada um destes passos observamos que estes são 4 se o passo é 2 ou 6, 2 se o passo é 4, e 1 se o passo é 8, que são o menor nº pelo qual é necessário multiplicar o nº de passos de modo a obter um múltiplo de 8. Neste caso, 2 x 4 = 8, 6 x 4 = 24 = 3 x 8, 4 x 2 = 8 e 8 x 1 = 8.

Deste modo, para verificar se um passo atinge todos os pontos de um círculo basta determinar o máximo divisor comum (MDC) entre o nº de pontos e o tamanho do passo. Se o MDC é 1, então o passo alcança todos os pontos do círculo.

Por exemplo, procedendo do mesmo modo para um círculo com 10 pontos observamos o seguinte:

1. Passamos por todos os pontos se o passo é 1, 3, 7 ou 9 (neste caso o MDC é 1).
2. Não passamos por todos os pontos se o passo é 2, 4, 6 ou 8 (o MDC é 2), nem se é 5 (o MDC é 5).

Então, neste caso, existem 4 passos com os quais conseguimos passar em todos os pontos e esta conclusão funciona para um círculo com qualquer nº de pontos. Isto significa que só alcançamos todos os pontos se o MDC for sempre 1, ou seja, se o nº de pontos marcado for um número primo!

Agora para pensar:

1. Tenta verificar que a conclusão acima funciona para um círculo com qualquer nº de pontos.
2. De quantas maneiras diferentes podemos percorrer todos os pontos ao marcar 20 pontos e que passos permitem fazer isso?
3. Como escolher os passos que permitem alcançar todos os pontos num círculo com um nº de pontos qualquer?

Curiosidades:

1. Quando o MDC entre dois números é 1 dizemos que estes números são primos entre si.
2. A função de Euler associa a cada natural n, o nº de naturais entre 1, 2, $\ldots$, n que são primos com n. Por exemplo, se n é um número primo então é primo com 1, $\ldots$, $n-1$, e esta função tem o valor $n-1$.
3. Muitas aplicações no campo da criptografia (estudo de técnicas para modificar informação a ser entendida apenas pelo destinatário) baseam-se em propriedades dos números inteiros e dos números primos.

Desafio 1 – Fevereiro 2008

A todo o gás!

O caminho de casa do Zéfiro até à casa dos avós é constituído por 45 kilómetros bastante acidentados. A viagem de ida é a subir e os pais do Zéfiro costumam fazê-la a uma velocidade de 35 km/h. O regresso é mais fácil, uma vez que é a descer, e então os pais do Zéfiro conseguem conduzir a 63 km/h.

Qual é a velocidade média de toda a viagem?

Dica:

Lembra-te que a velocidade é dada pelo espaço que é percorrido, dividido pelo tempo que se leva a percorrê-lo.

A todo o gás!

Solução:

Para descobrir a velocidade média da viagem começamos por calcular o espaço percorrido e depois calculamos o tempo total do passeio.

Na viagem de ida e volta o Zéfiro e a família percorrem, no total,

2 x 45 = 90 kilómetros.

Quanto ao tempo de viagem, a ida é realizada a 35 km/h, logo demora 45 / 35 horas, enquanto que o regresso é realizado a 63 km/h, e portanto demora 45 / 63 horas. Assim, toda a viagem dura

(45 / 35) + (45 / 63) = $\frac{9\times5}{7\times5} + \frac{9\times5}{7\times9}$ = 9/7 + 5/7 = 14/7 = 2 horas.

Podemos agora calcular a velocidade média, que será igual a 90 / 2 = 45 kilómetros por hora.

Agora para pensar:

1. Repara que neste problema não era necessário conhecer a distância entre as casas do Zéfiro e dos seus avós.

   Como podias calcular a velocidade média sem esta informação?

2. Um dos erros comuns ao resolver este problema é assumir que a velocidade média é a média das velocidades, o que daria o resultado de (35 + 63)/ 2 = 49 kilómetros por hora.

   Contudo, neste problema a velocidade média não é dada pela média aritmética das velocidades.

