OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Edições 2006/07 e 2007/08 (http://www.mat.uc.pt/zefiro)

Joana Teles (jteles@mat.uc.pt) e Marta Pascoal (marta@mat.uc.pt)
Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Prefácio

Os Desafios do Zéfiro consiste num sítio electrónico (http://www.mat.uc.pt/zefiro), integrado no conjunto de iniciativas *Actividades Matemáticas* do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Os problemas aí propostos mensalmente dividem-se em duas categorias, uma dirigida a um público com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos, Desafio 1, e outra para jovens de 13 a 15 anos, Desafio 2. No final do mês foram disponibilizadas as resoluções dos respectivos desafios, bem como algumas curiosidades acerca dos temas abordados, mostrando ao mesmo tempo a utilização de conceitos relacionados com a Matemática no quotidiano. Os utilizadores do sítio submeteram as respostas aos desafios do mês. As participações mensais foram vez avaliadas e no final de cada edição foram anunciados os nomes dos utilizadores com os melhores resultados.

O sítio electrónico *Os Desafios do Zéfiro* foi desenvolvido em 2006 por Margarida Matos e Ricardo Sismeiro (alunos da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra). A personagem Zéfiro é uma criação de Yann Thual, as restantes ilustrações estiveram a cargo de Gonçalo Forte e Yann Thual. A equipa de coordenação dos conteúdos do sítio foi constituída por Joana Teles e Marta Pascoal. Muitos dos problemas apresentados foram inspirandos por outras publicações de divulgação matemática, tais como os sítios *Figure this!* ou *Cut the knot*. Os desafios do mês de Março de 2007 foram coordenados pelo Professor João Fernandes.

O sítio teve duas edições, a primeira ao longo do ano lectivo de 2006/07 e a segunda em 2007/08. Os jovens premiados na edição de 2006/07 foram:

Desafio 1: Miguel Basílio, Ricardo Lima, Andreia Baltazar, Leonor Albuquerque, Ricardo Costa

Desafio 2: Miguel Basílio, Ricardo Lima, Andreia Baltazar, Jessica Pereira, Tiago Nunes;

na edição de 2007/08 destacaram-se:

Desafio 1: Alexandre Carvalho Truppel, Ana Isabel Pereira Mestre, Beatriz Cunha Morais, Mariana Francisco Mendes de Almeida e Paiva e Patrícia Sofia Marques dos Santos.

Desafio 2: Ana Rita Carvalho Faria, Eliana Iria Luz Barreira, Joana Sofia Pereira Mendes, Joel Neves da Silva e José Diogo Gaspar Aurélio.

Os prémios distribuídos tiveram o apoio do Banco BPI e do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra. As cerimónias de entrega de prémios incluiram actividades diversas e contaram com a colaboração do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, da Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra, do Museu da Ciência da Universidade de Coimbra e dos restantes colegas envolvidos nas *Actividades Matemáticas*, assim como com as contribuições dos Professores António Leal Duarte e Paulo Oliveira.

Finda a competição apresentamos uma compilação dos problemas e das resoluções propostas ao longo das duas edições desta iniciativa, e que continuam também acessíveis no, ainda activo, sítio original (*Os Desafios do Zéfiro*). Pensamos que este texto pode servir como ferramenta de trabalho ou de lazer a alunos, famílias e professores, e por isso renovamos o convite para acompanharem o Zéfiro e aceitarem o desafio! Em casa ou na escola esperamos que utilizem estes desafios como motivação para aprenderem e descobrirem novos temas.

Coimbra, Janeiro de 2010

Joana Teles e Marta Pascoal

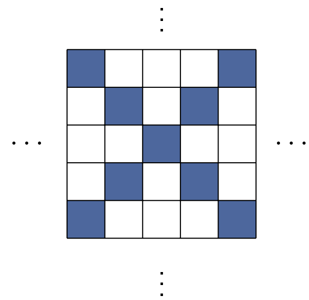
OS DESAFIOS DO ZÉFIRO

Edição 2007/08

Conteúdo

Em busca do número perdido...

O Zéfiro pintou de preto os quadrados pequenos das duas diagonais de uma folha quadriculada quadrada. Ele pintou 101 quadrados e deixou em branco todos os outros.



Qual é o numero de quadrados pequenos brancos que ficaram na folha?

Dica:

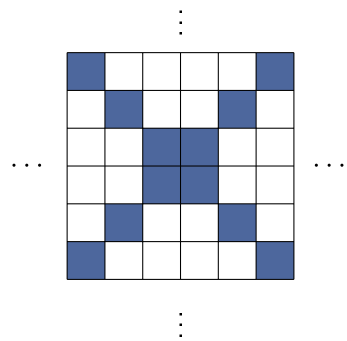
Conta o número de quadrados pretos em cada diagonal e a partir daí descobre quantos são os quadrados brancos. Se quiseres começa com um exemplo mais pequeno.

Em busca do número perdido...

Solução:

Um quadrado grande com n quadrados pequenos de cada lado tem n quadrados em cada diagonal.

Se n é par não há quadrados comuns às duas diagonais e o número total de quadrados nas diagonais é $n + n = 2n$, um número par. Por exemplo, para $n = 6$ teríamos



Se n é ímpar, como na figura do enunciado, então há um quadrado comum às duas diagonais e o número total de quadrados nas diagonais é $n + n - 1 = 2n - 1$, um número ímpar.

Uma vez que o Zéfiro pintou 101 quadrados de azul, o quadrado grande tem de ter um número ímpar de quadrados de lado. Assim, temos $2n - 1 = 101$, donde obtemos $n = 51$, o que significa que o quadrado grande tem 51 quadrados pequenos de lado. No total, o quadrado grande é formado por 51 x 51 = 2601 quadrados pequenos.

Como dos 2601 quadrados pequenos 101 estão pintados de azul, então existem 2601 - 101 = 2500 quadrados brancos.

Agora para pensar:

1. Qual seria a resposta se tivéssemos 200 quadrados pintados de azul?

2. Qual o tipo de quadrados cujo número aumenta mais rapidamente, os azuis ou os brancos?

3. O que acontecia se o Zéfiro pintasse de azul quadrados alternados?

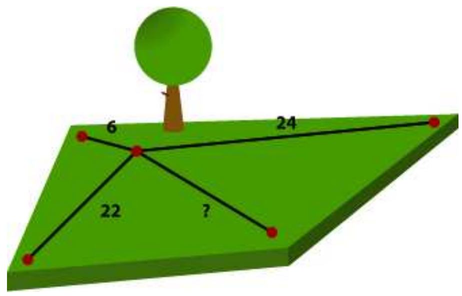
Curiosidades:

Problemas como este permitem prever como cresce um conjunto inicial, de acordo com uma determinada lei. Têm aplicação em áreas tão diversas como a Biologia, a Computação ou as Finanças.

Desafio 2 – Outubro 2007

Descobrir distâncias

O Zéfiro e três amigos têm de medir as distâncias de um ponto interior de um terreno rectangular até às esquinas do terreno. Os três amigos fazem o trabalho rapidamente e obtêm, em esquinas consecutivas, os valores 24, 6 e 22 metros, respectivamente. O Zéfiro, aproveitando o trabalho dos amigos e sem se mover do sítio inicial, determina a medida que falta.



