OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Edições 2006/07 e 2007/08 (http://www.mat.uc.pt/zefiro)

Joana Teles (marta@mat.uc.pt) e Marta Pascoal (marta@mat.uc.pt)
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Prefácio

Os Desafios do Zéfiro consiste num sítio electrónico (http://www.mat.uc.pt/zefiro), integrado no conjunto de iniciativas *Actividades Matemáticas* do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Os problemas aí propostos mensalmente dividem-se em duas categorias, uma dirigida a um público com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos, Desafio 1, e outra para jovens de 13 a 15 anos, Desafio 2. No final do mês foram disponibilizadas as resoluções dos respectivos desafios, bem como algumas curiosidades acerca dos temas abordados, mostrando ao mesmo tempo a utilização de conceitos relacionados com a Matemática no quotidiano. Os utilizadores do sítio submeteram as respostas aos desafios do mês. As participações mensais foram vez avaliadas e no final de cada edição foram anunciados os nomes dos utilizadores com os melhores resultados.

O sítio electrónico *Os Desafios do Zéfiro* foi desenvolvido em 2006 por Margarida Matos e Ricardo Sismeiro (alunos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra). A personagem Zéfiro é uma criação de Yann Thual, as restantes ilustrações estiveram a cargo de Gonçalo Forte e Yann Thual. A equipa de coordenação dos conteúdos do sítio foi constituída por Joana Teles e Marta Pascoal. Muitos dos problemas apresentados foram inspirandos por outras publicações de divulgação matemática, tais como os sítios

O sítio teve duas edições, a primeira ao longo do ano lectivo de 2006/07 e a segunda em 2007/08. Os jovens premiados na edição de 2006/07 foram:

Desafio 1: Miguel Basílio, Ricardo Lima, Andreia Baltazar, Leonor Albuquerque, Ricardo Costa

Desafio 2: Miguel Basílio, Ricardo Lima, Andreia Baltazar, Jessica Pereira, Tiago Nunes;

na edição de 2007/08 destacaram-se:

Desafio 1: Alexandre Carvalho Truppel, Ana Isabel Pereira Mestre, Beatriz Cunha Morais, Mariana Francisco Mendes de Almeida e Paiva e Patrícia Sofia Marques dos Santos.

Desafio 2: Ana Rita Carvalho Faria, Eliana Iria Luz Barreira, Joana Sofia Pereira Mendes, Joel Neves da Silva e José Diogo Gaspar Aurélio.

Os prémios distribuídos tiveram o apoio do Banco BPI e do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. As cerimónias de entrega de prémios incluiram actividades diversas e contaram com a colaboração do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, da Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra, do Museu da Ciência da Universidade de Coimbra e dos restantes colegas envolvidos nas *Actividades Matemáticas*, assim como com as contribuições dos Professores António Leal Duarte e Paulo Oliveira.

Finda a competição apresentamos uma compilação dos problemas e das resoluções propostas ao longo das duas edições desta iniciativa, e que continuam também acessíveis no, ainda activo, sítio original (*Os Desafios do Zéfiro*). Pensamos que este texto pode servir como ferramenta de trabalho ou de lazer a alunos, famílias e professores, e por isso renovamos o convite para acompanharem o Zéfiro e aceitarem o desafio! Em casa ou na escola esperamos que utilizem estes desafios como motivação para aprenderem e descobrirem novos temas.

Coimbra, Janeiro de 2010

Joana Teles e Marta Pascoal

OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Edição 2006/07

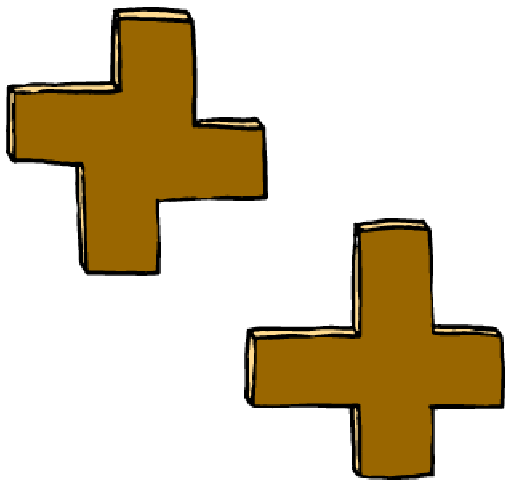
Conteúdo

Qual é a melhor bolacha de chocolate? 1
Quantos caminhos? 3
Decifra a mensagem secreta! 5
Criptenigma! 7
Quadrados malucos! 9
Quem joga com quem? 11
Construções valiosas! 14
Contar triângulos 17
Já fizeste anos em 2007? 19
Números mágicos 21
Medindo a Terra! 23
A duração dos dias 25
Corrida desencontrada! 28
Viagem ao mundo da velocidade! 30
Combinar pontos 32
Jogos de azar 34

Desafio 1 – Outubro 2006

Qual é a melhor bolacha de chocolate?

O Zéfiro adora chocolate! Em casa ele tem bolachas com as formas das figuras abaixo, que têm como cobertura uma camada com a mesma espessura de chocolate.



Qual das duas bolachas é a preferida do Zéfiro?

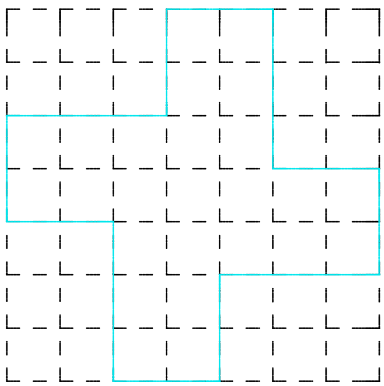
Dica:
Pensa como podes medir a área do topo de cada bolacha, por exemplo, usando papel quadriculado

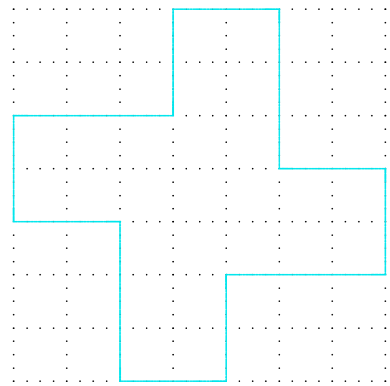
Qual é a melhor bolacha de chocolate?

Solução:

O Zéfiro prefere a bolacha com maior área. Existem vários possíveis processos de resolver este problema.

1. Usa papel quadriculado, ou mesmo milimétrico, e conta o número de quadrados que cada bolacha cobre. (Quanto mais pequenos forem os quadrados mais exacta é a estimativa da área.)



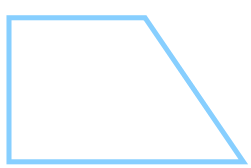


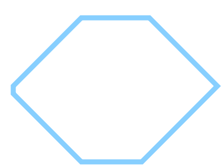
2. Num papel desenha as duas bolachas, pinta-as de cores diferentes e recorta-as. Coloca uma sobre a outra. Se não conseguires cobrir a primeira bolacha com as partes da segunda, então a primeira tem uma área maior. Caso contrário a que tem uma área maior é a segunda.

Agora para pensar:

1. Podes usar uma corda para descobrir o perímetro de cada bolacha. Será verdade que uma bolacha com um perímetro maior tem também uma área maior? Porquê?

2. É possível calcular as áreas de algumas figuras dividindo-as em quadrados, rectângulos ou triângulos. Como podias dividir as formas abaixo para saber a sua área?