Curiosidades:

1. A média aritmética é a mais conhecida e, para um conjunto de n valores $\{x_1, \ldots, x_n\}$, ela é dada por

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

2. A média geométrica é outro conceito de média muito utilizado na Estatística, definido como

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}.$$

   se os elementos do conjunto anterior forem positivos. Este valor pode ser visto como a média aritmética de um conjunto de valores obtido do inicial, através do que é conhecido por média logarítmica de $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

3. Existem vários outros tipos de média, por exemplo, se não fizer sentido adicionar os valores do conjunto é útil utilizar a média harmónica, definida por

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_1}}.$$

Desafio 2 – Fevereiro 2008

A charada das idades!

O Zéfiro quer saber a idade do avô de um amigo. Como este sabe que o Zéfiro gosta de desvendar um bom enigma, diz-lhe:

> "O meu neto tem aproximadamente tantos dias quantas as semanas do meu filho, e tem tantos meses quantos os meus anos. Os três juntos temos 140 anos.
>
> Consegues descobrir quantos anos tenho eu?"

Dica:

Podes relacionar entre si as idades dos três, usando as mesmas unidades.

A charada das idades!

Solução:

Comecemos por relacionar as idades das 3 pessoas e representar a informação do problema por equações. Para comparar as várias idades temos que usar as mesmas unidades. Recordemos que 1 ano são 12 meses, ou 52 semanas, ou então 365 dias, e representemos as idades do avô, do pai e do amigo do Zéfiro, em anos, por a, p e n, respectivamente.

O pai tem $52 \times p$ semanas, e o amigo do Zéfiro tem $365 \times n$ dias. Como estes dois valores são iguais sabemos que $365n = 52p$, mas esta equação é equivalente a $365n/52 = 52p/52$, que pode ser aproximada por $7n = p$. Por outro lado, o amigo do Zéfiro tem $12 \times n$ meses, logo $12n = a$. Uma vez que o amigo do Zéfiro, o seu pai e o seu avô, juntos, têm 140 anos, então $n + p + a = 140$. Juntando as 3 expressões chegamos a um sistema de 3 equações nas incógnitas n, p e a:

$$7n = p$$

$$12n = a$$

$$n + p + a = 140.$$

Pela segunda equação sabemos que $n=a/12$, e pela primeira que $p=7n=7a/12$. Substituindo n e p por estas expressões na terceira equação, obtemos

$$a \,/\, 12 + 7a \,/\, 12 + a = 140,$$

ou seja,

$$a + 7a + 12a = 12 \times 140,$$

donde $a = 12 \times 140 \,/\, 20$, que é igual a 84. Então, o avô do amigo do Zéfiro tem aproximadamente 84 anos. Além disso, podemos dizer que o pai e o amigo do Zéfiro têm, cada um, 42 anos e 7 anos.

Agora para pensar:

1. Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 23 animais e 82 patas. Quantas são as galinhas e os coelhos?

2. Um copo cheio de água pesa 325g. Se deitarmos fora metade da água, o seu peso diminui para 180g. Quanto pesa o copo vazio?

3. Duas pessoas ganharam, juntas, 50 euros por um trabalho e uma delas ganhou 25% do que a outra. Quanto ganhou cada pessoa?

Curiosidades:

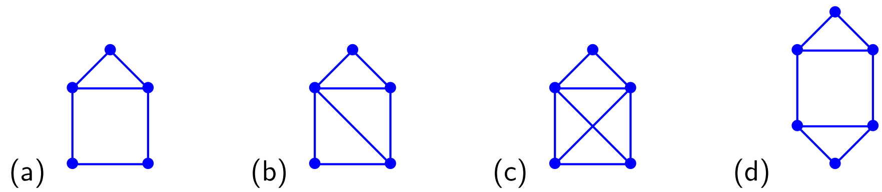
1. Sistemas de equações como o anterior dizem-se sistemas de equações lineares. O seu estudo é um ramo da área da Matemática conhecida como Álgebra Linear. Estes sistemas desempenham um papel importante em áreas fundamentais como a Física, a Química ou a Economia.

2. Outro grupo de sistemas de equações, ditos não lineares, são, em geral, mais complexos mas podem ser aproximados por um sistema de equações lineares.

Linhas e pontos!

Num livro de brincadeiras o Zéfiro tenta percorrer com o lápis uma figura dada, passando por todos os pontos e segmentos, mas sem tocar duas vezes no mesmo segmento e sem nunca levantar o lápis.