Qual é esse valor?

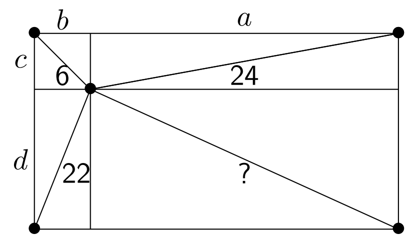
Dica:
Tenta descobrir o comprimento dos lados do rectângulo.

Desafio 2 – Outubro 2007

Descobrir distâncias

Solução:

O terreno em causa pode ser esboçado do seguinte modo:



Agora, aplicando, sucessivamente, o Teorema de Pitágoras aos vários triângulos com um dos lados de comprimento conhecido, conseguimos descobrir os valores de a, b, c e d, bem como o comprimento da diagonal em falta. Temos então:

(1) $a^2 + c^2 = 24^2$ (2) $b^2 + c^2 = 6^2$ (3) $b^2 + d^2 = 22^2$

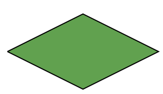
Subtraindo agora a equação (2) à (1) obtemos

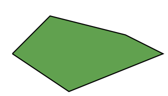
(4) $a^2 - b^2 = 24^2 - 6^2$

e adicionando (3) e (4) vem $a^2 + d^2 = 24^2 - 6^2 + 22^2$.

Representando por x o valor que pretendemos calcular, e usando novamente o Teorema de Pitágoras, temos por fim $a^2 + d^2 = x^2 = 24^2 - 6^2 + 22^2 = 1024$ e então o comprimento da diagonal que o Zéfiro deveria medir é $x = \sqrt{1024} = 32$.

Agora para pensar:

1. Sabendo que o losango  mede 6 unidades de lado. Qual é a sua área?

2. Imagina agora que queres medir a área de um terreno com a forma . Pensa como podes fazê-lo, dividindo a região em vários triângulos.

Curiosidades:

1. O cálculo de áreas de terrenos (ainda que de formas irregulares) pode ser feito a partir da divisão da região correspondente em vários triângulos, como sugerido acima.

2. Os instrumentos usados em Topografia (ciência dedicada à medição da superfície terrestre) permitem medir ângulos e lados de triângulos, e desse modo obter informação diversa acerca de terrenos, como por exemplo áreas, perímetros e altitudes.

Desafio 1 – Novembro 2007

Quadrados pares, pares em quadrados?

O Zéfiro tem um jogo com o tabuleiro abaixo.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Escolhendo números consecutivos deste diagrama ele pode formar quadrados de várias dimensões. Por exemplo:

1 x 1: $\boxed{1}$, $\boxed{8}$, $\cdots$

2 x 2: $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 6 & 7 \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 7 & 8 \\ \hline \end{array}$, $\cdots$

$\cdots$

Quantos são os quadrados deste tipo, de qualquer tamanho, tais que a soma dos seus números é um número par?

Dica:

Pensa em quantos números ímpares precisa um quadrado de ter para que a soma de todos os seus números seja um número par.

Quadrados pares, pares em quadrados?

Solução:

Podemos formar quadrados com 1, 2, 3, 4 ou 5 quadrados de lado. Além disso, a soma de números pares é sempre um par, enquanto que a soma de números ímpares apenas é um par se tivermos uma quantidade par de números ímpares. Para que a soma dos números de um quadrado seja um número par, este terá que conter uma quantidade par de números ímpares. Deste modo, temos os seguintes casos:

1. Todo o quadrado com um número par de elementos de cada lado tem um número par de elementos, pelo que é constituído por igual quantidade de números pares e ímpares:

   - 4 / 2 = 2 nos quadrados 2 x 2, e
   - 16 / 2 = 8 nos quadrados 4 x 4,

   logo existem 16 quadrados 2 x 2, e 4 quadrados 4 x 4, cuja soma dos seus elementos é um número par.

2. Para os quadrados com um número ímpar de elementos podemos ter 1, 3 ou 5 elementos de cada lado.

   - Um quadrado com um elemento é simplesmente um número, portanto a soma é o próprio número. Assim, temos 12 destes quadrados 1 x 1 que contêm um número par.
   - Os quadrados 3 x 3 podem conter 4 números pares e 5 números ímpares, ou 5 números pares e 4 números ímpares, se o 1º elemento (canto superior esquerdo) for um número ímpar ou par, respectivamente. Interessam-nos pois aqueles cujo 1º elemento é um número par, ou seja:

2	3	4
7	8	9
12	13	14

6	7	8
11	12	13
16	17	18

8	9	10
13	14	15
18	19	20

12	13	14
17	18	19
22	23	24

   logo, existem 4 quadrados 3 x 3, cuja soma dos seus elementos é um número par.

   - O único quadrado 5 x 5 é o inicial, formado por 13 números ímpares, logo não existem quadrados 5 x 5 cuja soma dos seus elementos é um número par.

Concluímos então que o número pedido é 16 + 4 + 12 + 4 = 36.

Agora para pensar:

1. Dois números inteiros têm a mesma paridade, quando são ambos pares ou ambos ímpares. Qual é a paridade do produto de dois números pares? E a do produto de um número ímpar por outro qualquer?

2. Num quartel existem 100 soldados e, todas as noites, 3 são escolhidos para fazer de sentinela. É possível, após algum tempo, um dos soldados ter trabalhado com cada um dos outros exactamente uma vez?

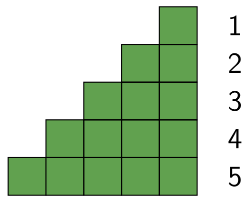
Curiosidades:

Em Informática o termo paridade designa o número de *bits* iguais a 1 de uma palavra. O código de paridade (0 se houver um número par de 1's e 1 caso contrário) é utilizado para indentificar a ocorrência de erros.

Desafio 2 – Novembro 2007

Números triangulares

O Zéfiro descobriu os números triangulares, números que podem ser descritos como a soma do número de quadrados que formam um triângulo. Por exemplo, T_5 representa-se por:



Assim, $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Consegues ajudar o Zéfiro a encontrar o 2007º número triangular, ou seja, a saber o valor de T_{2007}?

Dica:

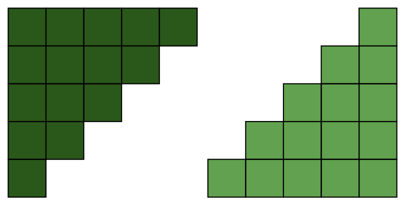
Pensa como podes calcular $T_{2007} + T_{2007}$.

Números triangulares

Solução:

A resposta é $T_{2007} = 2015028$. A seguir mostramos duas maneiras de descobrir a solução do problema.

1. Representando geometricamente o número T_5 duas vezes, e juntando os respectivos triângulos, obtemos um rectângulo com 6 unidades de comprimento e 5 de altura.