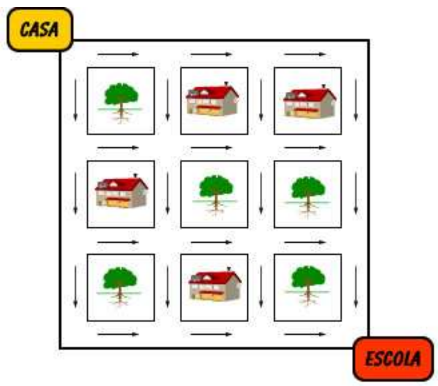
Curiosidades:

1. Algumas pessoas dizem que uma parte da costa litoral tem um comprimento infinito. O que querem dizer com isto?

2. Um planímetro é uma ferramenta que mede a área de figuras com forma irregular, com base no perímetro da figura.

Quantos caminhos?

O Zéfiro está ansioso por ir para a escola! Andando pelo passeio, de quantas maneiras diferentes pode ele ir de casa até à escola? (Claro que ele não quer voltar para trás!)



Dica:

Começa por tentar contar quantos caminhos existem entre duas esquinas próximas.

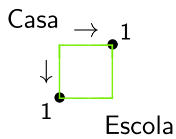
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

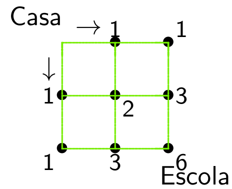
Desafio 2 – Outubro 2006

Quantos caminhos?

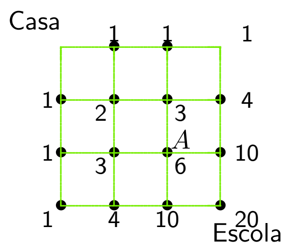
Solução:

Começa por olhar para o caso em que existe apenas um ou dois blocos de casas entre os pontos de partida e de destino:





No primeiro caso existem 2 caminhos distintos entre a casa e a escola. Agora observa que, no segundo caso, o número de caminhos possíveis para chegar a cada esquina é igual à soma do número de caminhos possíveis para chegar a cada uma das esquinas adjacentes. Os números indicam de quantas maneiras se pode chegar a cada vértice. Continuando pelo mesmo processo podemos completar a contagem. Assim, o Zéfiro pode ir para a escola através de 20 caminhos diferentes.

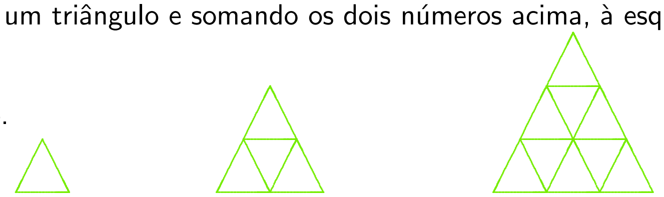


Agora para pensar:

1. Existem diferentes caminhos com o mesmo comprimento?
2. Qual o comprimento do caminho mais curto de casa do Zéfiro até à escola?
3. De quantas maneiras pode o Zéfiro ir para a escola, se no caminho quiser passar na casa do seu amigo Zéfirão, que fica no ponto A?
4. Porque é importante para as companhias de transportes a escolha de caminhos eficientes?

Curiosidades:

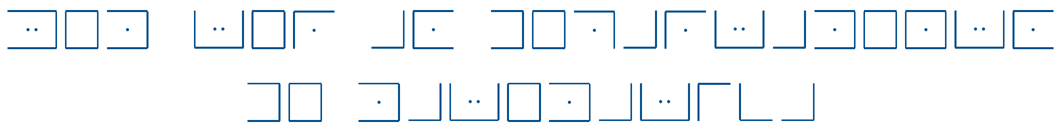
Blaise Pascal foi um matemático Francês do século XVII, que trabalhou com um padrão de números para resolver vários problemas de contagem. Este padrão, conhecido como triângulo de Pascal, forma-se começando com linhas de 1's em dois lados de um triângulo e somando os dois números acima, à esquerda e à direita, para obter cada novo número do padrão.



Desafio 1 – Novembro 2006

Decifra a mensagem secreta!

O Zéfiro achou um bilhete com a mensagem:



Noutro papel o Zéfiro encontrou as correspondências seguintes:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

J	K	L
M	N	O
P	Q	R

S	T	U
V	X	W
Y	Z	

Será que consegues decifrar a mensagem?

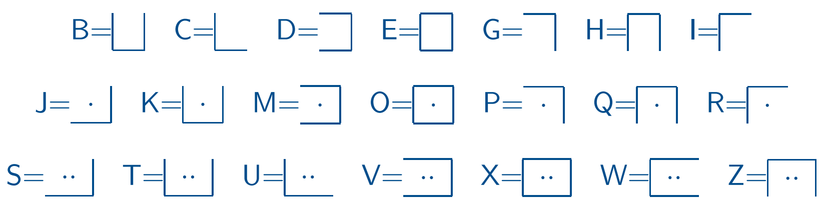
Dica:

Escreve o alfabeto todo para obteres o código completo.

Decifra a mensagem secreta!

Solução:

Cada letra é representada pelos traços da posição em que se encontra na grelha respectiva. Além disso, as letras de uma grelha são distinguidas das da anterior por terem mais um ponto. Assim, as letras da primeira grelha não têm nenhum ponto, as da segunda têm apenas um ponto e as da terceira têm dois pontos. Seguindo este raciocínio as restantes letras do alfabeto têm as correspondências seguintes:



e portanto a mensagem secreta é:

VEM TER AO DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Agora para pensar:

1. Existem muitos códigos, uns simples, como a cifra de César, outros bem complicados como a encriptação RSA, que usa números primos grandes e que é muito comum no comércio electrónico.

   Na cifra de César cada letra do alfabeto é deslocada para a direita um número fixo de casas. Por exemplo, quando esse número é 3 temos:

   A=D F=I L=O N=Q Y=A

   Escreve a mensagem que o Zéfiro recebeu usando este código.

2. No máximo quantas tentativas são necessárias para um espião quebrar uma mensagem encriptada com a cifra de César?

3. Cria o teu código, escreve uma mensagem secreta e depois pede a um amigo para a revelar.

Curiosidades:

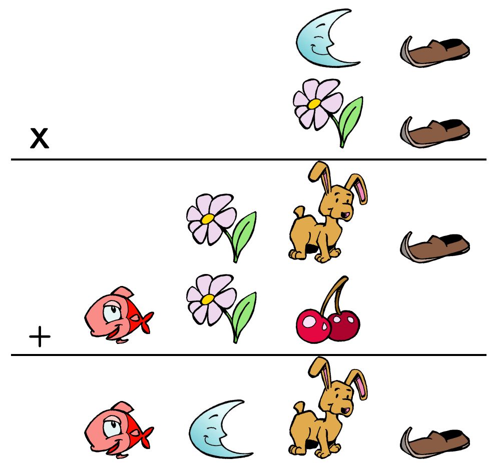
1. Os códigos são usados há séculos como forma de comunicar em segredo. As pessoas que os criam chamam-se criptólogos, enquanto que as que se ocupam em "quebrá-los" se chamam criptanalistas. O código da mensagem que o Zéfiro recebeu apareceu no século XII e chama-se cifra "pig pen".

2. O imperador romano Júlio César usava a "Cifra de César" para enviar ordens secretas aos seus generais.

3. Durante a II Guerra Mundial a Alemanha utilizou uma máquina para codificar as suas mensagens. Chamavam-lhe a máquina Enigma.

Criptenigma!

O Zéfiro sabe que nesta operação aritmética cada figura corresponde a um algarismo.



Consegues ajudá-lo a descobrir quanto vale cada figura?

Dica:
Começa por identificar os valores possíveis de .

Desafio 2 – Novembro 2006

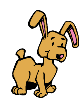
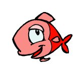
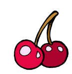
Criptenigma!