Entre as figuras abaixo encontra-se uma para a qual não é possível fazer isso. Sabes qual delas é?



Achas que conseguias descobrir essa figura se não pudesses usar o lápis? De que modo?

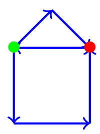
Dica:

Tenta descobrir o ponto (ou os pontos) por onde deves começar o percurso.

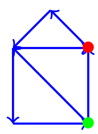
Linhas e pontos!

Solução:

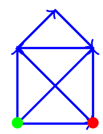
A única figura que não é possível percorrer da maneira indicada é a (d). Para os restantes casos temos os seguintes percursos, onde os pontos verde e encarnado representam o início e o final:



(a)



(b)

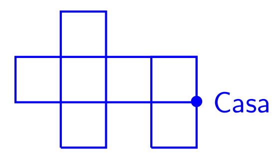


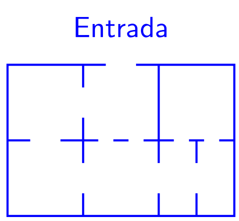
(c)

Passar num ponto implica usar uma linha que aí termina e outra que aí começa, logo em cada ponto incide um nº par de linhas. As possíveis excepções são o 1º e o último pontos do percurso. Como em 4 dos pontos da figura (d) incidem 3 linhas, nunca podemos ter o percurso que procuramos.

Agora para pensar:

1. O Zéfiro está encarregue de distribuir os jornais em algumas ruas do bairro. Consegues descobrir um percurso que ele possa usar, de modo a passar e, todas as ruas da figura ao lado uma única vez, partindo de sua casa?

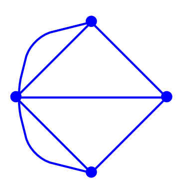


2. 

Segundo a mitologia grega Theseus procurou o monstro Minotauro (metade homem e metade touro) num labirinto. Theseus marcou o percurso com uma corda e, após encontrar e matar o monstro, usou a corda para regressar.
O Zéfiro recria esta lenda e fixa a corda na entrada de sua casa. Ele quer fazer uma procura eficiente no labirinto e passar em cada porta uma só vez. De acordo com a planta de casa do Zéfiro qual é o percurso ideal?

Curiosidades:

O Matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) resolveu um problema semelhante ao dado, após visitar a cidade de Königsberg (actualmente chamada Kalingrado). Uma das charadas dos habitantes locais era se seria possível atravessar todas as pontes da cidade uma única vez. Muitos acreditavam que não, mas Euler foi o 1º a demonstrá-lo, encontrando uma forma de responder à pergunta sem levantar dúvidas a ninguém.



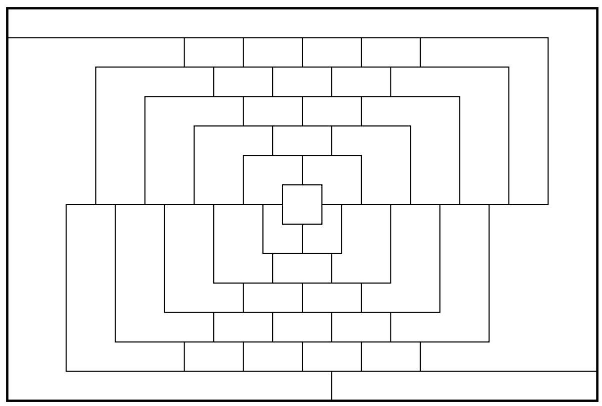
Euler representou as margens e as ilhas do rio Pregel - figura à esquerda - por pontos (nós) e as pontes que as ligam por linhas entre os pontos (arestas) - figura à direita. Em seguida ele mostrou não se poder atravessar todas as arestas do diagrama exactamente 1 vez sem levantar o lápis, quando em mais do que 2 nós incide um nº ímpar de arestas. No diagrama de Königsberg existe 1 nó em que incidem 5 arestas e 3 em que incidem 3 arestas, donde se conclui que o percurso de que se falava não existe.

O diagrama usado por Euler diz-se um grafo e a solução deste problema marcou o início da teoria dos grafos, aplicada nos nossos dias ao desenho de redes de comunicações ou ao planeamento de rotas.