   Daqui concluímos que $T_5 + T_5 = 6 \times 5 = 30$ e portanto $T_5 = 15$. Do mesmo modo, para um inteiro positivo qualquer, n, podemos representar $T_n + T_n$ por um rectângulo de dimensão $(n+1) \times n$ e então $T_n + T_n = (n+1) \times n$, logo $T_n = \dfrac{(n+1) \times n}{2}$. Em particular, para $n = 2007$ temos $T_{2007} = \dfrac{2008 \times 2007}{2} = 2015028$.

2. Tal como $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, podemos obter o 2007-ésimo número triangular através de

$$\begin{aligned} T_{2007} &= 1 + 2 + \cdots + 2007 \\ &= (0+2007) + (1+2006) + (2+2005) + \cdots + (1003+1004) \\ &= 2007 + 2007 + \cdots + 2007 \\ &= 2007 \times 1004 = 2015028. \end{aligned}$$

Agora para pensar:

1. Pensa numa maneira simples de verificar se um número qualquer é triangular.
2. De entre 4851, 6214, 7626 e 8656, quais os números que são triangulares?
3. O regulamento de um torneio de futebol diz que cada equipa joga com as restantes uma única vez. Quantos jogos serão realizados se o torneio tiver quatro equipas inscritas? E se forem 12 equipas?
4. Na turma do Zéfiro há o hábito de, ao chegar, beijar os colegas que já chegaram à escola. Sabendo que a turma tem 20 alunos, quantos são os beijos em cada dia?

Curiosidades:

1. As duas fórmulas seguintes podem ser usadas para calcular números triangulares:

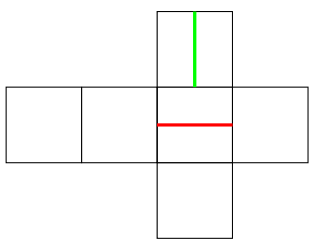
$$T_n = 1 + \cdots + n \quad \text{e} \quad T_n = T_{n-1} + n, \text{ com } T_1 = 1.$$

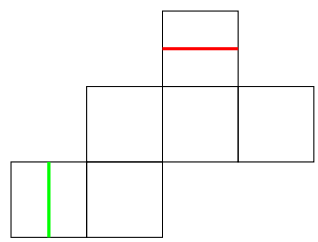
2. Carl Friedrich Gauss foi um Matemático, Astrónomo e Físico, Alemão, do final do século XVIII e início do século XIX. Na esperança de manter Gauss sossegado por algum tempo (ele era bastante irrequieto!), um dia o professor pediu-lhe que calculasse: 1 + 2 + 3 + $\cdots$ + 100. Rapidamente Gauss descobriu que a soma dos primeiros n inteiros é dada pela expressão n x (n-1) / 2 e calculou: 50 x 101 = 5050.

Prendas ou cubos, fitas ou linhas?

O Zéfiro embrulha uma prenda e enfeita-a a toda a volta com três fitas de cores diferentes, uma encarnada, uma amarela e uma verde.

Se o Zéfiro abrisse o papel que envolve a prenda (imaginando que as fitas estão coladas ao papel) poderia obter uma das formas abaixo.





Consegues completar as figuras com as fitas coloridas que faltam?

Dica:

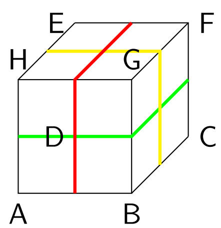
Tenta imaginar como ficariam os vários lados da prenda ao abrir o papel. Podes testar as várias formas com um modelo.

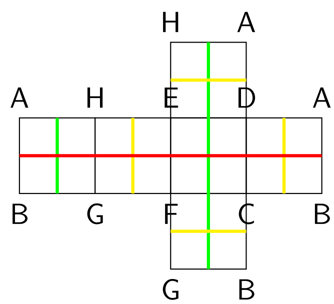
Desafio 1 – Dezembro 2007

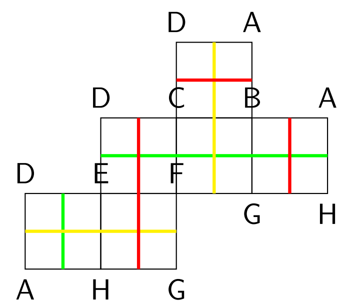
Fitas e prendas

Solução:

Uma maneira de resolvermos este desafio é construir um modelo, por exemplo um cubo de papel onde marcamos as fitas encarnada, amarela e verde, e depois abri-lo de forma a transformá-lo numa figura com 2 dimensões. Procedendo deste modo e associando letras a cada vértice do cubo inicial, como se vê abaixo, obtemos as seguintes planificações:

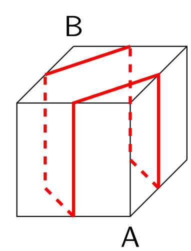






Agora para pensar:

1. Quanto mede a fita encarnada usada para enfeitar uma prenda com a forma de um cubo com 20 cm de lado, que atravessa os pontos médios das arestas, como na figura ao lado?



2. Qual é a menor quantidade de fita necessária para ligar os vértices A e B nessa prenda?

3. Tenta desenhar em 2 dimensões outros sólidos geométricos.

Curiosidades:

1. A linha aérea mais curta que liga Londres a Nova Iorque não é uma linha recta, mas sim uma curva que passa por cima da Islândia.

2. As linhas são muito usadas para definir e marcar trajectos, e podem distinguir-se através de traços ou cores diferentes. Dois exemplos são os diagramas das redes de transportes metropolitanos de Lisboa (www.metrolisboa.pt) e do Porto (www.metrodoporto.pt).

3. Profissões técnicas ligadas à arquitectura e à engenharia recorrem frequentemente à representação de objectos tridimensionais em vários desenhos a 2 dimensões.

Partilhar

O Zéfiro e outros cinco amigos querem dividir entre eles um bolo com cobertura de chocolate, com a forma de um cubo com 18 centímetros de lado.

De que modo hão-de os seis amigos repartir o bolo, sem que nenhum fique prejudicado? Há uma maneira única de fazer esta partilha?

Lembra-te que todos querem igual quantidade de cobertura!

Dica:

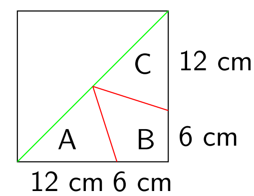
Pensa que se seis pessoas querem comer bolo, então cada grupo de três irá partilhar uma metade.

Partilhar

Solução:

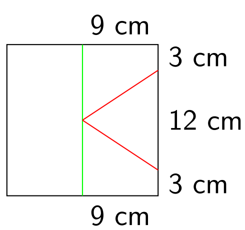
Para que todos fiquem com igual quantidade de bolo as fatias têm de ter o mesmo volume e para que todos tenham igual quantidade de cobertura a área da superfície lateral das fatias que tem chocolate tem de ser igual. Se os cortes forem feitos perpendicularmente ao prato, e uma vez que o bolo tem a forma de um cubo, as fatias têm o mesmo volume se as suas áreas no topo do bolo forem iguais. Assim, por um lado temos de dividir o quadrado do topo do bolo em 6 regiões com a mesma área. Por outro lado, para que as fatias tenham igual quantidade de cobertura, o perímetro das fatias comum ao perímetro do quadrado do topo tem de ser igual, ou seja, temos que dividir o perímetro do quadrado em 6 partes iguais. Existem várias formas de fazer esta divisão.