Solução:

Numa resolução, de várias possíveis, podemos começar por reparar que:

- as unidades de sapato vezes sapato são sapato, portanto este apenas pode ser 0, 1, 5 ou 6,
- sapato vezes lua sapato tem 3 algarismos, logo sapato não pode ser 0 nem 1, e se cão mais cerejas dá cão, então cerejas é 0, sapato é 5 e flor é par,
- duas flores são a lua, logo flor é 2 ou 4,
- uma vez que lua é par as dezenas de lua sapato vezes sapato, ou seja, cão, têm que ser 2, portanto flor é 4 e lua 8,
- por fim, peixe só pode ser 3.

Resumindo,

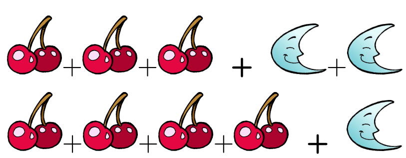
 = 8  = 5  = 4  = 2  = 3  = 0

Agora para pensar:

1. Descobre quanto vale cada letra nesta operação:

$$\begin{array}{cccccc} & & & F & O & R \\ \times & & & Y & O & U \\ \hline & & Y & F & Z & O \\ + & F & O & R & O & \\ \hline & F & Y & Q & Z & O \end{array}$$

2. Imagina agora que lua e cerejas representam números e descobre quanto valem cada figura, sabendo que:



= 76

= 68

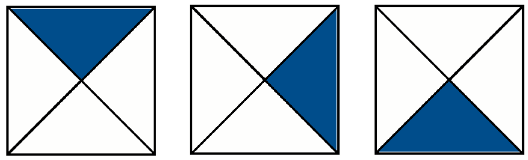
Curiosidades:

1. Enigmas deste tipo envolvem operações aritméticas e os dígitos, ou números, são substituídos por símbolos, que por vezes são letras. Os símbolos são chamados de incógnitas e as expressões de equações.
2. As equações têm aplicação em muitos campos, como por exemplo engenharia e gestão.
3. A teoria dos jogos e a lógica são ramos da matemática em que se estudam jogos e puzzles.

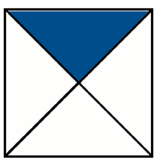
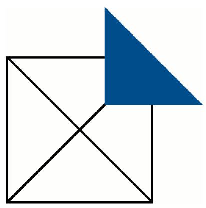
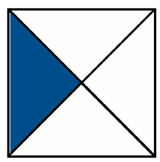
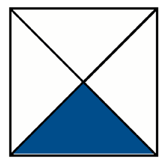
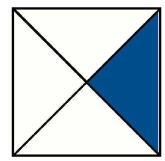
Desafio 1 – Dezembro 2006

Quadrados malucos!

O Zéfiro muda de posição um quadrado e nos três primeiros movimentos vê a sequência abaixo:



Em qual das seguintes posições estará o quadrado se o Zéfiro fizer 2007 movimentos?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

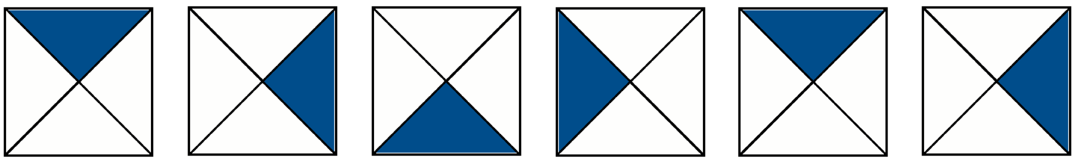
Dica:

Começa por descobrir as posições do quadrado depois de cada um dos primeiros seis movimentos.

Quadrados malucos!

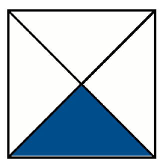
Solução:

O Zéfiro está a girar o quadrado no sentido dos ponteiros do relógio, logo nos seis primeiros movimentos temos:



Então, de quatro em quatro movimentos repete-se a mesma sequência.

Como $2007 = 501 \times 4 + 3$, as últimas posições que o quadrado assume são as três primeiras, logo a resposta correcta é a (d):



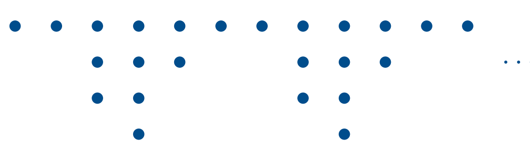
Agora para pensar:

1. As figuras $\triangle$, $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$ e $\square$ são repetidas na sequência:

$$\triangle\ \clubsuit\ \diamondsuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \square\ \triangle\ \clubsuit\ \diamondsuit\ \cdots$$

Que figura da sequência aparece na 2007ª posição?

2. O colar de safiras da Cleópatra indicado na figura abaixo tem 2007 pedras na primeira fila.



Quantas pedras tem o colar?

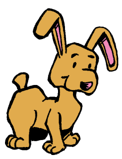
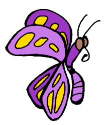
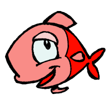
Curiosidades:

Em todos estes problemas procura-se um padrão. Depois de encontrado o padrão é suficiente determinar um resto para saber quais os últimos elementos da sequência.

Desafio 2 – Dezembro 2006

Quem joga com quem?

No Sábado à tarde há quatro jogos de xadrez (imaginários) entre animais. Os amigos do Zéfiro tentaram prever quem iria ganhar cada um dos jogos. Os palpites de cada um estão na figura ao lado.

-  escolheu o pato, o burro, a cegonha e o dromedário.
-  escolheu a cegonha, o esquilo, a foca e o pato.
-  escolheu o burro, a foca, o pato e o golfinho.
- Por alguma razão desconhecida ninguém escolheu o hipopótamo.

Descobre quem jogou contra quem.

Dica:
Repara que jogadores escolhidos pelo mesmo animal não podem ter jogado um contra o outro.

Quem joga com quem?

Solução:

1. Uma das posíveis formas de resolvermos este desafio é começarmos por construir um quadro, onde marcamos todos os animais escolhidos pelo cão na primeira coluna e os animais restantes na primeira linha.

	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato				
Burro				
Cegonha				
Dromedário				

Ora, uma vez que a borboleta escolheu a cegonha, o esquilo, a foca e o pato, sabemos que estes animais não jogaram uns contra os outros e podemos assinalar essas situações na tabela escrevendo "×".

	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato	×	×		
Burro				
Cegonha	×	×		
Dromedário				

Procedendo do mesmo modo para o peixinho, que escolheu o burro, a foca, o pato e o golfinho, obtemos o seguinte quadro:

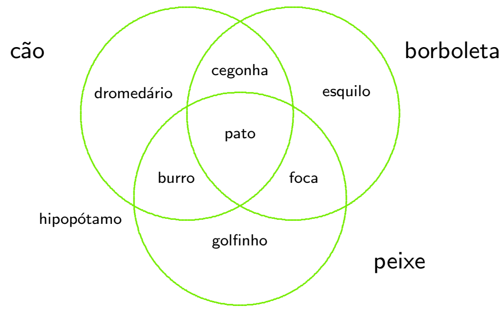
	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato	×	×	×	
Burro		×	×	
Cegonha	×	×		
Dromedário				

Descobrimos então que o hipopótamo só pode ter jogado com o pato (o que assinalamos com "○"), e portanto não jogou com nenhum dos outros animais. Repetindo o raciocínio chegamos ao quadro final:

	Esquilo	Foca	Golfinho	Hipopótamo
Pato	×	×	×	○
Burro	○	×	×	×
Cegonha	×	×	○	×
Dromedário	×	○	×	×

e concluímos que o pato jogou contra o hipopótamo, o burro contra o esquilo, a cegonha contra o golfinho e o dromedário contra a foca.