Desafio 2 – Março 2008

Brincar com cores!

O livro de brincadeiras do Zéfiro tem uma parte dedicada à pintura de figuras. O Zéfiro só tem 5 cores diferentes e quer pintar a figura abaixo, de modo a que regiões vizinhas (ou seja, zonas que têm uma fronteira em comum) fiquem com cores distintas.



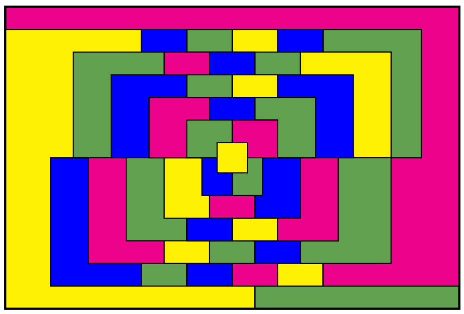
Conseguias fazer o mesmo com menos cores? Quantas?

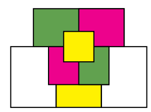
Dica:
Escolhe as cores de que mais gostares.

Brincar com cores!

Solução:

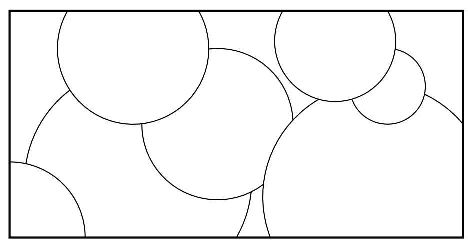
Existem várias formas de colorir a figura dada com 5 cores para distinguir regiões vizinhas. Tal como se refere no parágrafo de Curiosidades, o mesmo sucede usando 4 cores, como se mostra na figura da esquerda. Como se verifica na figura à direita, não é possível fazer o mesmo apenas com 3 cores.





Agora para pensar:

1. Tenta colorir a figura ao lado com o menor número de cores, usando cores distintas para regiões vizinhas.



2. És capaz de encontrar uma figura para a qual sejam necessárias mais de 4 cores, não podendo duas áreas com uma fronteira comum ter a mesma cor? (Fronteira não pode ser apenas um ponto.)

Curiosidades:

1. O Problema das Quatro Cores surgiu em 1852, quando o matemático Francis Guthrie descobriu que podia colorir um mapa com os condados de Inglaterra utilizando apenas 4 cores para garantir que 2 condados vizinhos nunca teriam a mesma cor. Apenas em 1976 Appel e Haken conseguiram mostrar que o mesmo é válido para qualquer mapa planar. A demonstração era tão complexa que exigia o recurso a meios informáticos e não podia ser verificada sem utilizar um computador, o que levou muitos a questionarem a sua validade. Em 1994 Seymour, Robertson, Sanders e Thomas sugeriram uma demonstração mais simples, mas o uso de computadores continuou a ser indispensável.

2. Em 1 de Abril de 1975 Martin Gardner apresentou um mapa, com 110 regiões e dizia serem necessárias 5 cores para o colorir. O mapa era demasiado complexo mas não passava de uma brincadeira de 1 de Abril. O esquema proposto neste desafio é uma simplificação do então apresentado por Gardner.

Desafio 1 – Abril 2008

A jogar. . . à geometria!

Um poliedro em forma de bola de futebol, como mostra a figura, é constituído por 32 figuras, 20 das quais são hexágonos regulares e 12 são pentágonos regulares.

Consegues descobrir quantos vértices tem este poliedro?

Dica:

Repara que cada vértice pertence a várias figuras simultaneamente.

A jogar. . . à geometria!

Solução:

Uma vez que a bola é composta por hexágonos e pentágonos podíamos pensar em contar o número de vértices de um hexágono, 6, e multiplicá-lo pelo número de hexágonos no poliedro, 20. Obteríamos assim um total de 6 x 20 = 120 vértices. Contudo, tal como se alerta na dica, os vários hexágonos tocam-se e portanto, deste modo, estaríamos a contar o mesmo vértice mais do que uma vez, o que não é correcto. Em alternativa podemos pensar dos seguintes modos:

1. Todo o vértice do poliedro é vértice de um pentágono e os pentágonos não se tocam. Ora a bola de futebol contém 12 pentágonos, logo tem 5 x 12 = 60 vértices.