1. Começando por dividir o quadrado pela sua diagonal, como na linha verde na figura a seguir, temos em seguida que dividir cada 36 cm de perímetro por 3 pessoas, devendo cada uma receber uma fatia com 12 cm de lado em comum com o perímetro do quadrado. Resultam então as fatias marcadas a encarnado.



Podemos verificar que as áreas do topo (e portanto o volume das fatias) também são iguais. Os triângulos das fatias A e C têm 12 cm de base e 9 cm de altura (metade da largura do bolo), logo têm uma área de 12 x 9 / 2 = 54 cm^2.

Por outro lado, a área do triângulo da fatia B pode ser calculada subtraindo 54 cm^2 a metade da área do quadrado todo, que é 18 x 18, isto é, 18 x 9 - 2 x 54 = 162 - 108 = 54 cm^2.

2. 

Em alternativa podemos começar por dividir o topo do bolo em 2 rectângulos iguais. Em seguida dividimos cada rectângulo em 3 fatias com 12 cm de perímetro em comum com o perímetro do quadrado, tal como mostra a figura.

Agora para pensar:

1. Verifica que as várias fatias de bolo do segundo método de resolução têm todas o mesmo volume.
2. De que modo se poderia fazer a divisão do bolo por 5 pessoas?
3. Imagina agora que era necessário dividir em vários lotes um terreno à beira-rio. Que factores devem ser levados em conta para realizar esta divisão?

Curiosidades:

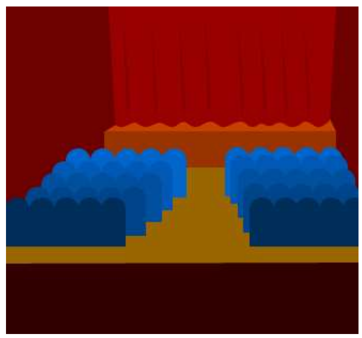
1. A divisão de figuras geométricas de acordo com certos factores e critérios é essencial no trabalho de engenheiros, desenhadores gráficos e até agentes imobiliários.
2. O matemático e astrónomo italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) iniciou uma nova era da geometria com a teoria dos indivisíveis.

Desafio 1 – Janeiro 2008

Todos aos seus lugares!

Na localidade em que o Zéfiro mora foi inaugurada uma sala de espectáculos com capacidade para 1050 espectadores.

As cadeiras estão dispostas em várias filas, de 42 lugares, e inicialmente cada um era numerado de 1 até 1050 (o nº 1 ficava mais perto do palco do que o nº 43, e assim por diante). Alguns espectáculos depois o director do espaço apercebeu-se que esta numeração não era prática e decidiu modificá-la. Agora cada bilhete apresenta uma letra, que indica a fila, e um número de 1 até 42 (a letra "A" fica mais perto do palco do que a letra "B").



1. Descobre os códigos correspondentes aos números 500 e 168.
2. Os pais do Zéfiro compraram os bilhetes 839, 840, 841 e 842. Será que a família vai conseguir ficar junta?

Dica:
Tenta perceber quais são os números que representam o 1º lugar de cada fila na numeração inicial.

Todos aos seus lugares!

Solução: Podemos começar por fazer um esquema dos vários lugares na sala de espectáculos do seguinte modo,

Fila 1	1	2	...	42	Letra A
Fila 2	43	44	...	84	Letra B
...	...	...		...	...
Fila i	42 x (i - 1) + 1	42 x (i - 1) + 2	...	42 x i	Letra ?
...	...	...		...	...
Fila 25	1009	1010	...	1050	Letra Y

donde notamos que o lugar j da fila i corresponde ao número 42 x (i - 1) + j. Uma vez feito este plano é simples responder às questões.

1. Como 500 = 42 x 11 + 38, então a cadeira número 500 está na fila 12, que corresponde à letra "L", e no lugar número 38. Assim, o bilhete tem o código "L38".

   Do mesmo modo, 168 = 42 x 4, e então a cadeira número 168 está na 4ª fila, que corresponde à letra "D", e no lugar número 42. Este bilhete tem o código "D42".

2. Uma vez que 839 = 42 x 19 + 41, a cadeira número 839 está na vigésima fila (letra "T") e no lugar número 41. Além disso, 840 = 20 x 42, logo a cadeira número 840 está no 42º lugar da mesma fila.

   Por outro lado, 841 = 42 x 20 + 1 e 842 = 42 x 20 + 2, pelo que estas duas cadeiras ocupam os lugares 1 e 2 da vigésima primeira fila (letra "U"), portanto a família não vai ficar junta.

Agora para pensar:

1. Repara que, exceptuando o último lugar de cada fila, a letra de cada fila é a que corresponde a 1 mais o resultado da divisão inteira do número inicial por 42, enquanto que o lugar nessa fila é dado pelo resto dessa divisão. Para o último lugar esta operação dá o lugar que lhe segue na nova numeração.

   Por exemplo, 500 / 42 = 11 com resto 38 e 168 / 42 = 4 com resto 0.

2. Explica porque razão o lugar número 89 fica mais à frente do que o "C5".

3. Na sala do Zéfiro os alunos sentam-se, por ordem do número, em filas com 4 carteiras individuais. Se o Joaquim tem o número 13, qual será o seu lugar na sala?

Curiosidades:

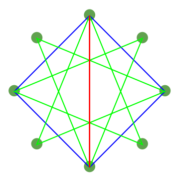
1. Um quadro com m linhas e n colunas, como o que usámos para representar a sala de espectáculos chama-se uma matriz com dimensão m por n.

2. As matrizes podem ser usadas simplesmente como uma estrutura para armazenar informação, mas também para representar transformações de sistemas. Por esta razão têm aplicações em áreas como a robótica, a computação gráfica ou a teoria dos jogos, entre outras.

Desafio 2 – Janeiro 2008

Estrela de números!

Ao marcar 8 pontos à mesma distância num círculo o Zéfiro pode percorrê-los usando passos de comprimento 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7. Contudo, com alguns destes passos não toca em todos os pontos. Por exemplo, escolhendo os pontos de 2 em 2, ou de 4 em 4, alguns ficam de fora, o que já não acontece de 3 em 3.



Passo 2
Passo 3
Passo 4

Para este caso, de que outras maneiras se pode passar em todos os pontos?

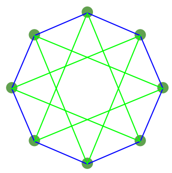
Se o Zéfiro marcar 5 pontos pode alcançá-los a todos, independentemente do passo que escolher. Que outros números têm esta propriedade?

Dica:

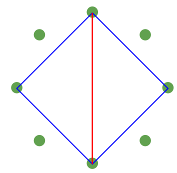
Tenta descobrir a relação entre o nº de pontos no círculo e o nº de passos que asseguram que todos os pontos são tocados.

Estrela de números!

Solução: Para o círculo com 8 pontos que aparece, podemos verificar que com passos de 1 em 1, de 3 em 3 ou de 5 em 5 conseguimos passar por todos os pontos (figura à esquerda), enquanto que isso já não acontece ao usarmos passos de 2 em 2, de 4 em 4, de 6 em 6 ou de 8 em 8 (figura à direita).