2. Uma alternativa para resolvermos este problema é desenharmos um "diagrama de Venn", em que os animais escolhidos por um amigo do Zéfiro são representados num conjunto, e dois animais no mesmo conjunto não podem jogar um contra o outro:



Como todos escolheram o pato e ninguém escolheu o hipopótamo, então estes dois animais jogaram um contra o outro. Além disso, tanto o cão como o peixe escolheram o burro e o único animal que nenhum dos dois escolheu foi o esquilo, portanto o burro jogou contra o esquilo. Repetindo este raciocínio para os restantes animais chegamos ao resultado anterior.

Agora para pensar:

1. Lewis Carroll, autor de "Alice no país das maravilhas", escreveu o seguinte argumento lógico, em que a última afirmação é uma conclusão baseada nas duas primeiras:

   Todas as águias podem voar.
   Alguns porcos não podem voar.
   Alguns porcos não são águias.

   Inventa os teus argumentos lógicos e tenta ver se um amigo acredita neles.

2. O Zéfiro perguntou a 100 amigos se gostam das cores amarelo, encarnado e verde, e obteve estas respostas:

   - 55 disseram gostar de amarelo, e 47 disseram gostar de encarnado,
   - 15 disseram gostar de amarelo e de encarnado mas não de verde,
   - 5 disseram gostar de encarnado e de verde mas não de amarelo,
   - 20 disseram gostar de amarelo e de verde mas não de encarnado,
   - 10 disseram gostar das 3 cores, e 12 disseram gostar apenas de verde.

   Quantos amigos do Zéfiro não gostam de amarelo, encarnado ou verde?

Curiosidades:

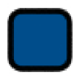
1. O inglês John Venn (1834-1923) desenvolveu os diagramas de Venn para representar conjuntos e as suas reuniões e intersecções.

2. Os tipos sanguíneos podem ser representados usando diagramas de Venn.

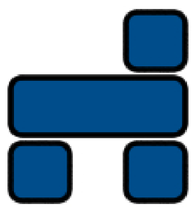
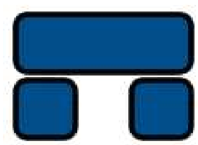
3. O conto "Alice no país das maravilhas", de Lewis Carroll, está repleto de puzzles lógicos.

Construções valiosas!

O Zéfiro tem um jogo de construções cujo objectivo é formar cadeiras ou mesas com os seguintes dois tipos de peças:

Tipo 1:  Tipo 2: 

Cada cadeira construída vale 5 pontos, enquanto que cada mesa vale 4 pontos. As cadeiras e as mesas têm as seguintes formas:

Cadeira:  Mesa: 

Quantas cadeiras e quantas mesas deve o Zéfiro construir se tiver 10 peças do tipo 1 e 4 peças do tipo 2, de modo a ter a maior pontuação possível?

Dica:

Começa por descobrir quais são as combinações possíveis de cadeiras e mesas que o Zéfiro pode formar com as peças que tem e quanto vale cada uma.

Construções valiosas!

Solução:

1. Uma forma de resolvermos este desafio é analisar todas as combinações de cadeiras e mesas que podemos formar com as peças disponíveis dos tipos 1 e 2, e calcular o total de pontos recebidos por cada uma dessas combinações. Além disso, uma vez que queremos obter a pontuação máxima, tentamos utilizar o maior número de peças possível.

   Começamos por variar o número de cadeiras que conseguimos construir e, para cada um desses valores, descobrir quantas mesas ainda podemos obter com as peças restantes.

   Os resultados estão no quadro seguinte:

Cadeiras	Mesas	Tipo 1	Tipo 2	Pontos
3	0	9	3	15
2	2	10	4	18
1	3	9	4	17
0	4	8	4	16

   e daqui concluímos que a pontuação máxima, de 18 pontos, é obtida se o Zéfiro construir 2 cadeiras e 2 mesas.

2. Os números de cadeiras e de mesas têm que ser positivos

   n° de cadeiras, n° de mesas ≥ 0

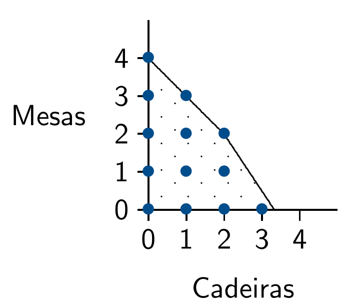
   Além disso, as construções possíveis dependem das peças que temos de cada tipo. Ora, cada cadeira tem 3 peças do tipo 1 e cada mesa tem 2 do mesmo tipo, logo:

   3 x n° de cadeiras + 2 x n° de mesas ≤ 10

   Do mesmo modo, cada cadeira e cada mesa têm 1 peça do tipo 2, portanto:

   n° de cadeiras + n° de mesas ≤ 4

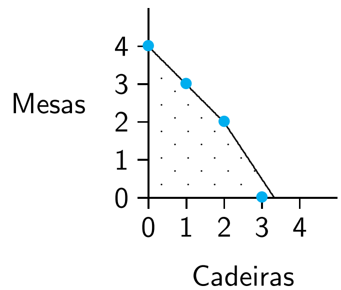
   Além destas condições sabemos que os números de cadeiras e de mesas têm que ser inteiros. Podemos agora representar graficamente estas condições e em seguida marcar, na região obtida, apenas os pontos que podem ser solução (•):



Por outro lado, queremos encontrar a combinação, ou seja, a solução possível, que maximiza a pontuação, sendo esta dada por

5 x nº de cadeiras + 4 x nº de cadeiras

Para achar a melhor solução é suficiente comparar as pontuações que se obtêm para as soluções representadas agora por •



Estes pontos correspondem às combinações:

- 0 cadeiras e 4 mesas,
- 1 cadeira e 3 mesas,
- 2 cadeiras e 2 mesas,
- 3 cadeiras e 0 mesas,

e avaliando o número de pontos atribuído a cada uma concluímos que o melhor resultado se obtém construindo 2 cadeiras e 2 mesas.

Agora para pensar:

1. Qual seria a solução se o Zéfiro não quisesse construir mais do que 1 cadeira?
2. O Zéfiro quer comprar pelo menos 40 gomas, que podem ser de laranja ou de morango. A loja onde o Zéfiro compra as gomas apenas tem disponíveis 25 gomas de laranja e 30 de morango. Sabendo que as primeiras custam 10 cêntimos e as segundas 6 cêntimos, quantas gomas deve o Zéfiro comprar de cada tipo, por forma a gastar o menos possível?
3. Um agricultor tem 90 hectares para plantar batatas e milho, e recebeu encomendas de 10 hectares de batatas e 5 hectares de milho. Além disso ele tem que seguir regras que o obrigam a plantar pelo menos 2 vezes mais milho do que batatas. Se o lucro for de 100 euros por hectar de milho e de 200 euros por hectar de batatas, quantos hectares de cada produto lhe darão o maior lucro?

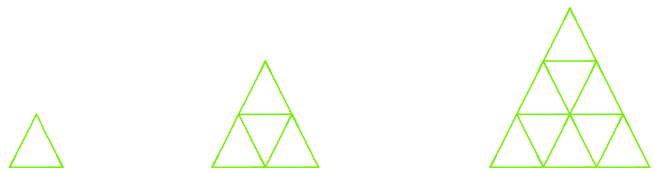
Curiosidades:

1. Problemas como este, em que se querem calcular os valores que maximizam (ou minimizam) uma expressão linear admitindo um conjunto de restrições do mesmo tipo, dizem-se programas lineares.
2. Quando os valores que procuramos têm que ser inteiros (como os números de cadeiras e de mesas neste desafio) o problema diz-se de programação inteira.
3. O Norte-Americano George Dantzig foi um Matemático que trabalhou para a Força Aérea durante a II Guerra Mundial e desenvolveu a programação linear, na altura com o objectivo de optimizar o planeamento militar. Mais tarde o método de Dantzig começou a ser aplicado noutras áreas em que se pretende minimizar despesas, ou maximizar lucros, sujeitas a restrições.