2. Como vimos nos pentágonos há 5 x 12 = 60 vértices e nos hexágonos 6 x 20 = 120 vértices, logo no total 180 vértices. No entanto, no poliedro cada vértice é comum a três polígonos (2 hexágonos e 1 pentágono), portanto a bola contém 180 : 3 = 60 vértices.

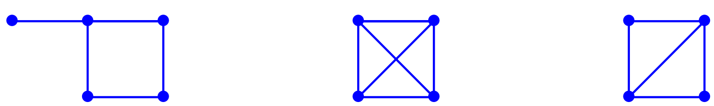
Agora para pensar:

1. Em 1750 Euler descobriu uma igualdade que relaciona os números V de vértices, F de faces e A de arestas de um poliedro: V + F - A = 2. Tenta verificar se para o poliedro dado no desafio esta fórmula é verdadeira.

2. Procura outros poliedros para os quais a fórmula de Euler não é válida.

3. A fórmula de Euler pode ser usada igualmente em alguns grafos, notando que estes dividem o plano em várias regiões fechadas e a região exterior ilimitada. Sendo A o número de arestas, N o número de vértices e R o número de regiões para tais gráficos tem-se, novamente: N + R - A = 2.

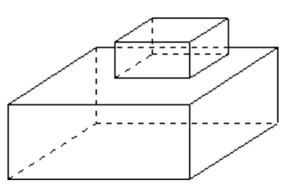
   Verifica se os grafos a seguir satisfazem esta fórmula e tenta perceber o que os distingue.

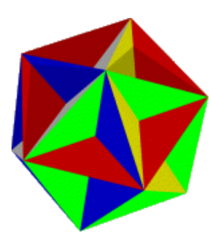


Curiosidades:

1. Leonhard Euler foi um matemático suíço do século XVIII com importantes contribuições em várias áreas da Matemática e da Física, como a geometria, a trigonometria, o cálculo ou a teoria de números.

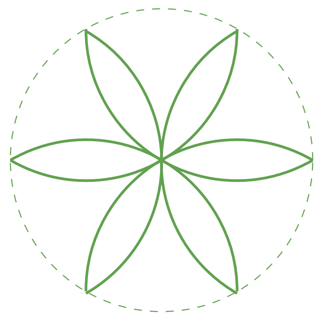
2. As figuras abaixo são exemplos de poliedros não-eulerianos, também designados, carinhosamente, por "monstros".





Primavera... de circunferências!

O Zéfiro desenha uma flor dentro de uma circunferência, mantendo sempre a mesma abertura do compasso, tal como mostra a figura abaixo.



Sabendo que a flor que o Zéfiro desenhou tem perímetro 2, qual é o raio da circunferência inicial?

Dica:

Nota que a flor desenhada pelo Zéfiro divide a circunferência inicial em várias partes iguais.

Primavera. . . de circunferências!

Solução:

Começamos por notar que cada arco que passa pelo centro da circunferência inicial tem o mesmo raio que esta e são necessários 3 arcos iguais para preencher a circunferência.

Como o perímetro da flor é 2 e esta é constituída por 6 pétalas, cada uma formada por 1 arco, concluimos que cada arco mede $2 : 6 = 1/3$. Assim, a circunferência, que é formada por 3 arcos, tem um perímetro igual a $3 \times 1/3 = 1$.

Como o perímetro de uma circunferência é dado por $P = 2\pi \times r$, onde r representa o raio, temos

$$1 = 2\pi \times r$$

e portanto o raio da circunferência inicial é $r = 1/2\pi$.

Agora para pensar:

1. O nº π representa o quociente entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Arquimedes usou $22/7$ como valor aproximado para π. Para obter esse valor construiu um polígono regular com 96 lados (muito próximo de uma circunferência) e calculou a razão entre o perímetro e o diâmetro do polígono.

   Procede como Arquimedes e calcula aproximações de π. Usa polígonos com diferentes números de lados e nota que quanto mais lados usas mais o perímetro do polígono se aproxima do da circunferência.