Passo 1
Passo 3



Passo 2
Passo 4

Repara que com passo 5 obtemos o mesmo resultado que com passo 3, e que com passo 6 obtemos o mesmo resultado que com passo 2. Além disso, saltando pontos de 8 em 8 apenas atingimos o ponto de onde partimos.

Contando o nº de pontos que é atingido com cada um destes passos observamos que estes são 4 se o passo é 2 ou 6, 2 se o passo é 4, e 1 se o passo é 8, que são o menor nº pelo qual é necessário multiplicar o nº de passos de modo a obter um múltiplo de 8. Neste caso, $2 \times 4 = 8$, $6 \times 4 = 24 = 3 \times 8$, $4 \times 2 = 8$ e $8 \times 1 = 8$.

Deste modo, para verificar se um passo atinge todos os pontos de um círculo basta determinar o máximo divisor comum (MDC) entre o nº de pontos e o tamanho do passo. Se o MDC é 1, então o passo alcança todos os pontos do círculo.

Por exemplo, procedendo do mesmo modo para um círculo com 10 pontos observamos o seguinte:

1. Passamos por todos os pontos se o passo é 1, 3, 7 ou 9 (neste caso o MDC é 1).
2. Não passamos por todos os pontos se o passo é 2, 4, 6 ou 8 (o MDC é 2), nem se é 5 (o MDC é 5).

Então, neste caso, existem 4 passos com os quais conseguimos passar em todos os pontos e esta conclusão funciona para um círculo com qualquer nº de pontos. Isto significa que só alcançamos todos os pontos se o MDC for sempre 1, ou seja, se o nº de pontos marcado for um número primo!

Agora para pensar:

1. Tenta verificar que a conclusão acima funciona para um círculo com qualquer nº de pontos.
2. De quantas maneiras diferentes podemos percorrer todos os pontos ao marcar 20 pontos e que passos permitem fazer isso?
3. Como escolher os passos que permitem alcançar todos os pontos num círculo com um nº de pontos qualquer?

Curiosidades:

1. Quando o MDC entre dois números é 1 dizemos que estes números são primos entre si.
2. A função de Euler associa a cada natural n, o nº de naturais entre 1, 2, $\dots$, n que são primos com n. Por exemplo, se n é um número primo então é primo com 1, $\dots$, $n-1$, e esta função tem o valor $n-1$.
3. Muitas aplicações no campo da criptografia (estudo de técnicas para modificar informação a ser entendida apenas pelo destinatário) baseam-se em propriedades dos números inteiros e dos números primos.

A todo o gás!

O caminho de casa do Zéfiro até à casa dos avós é constituído por 45 kilómetros bastante acidentados. A viagem de ida é a subir e os pais do Zéfiro costumam fazê-la a uma velocidade de 35 km/h. O regresso é mais fácil, uma vez que é a descer, e então os pais do Zéfiro conseguem conduzir a 63 km/h.

Qual é a velocidade média de toda a viagem?

Dica:

Lembra-te que a velocidade é dada pelo espaço que é percorrido, dividido pelo tempo que se leva a percorrê-lo.

A todo o gás!

Solução:

Para descobrir a velocidade média da viagem começamos por calcular o espaço percorrido e depois calculamos o tempo total do passeio.

Na viagem de ida e volta o Zéfiro e a família percorrem, no total,

2 x 45 = 90 kilómetros.

Quanto ao tempo de viagem, a ida é realizada a 35 km/h, logo demora 45 / 35 horas, enquanto que o regresso é realizado a 63 km/h, e portanto demora 45 / 63 horas. Assim, toda a viagem dura

(45 / 35) + (45 / 63) = $\frac{9\times5}{7\times5} + \frac{9\times5}{7\times9}$ = 9/7 + 5/7 = 14/7 = 2 horas.

Podemos agora calcular a velocidade média, que será igual a 90 / 2 = 45 kilómetros por hora.

Agora para pensar:

1. Repara que neste problema não era necessário conhecer a distância entre as casas do Zéfiro e dos seus avós.

   Como podias calcular a velocidade média sem esta informação?

2. Um dos erros comuns ao resolver este problema é assumir que a velocidade média é a média das velocidades, o que daria o resultado de (35 + 63)/ 2 = 49 kilómetros por hora.

   Contudo, neste problema a velocidade média não é dada pela média aritmética das velocidades.

Curiosidades:

1. A média aritmética é a mais conhecida e, para um conjunto de n valores $\{x_1, \ldots, x_n\}$, ela é dada por

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

2. A média geométrica é outro conceito de média muito utilizado na Estatística, definido como

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}.$$

   se os elementos do conjunto anterior forem positivos. Este valor pode ser visto como a média aritmética de um conjunto de valores obtido do inicial, através do que é conhecido por média logarítmica de $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

3. Existem vários outros tipos de média, por exemplo, se não fizer sentido adicionar os valores do conjunto é útil utilizar a média harmónica, definida por

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_1}}.$$

Desafio 2 – Fevereiro 2008

A charada das idades!

O Zéfiro quer saber a idade do avô de um amigo. Como este sabe que o Zéfiro gosta de desvendar um bom enigma, diz-lhe:

> "O meu neto tem aproximadamente tantos dias quantas as semanas do meu filho, e tem tantos meses quantos os meus anos. Os três juntos temos 140 anos.
>
> Consegues descobrir quantos anos tenho eu?"

Dica:

Podes relacionar entre si as idades dos três, usando as mesmas unidades.

A charada das idades!

Solução:

Comecemos por relacionar as idades das 3 pessoas e representar a informação do problema por equações. Para comparar as várias idades temos que usar as mesmas unidades. Recordemos que 1 ano são 12 meses, ou 52 semanas, ou então 365 dias, e representemos as idades do avô, do pai e do amigo do Zéfiro, em anos, por a, p e n, respectivamente.

O pai tem $52 \times p$ semanas, e o amigo do Zéfiro tem $365 \times n$ dias. Como estes dois valores são iguais sabemos que $365n = 52p$, mas esta equação é equivalente a $365n/52 = 52p/52$, que pode ser aproximada por $7n = p$. Por outro lado, o amigo do Zéfiro tem $12 \times n$ meses, logo $12n = a$. Uma vez que o amigo do Zéfiro, o seu pai e o seu avô, juntos, têm 140 anos, então $n + p + a = 140$. Juntando as 3 expressões chegamos a um sistema de 3 equações nas incógnitas n, p e a:

$$7n = p$$

$$12n = a$$

$$n + p + a = 140.$$

Pela segunda equação sabemos que $n=a/12$, e pela primeira que $p=7n=7a/12$. Substituindo n e p por estas expressões na terceira equação, obtemos

$$a / 12 + 7a / 12 + a = 140,$$

ou seja,

$$a + 7a + 12a = 12 \times 140,$$

donde $a = 12 \times 140 / 20$, que é igual a 84. Então, o avô do amigo do Zéfiro tem aproximadamente 84 anos. Além disso, podemos dizer que o pai e o amigo do Zéfiro têm, cada um, 42 anos e 7 anos.

Agora para pensar:

1. Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 23 animais e 82 patas. Quantas são as galinhas e os coelhos?