Desafio 2 – Janeiro 2007

Contar triângulos!

O Zéfiro constrói triângulos sucessivos usando fósforos velhos, tal como na sequência abaixo:



Consegues descobrir quantos fósforos são necessários para o Zéfiro construir o 30º triângulo?

Dica:

Analisa os primeiros casos e, em seguida, tenta generalizar.

Contar triângulos!

Solução:

1. Uma das formas de resolvermos este desafio é construir os primeiros triângulos. Assim vemos que:

   - para obter o 2º é preciso acrescentar 2 x 3 fósforos ao 1º,
   - para obter o 3º é preciso acrescentar 3 x 3 fósforos ao 2º,
   - para obter o 4º é preciso acrescentar 4 x 3 fósforos ao 3º,

   portanto o 30º é obtido do 29º após juntar 30 x 3 fósforos. Uma vez que a figura inicial tem 3 fósforos, então o número de fósforos é de:

   - $3 + 2 \times 3 = (1 + 2) \times 3$ para o 2º triângulo,
   - $3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = (1 + 2 + 3) \times 3$ para o 3º triângulo,
   - $3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 3 = (1 + 2 + 3 + 4) \times 3$ para o 4º triângulo,

   e assim sucessivamente. Sabemos então que na 30ª figura da sequência existem $(1 + \cdots + 30) \times 3$ fósforos.

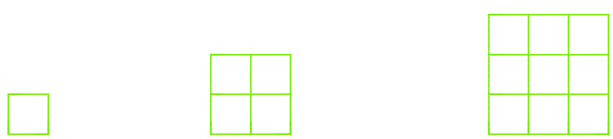
   Como $1 + \cdots + 30 = (1 + 30) + (2 + 29) + \cdots + (15 + 16) = 31 + \cdots + 31 = 31 \times 15 = 465$, então o número de fósforos no triângulo 30 é $465 \times 3 = 1395$.

2. De outro modo podemos reparar que a 1ª figura tem 1 triângulo, a 2ª tem 1 + 2 triângulos, a 3ª tem 1 + 2 + 3 triângulos, e assim a figura 30 terá $1 + \cdots + 30 = 465$ triângulos. Ora cada triângulo têm 3 fósforos, portanto o número total de fósforos da figura 30 é $465 \times 3 = 1395$.

Agora para pensar:

1. E no triângulo 2007, quantos fósforos há?

2. Imagina que em vez de triângulos o Zéfiro quer construir quadrados. Quantos fósforos são necessários para fazer a figura 30 desta sequência?



3. Consegues mostrar que para todo o natural n se tem $1 + \cdots + n = \frac{1+n}{2} \times n$?

Curiosidades:

1. Compreender padrões de crescimento é importante em áreas como a economia ou a biologia.

2. Uma sequência como 1, 2, 3, ..., em que se soma um a cada novo termo, diz-se uma sequência aritmética.

Desafio 1 – Fevereiro 2007

Já fizeste anos em 2007?

O Zéfiro quer convencer um amigo de que consegue adivinhar se ele já fez anos este ano. Para isso pede-lhe que escolha um número qualquer entre 1 e 99 e que faça as seguintes operações:

- multiplique o número por 50,
- some 2 ao resultado,
- se ele não tiver feito anos este ano, então volte a somar 2, caso contrário some agora 99,
- e, por fim, multiplique o resultado por 3.

No final o amigo revela que o resultado destas operações é 3762 e então o Zéfiro afirma que ele ainda não fez anos em 2007.

Achas que o Zéfiro está certo? Porquê?

Dica:

Tenta perceber como pode o Zéfiro distinguir as duas hipóteses.

Já fizeste anos em 2007?

Solução:

Como todo o inteiro multiplicado por um número par continua a ser um par, qualquer que seja o valor em que o amigo do Zéfiro pensou, o resultado do primeiro passo, ou seja, a sua multiplicação por 50, é um par e isto mantém-se depois de adicionarmos 2.

Se o amigo do Zéfiro já tiver feito anos em 2007, então adiciona 99 e obtém um número ímpar, senão adiciona 2 e obtém um número par.

Por outro lado, a multiplicação por um ímpar mantém a paridade do outro número, portanto o resultado final é ímpar se o amigo do Zéfiro tiver feito anos em 2007 e é par caso contrário.

Ora, o amigo do Zéfiro chegou ao valor par 3762, logo isto significa que ele ainda não fez anos em 2007, e portanto a afirmação do Zéfiro é correcta.

Agora para pensar:

1. Pede a um amigo que:

   - escolha um dos dois números: 14 e 23,
   - multiplique o número que escolheu por um qualquer ímpar,
   - multiplique o outro número por um par,
   - adicione os dois produtos.

   Por fim pede-lhe que anuncie o resultado a que chegou e, a partir desse valor, descobre qual dos dois números iniciais o teu amigo escolheu.

2. Inventa o teu próprio truque, testa-o com um amigo e, no final, explica-lhe como funciona.

3. O Zéfiro escreve os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 e em seguida procede, por nove vezes, do seguinte modo:

   - apaga dois números quaisquer e
   - escreve a diferença entre eles.

   É par ou ímpar o resultado que o Zéfiro obtém no final?

Curiosidades:

1. Se n é um número inteiro qualquer, então $2n$ é sempre um número par e $2n+1$ é sempre ímpar.

2. O calendário que usamos baseia-se nos movimentos do sol e da lua.

Números mágicos!

O Zéfiro escolheu um número entre 1 e 50 e em seguida efectuou as seguintes operações:

- somou-lhe 5,
- multiplicou o resultado por 3,
- e, por fim, subtraiu 17.

No final obteve o número 28. Qual foi o número em que o Zéfiro pensou inicialmente?

Dica:

Começa por analisar os resultados que o Zéfiro obteria se tivesse pensado nos números 1, 2, 3,. . . .

Números mágicos!

Solução:

Se seguirmos a sugestão e aplicarmos as operações que o Zéfiro realizou a 1, 2, 3 e 4 obtemos:

- 3 x (1 + 5) - 17 = 3 x 1 +15 - 17 = 3 x 1 - 2 = 1,
- 3 x (2 + 5) - 17 = 3 x 2 +15 - 17 = 3 x 2 - 2 = 4,
- 3 x (3 + 5) - 17 = 3 x 3 +15 - 17 = 3 x 3 - 2 = 7,
- 3 x (4 + 5) - 17 = 3 x 4 +15 - 17 = 3 x 4 - 2 = 10.

Do mesmo modo, escolhendo o número n obtemos:

- 3 x (n + 5) - 17 = 3 x n +15 - 17 = 3 x n - 2.

Assim, sabemos que o resultado que o Zéfiro obteve, ou seja, 28, é igual a 3n-2 e precisamos de descobrir o valor de n. Ora resolvendo a equação

$$3n - 2 = 28,$$

concluímos, sucessivamente, que

$$3n - 2 + 2 = 3n = 28 + 2 = 30$$
$$3n/3 = n = 30/3 = 10,$$

portanto o Zéfiro escolheu o número 10.

Agora para pensar:

1. Inventa o teu próprio truque, usa-o para modificar um número e depois tenta que um amigo adivinhe o número em que pensaste. No fim explica-lhe como funciona.
2. Pede a um amigo que pense num número e lhe adicione 15. Em seguida pede-lhe que multiplique a soma por 4, subtraia 8 e divida a diferença por 4. Por fim o teu amigo deve subtrair 12 ao quociente. A partir do resultado destas operações tenta descobrir o valor em que o teu amigo pensou.
3. É mais fácil seguir uma sequência de operações aritméticas se for descrita por palavras, ou se for expressa algebricamente?