2. Faz um jogo com os teus amigos e premeia quem conhece mais casas decimais do nº π. Podes usar mnemónicas para memorizar esse valor, por exemplo:

   "Sim, é útil e fácil memorizar um número grato aos sábios." "Sou o medo e temor constante do menino vadio que dorme."

Curiosidades:

1. A letra grega π, foi adoptada para o nº a partir da palavra grega para perímetro, supostamente por William Jones em 1706, e popularizada por Euler alguns anos mais tarde.

2. O cálculo do número π tem registos desde a Babilónia (1800 a.C) que consideravam o valor 3 como uma boa aproximação. Matemáticos de várias eras tentaram escrever π como p / q, onde p e q são números inteiros, mas em 1761 Johann Heinrich Lambert descobriu que tal não é possível, classificando π como um nº irracional. Para o cálculo de π são necessárias aproximações através de séries infinitas de somas.

3. Todos os anos aparece um novo valor mais preciso do nº π. Em 1999 os matemáticos Kanada e Daisuke Takahashi calcularam uma aproximação com 206 168 430 000 casas decimais, usando um computador. Eis uma aproximação de π com 80 casas decimais:

   3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899. . .

Números dominó!

O Zéfiro descobriu os números dominó. As figuras abaixo mostram os números dominós 2 por 2 e 2 por 3.

e que valem 5 e 8, respectivamente.

Com base neste esquema descobre quanto valem os números dominó 2 por 4 e 2 por 5. Consegues prever, e explicar, quanto será 2 por 2008? E quais são os números dominó 3 por 2, 3 por 3 e 3 por 2008? E ainda 2008 por 2008?

Dica:

Conta os números de pintas azuis e encarnadas de cada peça correspondente a um número dominó.

Números dominó!

Solução:

1. Uma maneira de resolver este problema é contar separadamente o nº de bolas encarnadas e o nº de bolas azuis, e somá-los.

   O nº dominó 2 por 4 - à esquerda - tem 2 linhas e 4 colunas de bolas azuis, portanto tem 2 x 4 = 8 destas bolas, e apenas 1 linha e 3 colunas de bolas encarnadas, isto é, 1 x 3 = 3 destas bolas. Esse nº vale 8 + 3 = 11. O nº dominó 2 por 5 - à direita - tem as mesmas linhas mas 5 colunas, portanto tem 2 x 5 = 10 bolas azuis e tem 1 x 4 = 4 bolas encarnadas, logo vale 10 + 4 = 14.

   Dado o nº dominó a x b, a representa o nº de linhas e b o nº de colunas, e portanto contém a x b bolas azuis e (a-1) x (b-1) bolas encarnadas. Substituindo a e b pelo valores dados obtemos os pedidos:

a	b	bolas encarnadas	bolas azuis	valor
2	2008	2 x 2008 = 4016	1 x 2007 = 2007	6023
3	2	3 x 2 = 6	1 x 2 = 2	8
3	3	3 x 3 = 9	2 x 2 = 4	13
3	2008	3 x 2008 = 6024	2 x 2007 = 4014	10038
2008	2008	2008 x 2008 = 4032064	2007 x 2007 = 4028049	8060113

2. Em alternativa podemos descobrir quantas bolas são acrescentadas a um nº dominó ao manter o nº de linhas e aumentar o de colunas. Por exemplo, o nº dominó 2 x 1 tem 2 bolas e 2 x 2 obtém-se daquele juntando 3 novas bolas, portanto vale 2 + 3 = 5. Da mesma forma 2 x 3 = 5 + 3 = 2 + 3 + 3 = 2 + 3 x 2 = 8 e o mesmo sucede sempre que se aumenta 1 coluna. Assim, o nº dominó 2 x n é dado por 2 + 3 x (n-1), donde, fazendo n = 2008 concluímos que 2 x 2008 vale 2 + 3 x 2007 = 6023.

   Quando temos 3 linhas, 3 x 1 vale 3, e juntar 1 coluna implica adicionar 5 novas bolas. Então, 3 x n vale 3 + 5 x (n -1). Substituindo agora n por 2, 3 e 2008, obtemos os valores 8, 13 e 10038 dos números dominó 3 x 2, 3 x 3 e 3 x 2008, respectivamente. Por outro lado, o nº dominó 2008 x n vale 2008 + (2007 + 2008) x (n - 1), logo 2008 x 2008 tem 2008 + 4015 x 2007 = 8060113 bolas.