2. Um copo cheio de água pesa 325g. Se deitarmos fora metade da água, o seu peso diminui para 180g. Quanto pesa o copo vazio?

3. Duas pessoas ganharam, juntas, 50 euros por um trabalho e uma delas ganhou 25% do que a outra. Quanto ganhou cada pessoa?

Curiosidades:

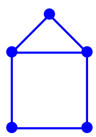
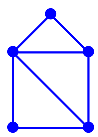
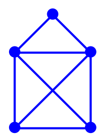
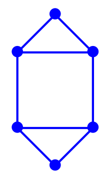
1. Sistemas de equações como o anterior dizem-se sistemas de equações lineares. O seu estudo é um ramo da área da Matemática conhecida como Álgebra Linear. Estes sistemas desempenham um papel importante em áreas fundamentais como a Física, a Química ou a Economia.

2. Outro grupo de sistemas de equações, ditos não lineares, são, em geral, mais complexos mas podem ser aproximados por um sistema de equações lineares.

Linhas e pontos!

Num livro de brincadeiras o Zéfiro tenta percorrer com o lápis uma figura dada, passando por todos os pontos e segmentos, mas sem tocar duas vezes no mesmo segmento e sem nunca levantar o lápis.

Entre as figuras abaixo encontra-se uma para a qual não é possível fazer isso. Sabes qual delas é?

(a)  (b)  (c)  (d) 

Achas que conseguias descobrir essa figura se não pudesses usar o lápis? De que modo?

Dica:

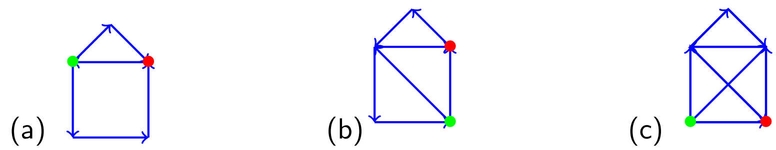
Tenta descobrir o ponto (ou os pontos) por onde deves começar o percurso.

Desafio 1 – Março 2008

Linhas e pontos!

Solução:

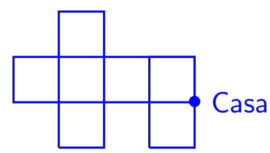
A única figura que não é possível percorrer da maneira indicada é a (d). Para os restantes casos temos os seguintes percursos, onde os pontos verde e encarnado representam o início e o final:

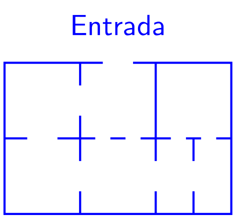


Passar num ponto implica usar uma linha que aí termina e outra que aí começa, logo em cada ponto incide um nº par de linhas. As possíveis excepções são o 1º e o último pontos do percurso. Como em 4 dos pontos da figura (d) incidem 3 linhas, nunca podemos ter o percurso que procuramos.

Agora para pensar:

1. O Zéfiro está encarregue de distribuir os jornais em algumas ruas do bairro. Consegues descobrir um percurso que ele possa usar, de modo a passar e, todas as ruas da figura ao lado uma única vez, partindo de sua casa?

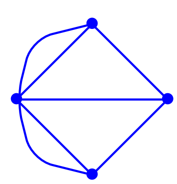


2. 

Segundo a mitologia grega Theseus procurou o monstro Minotauro (metade homem e metade touro) num labirinto. Theseus marcou o percurso com uma corda e, após encontrar e matar o monstro, usou a corda para regressar.
O Zéfiro recria esta lenda e fixa a corda na entrada de sua casa. Ele quer fazer uma procura eficiente no labirinto e passar em cada porta uma só vez. De acordo com a planta de casa do Zéfiro qual é o percurso ideal?

Curiosidades:

O Matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) resolveu um problema semelhante ao dado, após visitar a cidade de Königsberg (actualmente chamada Kalingrado). Uma das charadas dos habitantes locais era se seria possível atravessar todas as pontes da cidade uma única vez. Muitos acreditavam que não, mas Euler foi o 1º a demonstrá-lo, encontrando uma forma de responder à pergunta sem levantar dúvidas a ninguém.

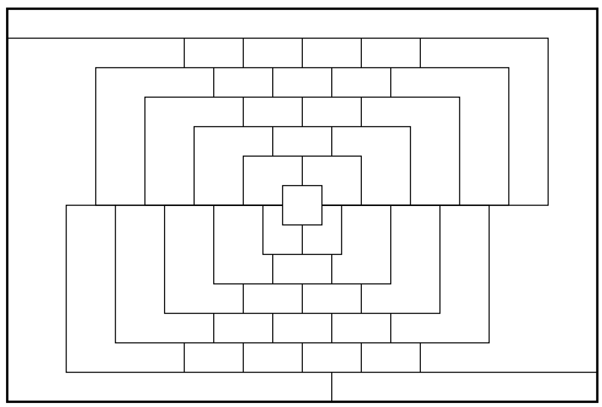


Euler representou as margens e as ilhas do rio Pregel - figura à esquerda - por pontos (nós) e as pontes que as ligam por linhas entre os pontos (arestas) - figura à direita. Em seguida ele mostrou não se poder atravessar todas as arestas do diagrama exactamente 1 vez sem levantar o lápis, quando em mais do que 2 nós incide um nº ímpar de arestas. No diagrama de Königsberg existe 1 nó em que incidem 5 arestas e 3 em que incidem 3 arestas, donde se conclui que o percurso de que se falava não existe.

O diagrama usado por Euler diz-se um grafo e a solução deste problema marcou o início da teoria dos grafos, aplicada nos nossos dias ao desenho de redes de comunicações ou ao planeamento de rotas.

Brincar com cores!

O livro de brincadeiras do Zéfiro tem uma parte dedicada à pintura de figuras. O Zéfiro só tem 5 cores diferentes e quer pintar a figura abaixo, de modo a que regiões vizinhas (ou seja, zonas que têm uma fronteira em comum) fiquem com cores distintas.



Conseguias fazer o mesmo com menos cores? Quantas?

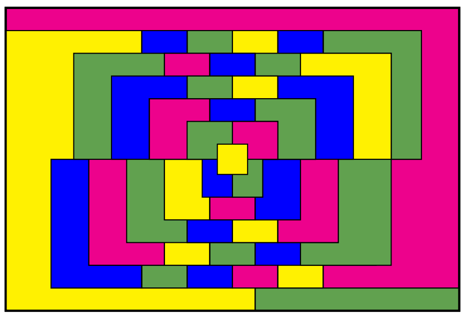
Dica:

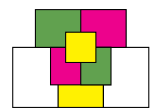
Escolhe as cores de que mais gostares.

Brincar com cores!

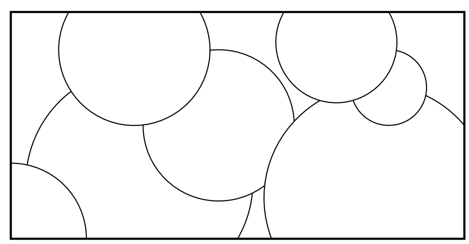
Solução:

Existem várias formas de colorir a figura dada com 5 cores para distinguir regiões vizinhas. Tal como se refere no parágrafo de Curiosidades, o mesmo sucede usando 4 cores, como se mostra na figura da esquerda. Como se verifica na figura à direita, não é possível fazer o mesmo apenas com 3 cores.