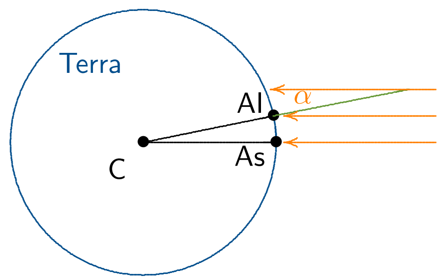
Curiosidades:

1. A palavra *álgebra* vem do Árabe *al-jabr*, que significa redução.
2. O matemático Grego Diofanto (que terá vivido por volta do ano 250 d.C.) é considerado por alguns como o pai da álgebra.

Medindo a Terra!

Há mais de 2200 anos um matemático Grego, de nome Eratóstenes, determinou o raio da Terra por um processo que envolveu a observação do Sol em duas cidades egípcias: Assuão (antigamente Siena) e Alexandria.

Eratóstenes tinha conhecimento de que em Assuão, ao meio-dia do Solstício de Verão, o Sol se encontrava a pique, uma vez que iluminava a água de um poço. Entretanto, o matemático observou que, à mesma hora e dia, um pilar vertical existente em Alexandria projectava uma sombra. Tal como o próprio Eratóstenes terá correctamente concluído, isto deve-se ao facto da Terra ser esférica.



Observa a figura e considera que

- Al é Alexandria,
- As é Assuão,
- C é centro da Terra,
- α é o ângulo entre o raio solar e o pilar vertical (representado a verde).

Eratóstenes sabia que a distância entre Assuão e Alexandria era aproximadamente 930 km, mediu o ângulo α obtendo 7^{o}, e conseguiu determinar o raio da Terra. Qual o valor que encontrou? Compara esse valor com o raio da Terra conhecido actualmente.

Dica:

O perímetro de uma circunferência de raio r é dado por $2 \times \pi \times r$, onde $\pi = 3.1415926$.

Repara na relação entre α e o ângulo definido pelos segmentos de recta que unem o centro da Terra (C) às cidades de Alexandria e Assuão.

[Coordenação de João Fernandes]

Medindo a Terra!

Solução:

Uma vez que, à hora indicada, os raios solares incidem sobre a terra de forma paralela à do segmento que une C a As, o ângulo $\alpha = 7^{\text{o}}$ tem amplitude igual à do ângulo definido pelos segmentos de recta que unem C a Al e a As.

Mas, como a Terra é esférica e a distância de Alexandria a Assuão é de 930 Km, que corresponde a 7^{o}, então o perímetro da Terra, correspondente a 360^{o} é

$$\frac{930 \times 360}{7} \text{ km.}$$

Ora, como o perímetro de uma circunferência é dado por $2 \times \pi \times r$, onde r representa o raio, temos

$$2 \times \pi \times r = \frac{930 \times 360}{7},$$

donde

$$r = \frac{930 \times 360}{2 \times 7 \times \pi} = \frac{334800}{14 \times 3.1415926} \approx 7612,$$

e concluímos que o valor do raio da Terra determinado por Eratóstenes foi aproximadamente 7612 km.

Hoje em dia considera-se que o valor do raio da Terra é 6378 km.

Agora para pensar:

Como é que podes determinar, por observação, o ângulo α?

Para responderes a esta pergunta pensa como podes utilizar a sombra, no chão, do pilar vertical.

Curiosidades:

Na realidade a Terra não é, exactamente, uma esfera sendo achatada nos pólos. Por isso, a forma da Terra aproxima-se melhor a um elipsóide de revolução. A diferença entre a distância do centro da Terra ao Equador e a distância do centro da Terra aos pólos é aproximadamente 22 km.

Para saberes mais sobre este assunto consulta a ".Forma da Terra." no Wikipedia:

(http://pt.wikipedia.org/wiki/Forma_da_Terra).

Desafio 2 – Março 2007

A duração dos dias!

A Duração do Dia (DD) é o intervalo de tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol num dado local. O valor de DD depende da latitude geográfica (ϕ) do local de observação e do dia do ano.

A fórmula abaixo permite calcular DD (em horas) para um qualquer valor da latitude e dia do ano. A letra n representa o número de dias que decorreram desde 1 de Janeiro até ao dia considerado. Por exemplo, para o dia 5 de Janeiro $n = 5$, para 10 de Fevereiro $n =$ 41 (31 dias de Janeiro + 10 dias de Fevereiro) e assim sucessivamente.

$$\cos\left(\frac{15 \times DD}{2}\right) = -\tan(\phi) \times \tan\left(23.45 \times \operatorname{sen}\left(\frac{360}{365}(284 + n)\right)\right).$$

Consegues determinar o valor de DD para Coimbra, nos dias 28 de Fevereiro, 21 de Junho e 19 de Novembro de 2007? E qual é o valor máximo de DD em Coimbra e o valor de DD no Equador Terrestre?

Dica:

Na fórmula sen, $\cos$ e $\tan$ representam as funções seno, co-seno e tangente de um ângulo. Utiliza a função inversa do co-seno na máquina de calcular para descobrir o ângulo α com um dado co-seno.

[Coordenação de João Fernandes]

A duração dos dias!

Solução:

Para os dias indicados temos os seguintes valores de n:

dia	dias passados desde 1 de Janeiro de 2007 (n)
28 de Fevereiro	31 + 28 = 59
21 de Junho	31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 21 = 172
19 de Novembro	31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 19 = 323

Substituindo n pelos valores desta tabela e considerando a latitude de Coimbra igual a 40º, isto é, fazendo $\phi = 40$, na fórmula dada, concluímos que $\cos\left(\frac{15\times DD}{2}\right)$ apresenta os seguintes valores:

dia	$\cos\left(\frac{15\times DD}{2}\right)$
28 de Fevereiro	$-\tan(40)\times\tan\left(23.45\times\text{sen}\left(\dfrac{360\times 343}{365}\right)\right) = 0.12795129$
21 de Junho	$-\tan(40)\times\tan\left(23.45\times\text{sen}\left(\dfrac{360\times 456}{365}\right)\right) = -0.36397676$
19 de Novembro	$-\tan(40)\times\tan\left(23.45\times\text{sen}\left(\dfrac{360\times 607}{365}\right)\right) = 0.30596890$

Utilizando agora a máquina de calcular podemos determinar DD e, representando por arcos a função inversa do co-seno, obtemos

$\cos\left(\frac{15DD}{2}\right)$	$DD = \frac{2}{15}\text{arcos}\left(-\tan(40)\tan\left(23.45\text{sen}\left(\frac{360(n+284)}{365}\right)\right)\right)$
0.12795129	11.01983717
-0.36397676	14.84594991
0.30596890	9.62447138

donde a duração do dia:

- em 28 de Fevereiro é de aproximadamente 11 horas,
- em 21 de Junho é de aproximadamente 15 horas,
- em 19 de Novembro é de aproximadamente 9 horas e 40 minutos.

Como a função inversa do co-seno é decrescente, o maior valor que $\frac{15DD}{2}$ toma, fixando a latitude de 40º, é atingido para o menor valor de $-\tan(40)\tan\left(23.45\text{sen}\left(\dfrac{360(n+284)}{365}\right)\right)$. Por outro lado, a função tangente é crescente, logo este valor é alcançado quando $\text{sen}\left(\frac{360(n+284)}{365}\right) = 1$, o que acontece aproximadamente para $n = 172.25$, ou seja, por volta das 6 horas de 21 de Junho, para $DD = 14.8459809$, isto é, com uma duração de cerca de 14 horas e 50 minutos.