Agora para pensar:

Repara que, apesar de haver uma única resposta para cada pergunta, existem vários processos diferentes para chegar ao resultado certo. Mesmo depois de descobrimos a solução de um problema tem interesse pensar em maneiras diferentes de o resolver.

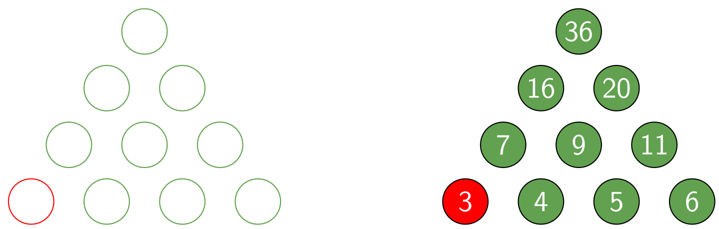
Curiosidades:

Muitas vezes é útil “partir” o problema inicial em vários problemas mais pequenos ou mais fáceis, como fizémos na 2ª proposta de resolução, e tentar resolver cada um deles.

Desafio 2 – Maio 2008

A pirâmide mágica!

O Zéfiro brinca com uma pirâmide mágica, em que as posições a verde são preenchidas sempre que ele coloca um número inteiro qualquer na posição a vermelho, como mostram as figuras abaixo:



Que números deve o Zéfiro inserir na posição a vermelho, para que no topo surjam o 84 e o 44?

Descobre como se podem escrever os números que aparecem no topo e usa essa conclusão para explicar por que razão esse número nunca é o 48.

Estende o teu raciocínio para pirâmides com 5 ou 6 posições na base.

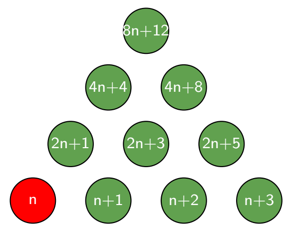
Dica:

Tenta perceber como se obtêm os números nas posições a verde.

A pirâmide mágica!

Solução:

O nº no topo do triângulo aumenta 8 unidades quando aumentamos o valor na posição encarnada de 1 unidade. Para verificar isto podemos usar o diagrama auxiliar apresentado a seguir, que simula a situação em que começamos com o valor n, vindo a obter 8n + 12 no topo.



Assim, se usarmos n + 1 na 1º posição iremos obter 8n + 8 + 12 = 8n + 20.

De acordo com o diagrama, o nº no topo é sempre resultado da multiplicação de um número ímpar por 4, uma vez que 8n + 12 = 4 x (2n + 3). Ora 48 / 4 = 12 não é um número ímpar, portanto não existe nenhum inteiro capaz de conduzir ao valor 48 na posição no topo do triângulo.

Do mesmo modo, para descobrir como obter 84 no cimo do triângulo é preciso saber qual o valor n tal que 8n + 12 = 84. Esta equação é equivalente a 8n = 72 e n = 9, portanto concluímos que a posição encarnada deve conter o número 9.

Por outro lado, 8 x 4 + 12 = 44, donde a 1ª posição deverá ser 4, de modo a obter 44 no topo.

Supondo agora que a base da pirâmide tem 5 ou 6 posições podemos fazer um esquema semelhante ao anterior. Desse modo concluímos que com 5 posições na base o nº no topo é 16n + 32, enquanto que quando a pirâmide tem 6 posições na base esse nº é dado por 32n + 80.

Agora para pensar:

1. Qual o valor n a inserir na posição a encarnado que dá origem ao número 2008 no topo do triângulo? E ao número 2009?

2. Consegues perceber o que sucederia se em vez de um triângulo tivéssemos uma pirâmide, tridimensional, com uma base quadrada, e fixássemos um dos vértices da base com o valor de um inteiro n?

3. Imagina que o valor nas bolas na base do triângulo é calculado como indicado na figura:

   Qual a diferença produzida então no valor no topo do triângulo?

Curiosidades:

O número total de bolas num triângulo como o deste desafio, contendo n bolas na base, é dado pelo número triangular de ordem n, T_n (ver Desafio 2 de Novembro de 2007).