Agora para pensar:



1. Tenta colorir a figura ao lado com o menor número de cores, usando cores distintas para regiões vizinhas.

2. És capaz de encontrar uma figura para a qual sejam necessárias mais de 4 cores, não podendo duas áreas com uma fronteira comum ter a mesma cor? (Fronteira não pode ser apenas um ponto.)

Curiosidades:

1. O Problema das Quatro Cores surgiu em 1852, quando o matemático Francis Guthrie descobriu que podia colorir um mapa com os condados de Inglaterra utilizando apenas 4 cores para garantir que 2 condados vizinhos nunca teriam a mesma cor. Apenas em 1976 Appel e Haken conseguiram mostrar que o mesmo é válido para qualquer mapa planar. A demonstração era tão complexa que exigia o recurso a meios informáticos e não podia ser verificada sem utilizar um computador, o que levou muitos a questionarem a sua validade. Em 1994 Seymour, Robertson, Sanders e Thomas sugeriram uma demonstração mais simples, mas o uso de computadores continuou a ser indispensável.

2. Em 1 de Abril de 1975 Martin Gardner apresentou um mapa, com 110 regiões e dizia serem necessárias 5 cores para o colorir. O mapa era demasiado complexo mas não passava de uma brincadeira de 1 de Abril. O esquema proposto neste desafio é uma simplificação do então apresentado por Gardner.

Desafio 1 – Abril 2008

A jogar. . . à geometria!

Um poliedro em forma de bola de futebol, como mostra a figura, é constituído por 32 figuras, 20 das quais são hexágonos regulares e 12 são pentágonos regulares.

Consegues descobrir quantos vértices tem este poliedro?

Dica:

Repara que cada vértice pertence a várias figuras simultaneamente.

Desafio 1 – Abril 2008

A jogar. . . à geometria!

Solução:

Uma vez que a bola é composta por hexágonos e pentágonos podíamos pensar em contar o número de vértices de um hexágono, 6, e multiplicá-lo pelo número de hexágonos no poliedro, 20. Obteríamos assim um total de 6 x 20 = 120 vértices. Contudo, tal como se alerta na dica, os vários hexágonos tocam-se e portanto, deste modo, estaríamos a contar o mesmo vértice mais do que uma vez, o que não é correcto. Em alternativa podemos pensar dos seguintes modos:

1. Todo o vértice do poliedro é vértice de um pentágono e os pentágonos não se tocam. Ora a bola de futebol contém 12 pentágonos, logo tem 5 x 12 = 60 vértices.

2. Como vimos nos pentágonos há 5 x 12 = 60 vértices e nos hexágonos 6 x 20 = 120 vértices, logo no total 180 vértices. No entanto, no poliedro cada vértice é comum a três polígonos (2 hexágonos e 1 pentágono), portanto a bola contém 180 : 3 = 60 vértices.

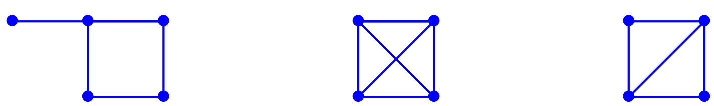
Agora para pensar:

1. Em 1750 Euler descobriu uma igualdade que relaciona os números V de vértices, F de faces e A de arestas de um poliedro: V + F - A = 2. Tenta verificar se para o poliedro dado no desafio esta fórmula é verdadeira.

2. Procura outros poliedros para os quais a fórmula de Euler não é válida.

3. A fórmula de Euler pode ser usada igualmente em alguns grafos, notando que estes dividem o plano em várias regiões fechadas e a região exterior ilimitada. Sendo A o número de arestas, N o número de vértices e R o número de regiões para tais gráficos tem-se, novamente: N + R - A = 2.

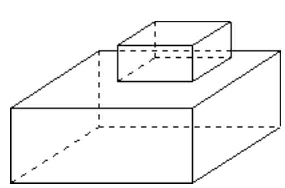
   Verifica se os grafos a seguir satisfazem esta fórmula e tenta perceber o que os distingue.

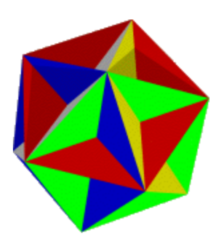


Curiosidades:

1. Leonhard Euler foi um matemático suíço do século XVIII com importantes contribuições em várias áreas da Matemática e da Física, como a geometria, a trigonometria, o cálculo ou a teoria de números.

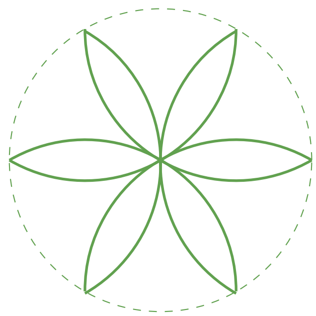
2. As figuras abaixo são exemplos de poliedros não-eulerianos, também designados, carinhosamente, por "monstros".





Primavera. . . de circunferências!

O Zéfiro desenha uma flor dentro de uma circunferência, mantendo sempre a mesma abertura do compasso, tal como mostra a figura abaixo.



Sabendo que a flor que o Zéfiro desenhou tem perímetro 2, qual é o raio da circunferência inicial?

Dica:

Nota que a flor desenhada pelo Zéfiro divide a circunferência inicial em várias partes iguais.

Primavera... de circunferências!

Solução:

Começamos por notar que cada arco que passa pelo centro da circunferência inicial tem o mesmo raio que esta e são necessários 3 arcos iguais para preencher a circunferência.

Como o perímetro da flor é 2 e esta é constituída por 6 pétalas, cada uma formada por 1 arco, concluimos que cada arco mede $2 : 6 = 1/3$. Assim, a circunferência, que é formada por 3 arcos, tem um perímetro igual a $3 \times 1/3 = 1$.

Como o perímetro de uma circunferência é dado por $P = 2\pi \times r$, onde r representa o raio, temos

$$1 = 2\pi \times r$$

e portanto o raio da circunferência inicial é $r = 1/2\pi$.

Agora para pensar:

1. O nº π representa o quociente entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Arquimedes usou $22/7$ como valor aproximado para π. Para obter esse valor construiu um polígono regular com 96 lados (muito próximo de uma circunferência) e calculou a razão entre o perímetro e o diâmetro do polígono.

   Procede como Arquimedes e calcula aproximações de π. Usa polígonos com diferentes números de lados e nota que quanto mais lados usas mais o perímetro do polígono se aproxima do da circunferência.

2. Faz um jogo com os teus amigos e premeia quem conhece mais casas decimais do nº π. Podes usar mnemónicas para memorizar esse valor, por exemplo:

   "Sim, é útil e fácil memorizar um número grato aos sábios." "Sou o medo e temor constante do menino vadio que dorme."

Curiosidades:

1. A letra grega π, foi adoptada para o nº a partir da palavra grega para perímetro, supostamente por William Jones em 1706, e popularizada por Euler alguns anos mais tarde.