No Equador a latitude é de 0º. Como $\tan(0) = 0$ e o co-seno do ângulo de 90º é 0, $DD = \frac{2}{15}\times 90 = 12$, logo a esta latitude a duração do dia é igual a 12 horas.

Agora para pensar:

1. Repara que a duração máxima coincide com o instante do solstício de Verão que, como é sabido, é o dia mais longo do ano (no hemisfério norte). De uma forma similar obteremos a duração mínima no dia 21 de Dezembro.

   E qual será o valor de DD nos equinócios?

2. Constrói o gráfico de variação de DD ao longo do ano, dando valores a n igualmente espaçados.

   Que conclusão tiras do gráfico sobre os "dias que crescem" e/ou "dias que decrescem"?

Curiosidades:

Se substituíres a latitude e o número de dias por $\phi = 70^{\circ}$ e $n = 172$ (correspondente a 21 de Junho) obténs $\cos\left(\frac{15DD}{2}\right) < -1$. Este resultado é interpretado como a DD ser maior do que 24 horas, ou seja, o Sol nunca se põe. Eis algo que também é do conhecimento geral: há locais na Terra, perto dos pólos, onde (durante aproximadamente 6 meses) o Sol está sempre visível (ou invisível).

Desafio 1 – Abril 2007

Corrida desencontrada

O Zéfiro e um amigo participam num rally automóvel que consiste em percorrer várias vezes o mesmo circuito. O Zéfiro percorre o circuito em 25 minutos, enquanto que o amigo demora 30 minutos a percorrê-lo.

Supondo que os dois corredores partem ao mesmo tempo, ao fim de quanto tempo o Zéfiro volta a apanhar o amigo?

Dica:

Tenta descobrir as posições do Zéfiro e do seu amigo quando o primeiro deles termina uma volta ao circuito.

Corrida desencontrada

Solução:

1. Uma forma de resolvermos este desafio é notarmos que 25 minutos após a partida o Zéfiro termina a primeira volta, enquanto que o amigo faz apenas 25/30, ou seja, 5/6 do circuito. Nesse instante o amigo está, portanto, no ponto 5/6 do circuito e atrás do Zéfiro. Por outro lado, o Zéfiro ganha ao amigo 1/6 do circuito a cada 25 minutos que passam.

   Para alcançar o amigo o Zéfiro precisa ainda de 5 vezes 25 minutos. Ora, 6 x 25 = 150, logo o Zéfiro necessita, na totalidade, de 150 minutos, isto é, de 2 horas e meia, para voltar a cruzar-se com o amigo.

2. Em alternativa sabemos que o Zéfiro completa uma nova volta ao fim de 25, 50, 75, 100, 125, 150,... minutos (a cada múltiplo de 25). O amigo demora 30, 60, 90, 120, 150, 150,... minutos (os múltiplos de 30) a voltar ao início do circuito. O 1º momento em que os dois se voltam a cruzar é o menor dos múltiplos comuns a 25 e a 30, ou seja, ao fim de 150 minutos, após 6 voltas do Zéfiro e 5 voltas do amigo.

Agora para pensar:

1. A escola do Zéfiro tem quatro clubes: o de Desportos, o de Literatura, o de Xadrez e o de Canto. No dia 1 de Outubro, reuniram-se os quatro clubes e combinaram funcionar da seguinte forma:

   - o de Desportos funcionaria dia sim dia não;
   - o de Literatura funcionaria a cada 3 dias;
   - o de Xadrez, de 5 em 5;
   - e o de Canto, de 6 em 6.

   Seguindo esta combinação, em que data se voltaram a reunir os clubes todos de novo?

2. A caminho da escola o Zéfiro passa numa escadaria. Se ele a subir de 2 em 2 degraus consegue chegar ao cimo e isso também acontece se a subir de 3 em 3 ou de 5 em 5 degraus. Qual o menor número possível de degraus?

Curiosidades:

1. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum entre os números a e b estão relacionados do seguinte modo: mmc(a,b) = a x b / mdc(a,b).

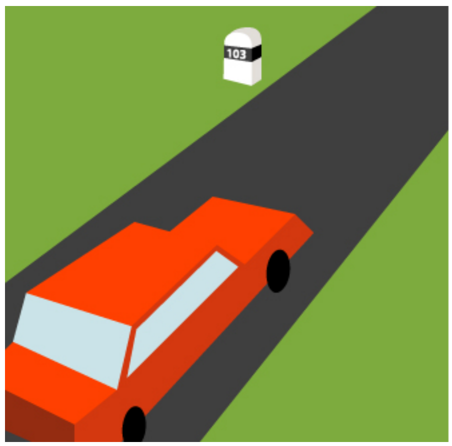
2. O filósofo Grego Zenão (por volta do ano 490 a.C.) é conhecido pelos paradoxos que propôs, com os quais Zenão pretendia mostrar a falsidade das teses que combatia.

   No Paradoxo de Aquiles e a tartaruga supõe-se que o herói grego Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida de 100m. Como Aquiles é 10 vezes mais rápido do que a tartaruga, esta começa a corrida 80m na frente da linha de partida. Então, enquanto Aquiles percorre os 80m que o separam da tartaruga, esta percorre 8m e continua na frente do herói. Em seguida Aquiles avança mais 8m, e a tartaruga mais 0,8m, e assim sucessivamente. Independentemente do tempo que passe Aquiles nunca alcança a tartaruga.

   A solução deste paradoxo usa os conceitos de limite e convergência de séries numéricas. Supondo que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma progressão geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga.

Viagem ao mundo da velocidade

O Zéfiro sai de Coimbra, viajando a velocidade constante. Passa por um marco quilométrico que contém dois algarismos. Uma hora depois passa por outro marco, contendo os mesmos dois algarismos, mas em ordem inversa. Uma hora depois passa um terceiro marco, contendo os mesmos algarismos, separados por um zero.



Qual é a velocidade a que o Zéfiro viaja?

Dica:

Pensa nos dois algarismos do primeiro marco e verifica o que lhes acontece nos marcos seguintes.

Viagem ao mundo da velocidade

Solução:

Uma vez que o número de quilómetros contido no 1º marco tem dois dígitos, escreve-se como: 10 x a + b, em que a representa o algarismo das dezenas e b o algarismo das unidades. Do mesmo modo, o número de quilómetros contido no 2º marco escreve-se como: 10 x b + a. No 3º marco uma das duas letras, a ou b, representa o número das centenas e o número de quilómetros escreve-se como: 100 x a + b ou 100 x b + a.

Se o Zéfiro viaja a uma velocidade constante, então o trajecto entre o 2º e o 3º marcos deve ser igual ao que existe entre o 1º e o 2º e deve também ser inferior a 100, donde se conclui que o número das centenas é igual a 1. Como o número do 1º marco que contém as dezenas, a, deve ser inferior ao número do 2º marco que contém as dezenas, b, então a tem que ser 1.

Por outro lado, se a velocidade é constante, então as distâncias percorridas numa hora têm que ser iguais e estas são dadas pelas diferenças entre os números dos marcos sucessivos, pelo que temos:

$$\text{Marco 2 - Marco 1} = \text{Marco 3 - Marco 2}$$
$$(10b + 1) - (10 + b) = (100 + b) - (10b - 1)$$

Mas então

$$9b - 9 = 99 - 9b \Leftrightarrow 18b = 108 \Leftrightarrow b = 6$$

e assim concluímos que os números nos marcos são 16, 61, 106 e que o Zéfiro viaja à velocidade de 45 km/h.

Agora para pensar:

1. Consegues dizer quantos números com dois algarismos existem?

2. A ideia de agrupar marcas foi utilizada nos sistemas mais antigos de numeração, como por exemplo o egípcio. Nesse sistema 1 era representado por: I, 2 por: II, e assim por diante. Ao chegar a 10 as dez marcas eram substituídas por um novo símbolo, ∩. Trocando cada dez marcas iguais por uma nova os egípcios escreviam todos os números de que necessitavam. Os símbolos que usavam eram:

Valor	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Hieróglifo	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
Descrição	Corda	Calcanhar	Espiral	Flor de Lótus	Dedo	Girino	Homem

Quanto é ∩∩III e como seria representado 1502 neste sistema?

Curiosidades:

1. O sistema de numeração que usamos, em geral, é o decimal (ou de base 10). Com este sistema no número 115 o primeiro algarismo 1 representa 100 (uma centena ou 1×10^2), o segundo 1 representa 10 (uma dezena ou 1×10^1) e o 5 representa simplesmente 5 (5 unidades ou 5×10^0). Assim, nessa notação,

$$115 = 1 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

2. Os computadores utilizam o sistema binário (ou de base 2) para representar a informação. Aqui 115 é representado pelos restos da divisão de 115 por potências de 2, isto é, como 1110011, uma vez que:

$$115 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0.$$

Combinar pontos

Num dado normal os pontos não são dispostos ao acaso, mas sim colocados de modo a que as faces opostas tenham por soma 7: assim, 6 está oposto a 1, 4 a 3 e 5 a 2.

Contudo, é possível dispor os pontos nas seis faces de um dado de outras maneiras diferentes. Quantas maneiras existem para fazer isso?

Dica:

Experimenta começar por fixar a face que contém o número 1 e pensa nos números que podem pertencer às faces vizinhas.

Combinar pontos

Solução:

Coloquemos o número 1 numa face do dado. Uma vez que existem mais cinco números, existem também cinco maneiras de escolher o que será oposto a 1.

Feito isto, é preciso dispor os quatro números restantes sobre as quatro faces dispostas em círculo. Apresentamos duas formas de fazer esta contagem.

1. Considere-se um dos quatro números restantes, existem então três processos de escolher o número que lhe será oposto.

   Em seguida resta-nos colocar os dois números finais sobre duas faces opostas, o que se pode fazer de dois modos diferentes.

   Assim sendo, existem $3 \times 2 = 6$ possibilidades de colocar estes quatro números.

2. Se o problema fosse dispor quatro números em fila, teríamos 4 hipóteses para escolher o primeiro número da fila, 3 para escolher o segundo, duas para escolher o terceiro, e uma para o último, ou seja, $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades de os colocar em fila. Acontece que, por exemplo as filas 1234 e 2341 são filas diferentes mas quando colocados em círculo dão origem a sequências iguais. Temos então que cada escolha de quatro números em círculo corresponde a quatro filas diferentes, ou seja, apenas temos $24 : 4 = 6$ possibilidades de colocar quatro números em círculo.

O número total de possibilidades é, portanto, de $5 \times 6 = 30$. Existem 30 processos diferentes de dispor os pontos nas faces de um dado.

Agora para pensar:

1. De quantas maneiras podes escolher o PIN (*Personal Identification Number*) para o teu telemóvel?
2. E se os algarismos não se podem repetir?
3. Quantos números de telefone diferentes podem existir com o indicativo 239 (zona de Coimbra)?
4. A combinação de um cofre usa três números entre 0 e 39. O cofre abre se os números são marcados numa ordem particular, o primeiro para a direita, o segundo para a esquerda e o terceiro de novo para a direita. Quantas combinações possíveis existem?

Curiosidades:

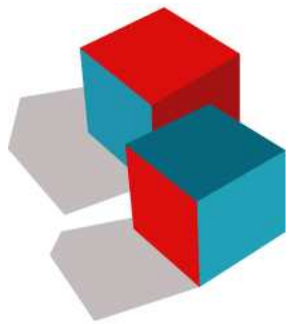
A palavra "combinação" em Matemática é usada de modo diferente do da "combinação" de um cofre. Numa combinação (matemática) a ordem em que um elemento aparece não é importante. Se a ordem dos elementos interessar a palavra utilizada em Matemática é "arranjo".

Jogos de azar

O Zéfiro e um amigo jogam com dois dados, mas não utilizam os números. Em vez disso eles pintaram algumas faces de vermelho e outras de azul e lançam os dois dados ao mesmo tempo.

O Zéfiro ganha sempre que as duas faces voltadas para cima são da mesma cor e o amigo ganha sempre que são de cor diferente. Deste modo, são iguais as oportunidades que cada um tem de ganhar.

O primeiro dado tem cinco faces vermelhas e uma azul. Quantas faces vermelhas tem o segundo dado?



Dica:

Tenta descobrir os números de combinações de duas faces do dado com a mesma cor.

Jogos de azar

Solução:

Cada dado tem seis faces. Quando se lançam dois dados, existem 6 x 6 = 36 combinações possíveis de duas faces. Para que as oportunidades de obter duas vezes a mesma cor sejam metade da totalidade das oportunidades é necessário que 18 combinações dêem duas faces da mesma cor.

O primeiro dado tem cinco faces vermelhas e uma azul. Seja V o número de faces vermelhas do segundo dado. O número de faces azuis do mesmo dado será: 6 - V.

O número de combinações em que o resultado são duas faces vermelhas é igual ao produto do número de faces vermelhas do primeiro dado pelo número de faces vermelhas do segundo: 5 x V.

Do mesmo modo, o número de combinações em que o resultado são duas faces azuis é o produto de 6 - V por 1, ou seja, 6 - V.

Então, o número de combinações que dão duas faces com a mesma cor é:

$$5V + 6 - V = 18 \Leftrightarrow 4V + 6 = 18 \Leftrightarrow 4V = 12 \Leftrightarrow V=3,$$

portanto o segundo dado tem de ter três faces vermelhas e três azuis.

Agora para pensar:

1. Qual dos dois amigos teria mais hipóteses de ganhar se ambos os dados tivessem o mesmo número de faces azuis e vermelhas, ou seja, três faces de cada cor?

2. De um baralho com 52 cartas o Zéfiro retira, uma a uma, 2 cartas. De quantas maneiras diferentes pode ele obter:

   (a) um ás e um rei; (b) pelo menos uma carta vermelha; (c) duas cartas com figuras.

3. O Zéfiro joga agora um jogo diferente: ele escolhe um número de 1 a 6 e, em seguida, lança três vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Se o número escolhido pelo Zéfiro sai b vezes (no total dos três lançamentos) ele ganha b euros, b = 1, 2, 3. Em contrapartida, se o número escolhido pelo Zéfiro nunca ocorre, então ele perde 1 euro.

   Em média qual é o ganho do Zéfiro ao jogar este jogo?

Curiosidades:

1. Ao atirar uma moeda ao ar as hipóteses de sairem cinco caras seguidas e depois cinco coroas são as mesmas que sairem cinco caras e cinco coroas alternadamente.

2. As probabilidades são uma forma de medir hipóteses e encontram aplicação em áreas como a biologia, os jogos ou a análise de risco.

3. As probabilidades tiveram o primeiro grande impulso na Idade Média, com os tradicionais jogos de azar e apostas que se efectuavam na Corte.

   A primeira discussão profunda envolvendo probabilidades surgiu através da correspondência trocada entre Blaise Pascal e seu amigo Pierre De Fermat, chegando estes, através de caminhos distintos, à mesma solução do *problema da divisão das apostas* em 1654, que havia sido posto a Pascal pelo Cavaleiro De Méré, um jogador... profissional.