2. O cálculo do número π tem registos desde a Babilónia (1800 a.C) que consideravam o valor 3 como uma boa aproximação. Matemáticos de várias eras tentaram escrever π como p / q, onde p e q são números inteiros, mas em 1761 Johann Heinrich Lambert descobriu que tal não é possível, classificando π como um nº irracional. Para o cálculo de π são necessárias aproximações através de séries infinitas de somas.

3. Todos os anos aparece um novo valor mais preciso do nº π. Em 1999 os matemáticos Kanada e Daisuke Takahashi calcularam uma aproximação com 206 168 430 000 casas decimais, usando um computador. Eis uma aproximação de π com 80 casas decimais:

   3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899...

Números dominó!

O Zéfiro descobriu os números dominó. As figuras abaixo mostram os números dominós 2 por 2 e 2 por 3.

e que valem 5 e 8, respectivamente.

Com base neste esquema descobre quanto valem os números dominó 2 por 4 e 2 por 5. Consegues prever, e explicar, quanto será 2 por 2008? E quais são os números dominó 3 por 2, 3 por 3 e 3 por 2008? E ainda 2008 por 2008?

Dica:

Conta os números de pintas azuis e encarnadas de cada peça correspondente a um número dominó.

Números dominó!

Solução:

1. Uma maneira de resolver este problema é contar separadamente o nº de bolas encarnadas e o nº de bolas azuis, e somá-los.

O nº dominó 2 por 4 - à esquerda - tem 2 linhas e 4 colunas de bolas azuis, portanto tem 2 x 4 = 8 destas bolas, e apenas 1 linha e 3 colunas de bolas encarnadas, isto é, 1 x 3 = 3 destas bolas. Esse nº vale 8 + 3 = 11. O nº dominó 2 por 5 - à direita - tem as mesmas linhas mas 5 colunas, portanto tem 2 x 5 = 10 bolas azuis e tem 1 x 4 = 4 bolas encarnadas, logo vale 10 + 4 = 14.

Dado o nº dominó a x b, a representa o nº de linhas e b o nº de colunas, e portanto contém a x b bolas azuis e (a-1) x (b-1) bolas encarnadas. Substituindo a e b pelo valores dados obtemos os pedidos:

a	b	bolas encarnadas	bolas azuis	valor
2	2008	2 x 2008 = 4016	1 x 2007 = 2007	6023
3	2	3 x 2 = 6	1 x 2 = 2	8
3	3	3 x 3 = 9	2 x 2 = 4	13
3	2008	3 x 2008 = 6024	2 x 2007 = 4014	10038
2008	2008	2008 x 2008 = 4032064	2007 x 2007 = 4028049	8060113

2. Em alternativa podemos descobrir quantas bolas são acrescentadas a um nº dominó ao manter o nº de linhas e aumentar o de colunas. Por exemplo, o nº dominó 2 x 1 tem 2 bolas e 2 x 2 obtém-se daquele juntanto 3 novas bolas, portanto vale 2 + 3 = 5. Da mesma forma 2 x 3 = 5 + 3 = 2 + 3 + 3 = 2 + 3 x 2 = 8 e o mesmo sucede sempre que se aumenta 1 coluna. Assim, o nº dominó 2 x n é dado por 2 + 3 x (n-1), donde, fazendo n = 2008 concluímos que 2 x 2008 vale 2 + 3 x 2007 = 6023.

   Quando temos 3 linhas, 3 x 1 vale 3, e juntar 1 coluna implica adicionar 5 novas bolas. Então, 3 x n vale 3 + 5 x (n -1). Substituindo agora n por 2, 3 e 2008, obtemos os valores 8, 13 e 10038 dos números dominó 3 x 2, 3 x 3 e 3 x 2008, respectivamente. Por outro lado, o nº dominó 2008 x n vale 2008 + (2007 + 2008) x (n - 1), logo 2008 x 2008 tem 2008 + 4015 x 2007 = 8060113 bolas.

Agora para pensar:

Repara que, apesar de haver uma única resposta para cada pergunta, existem vários processos diferentes para chegar ao resultado certo. Mesmo depois de descobrimos a solução de um problema tem interesse pensar em maneiras diferentes de o resolver.

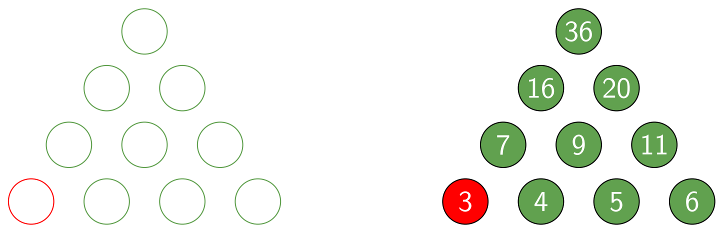
Curiosidades:

Muitas vezes é útil "partir" o problema inicial em vários problemas mais pequenos ou mais fáceis, como fizémos na 2ª proposta de resolução, e tentar resolver cada um deles.

Desafio 2 – Maio 2008

A pirâmide mágica!

O Zéfiro brinca com uma pirâmide mágica, em que as posições a verde são preenchidas sempre que ele coloca um número inteiro qualquer na posição a vermelho, como mostram as figuras abaixo:



Que números deve o Zéfiro inserir na posição a vermelho, para que no topo surjam o 84 e o 44?

Descobre como se podem escrever os números que aparecem no topo e usa essa conclusão para explicar por que razão esse número nunca é o 48.

Estende o teu raciocínio para pirâmides com 5 ou 6 posições na base.

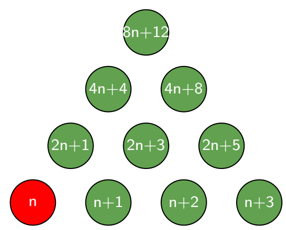
Dica:

Tenta perceber como se obtêm os números nas posições a verde.

A pirâmide mágica!

Solução:

O nº no topo do triângulo aumenta 8 unidades quando aumentamos o valor na posição encarnada de 1 unidade. Para verificar isto podemos usar o diagrama auxiliar apresentado a seguir, que simula a situação em que começamos com o valor n, vindo a obter 8n + 12 no topo.



Assim, se usarmos n + 1 na 1º posição iremos obter 8n + 8 + 12 = 8n + 20.

De acordo com o diagrama, o nº no topo é sempre resultado da multiplicação de um número ímpar por 4, uma vez que 8n + 12 = 4 x (2n + 3). Ora 48 / 4 = 12 não é um número ímpar, portanto não existe nenhum inteiro capaz de conduzir ao valor 48 na posição no topo do triângulo.

Do mesmo modo, para descobrir como obter 84 no cimo do triângulo é preciso saber qual o valor n tal que 8n + 12 = 84. Esta equação é equivalente a 8n = 72 e n = 9, portanto concluímos que a posição encarnada deve conter o número 9.

Por outro lado, 8 x 4 + 12 = 44, donde a 1ª posição deverá ser 4, de modo a obter 44 no topo.

Supondo agora que a base da pirâmide tem 5 ou 6 posições podemos fazer um esquema semelhante ao anterior. Desse modo concluímos que com 5 posições na base o nº no topo é 16n + 32, enquanto que quando a pirâmide tem 6 posições na base esse nº é dado por 32n + 80.

Agora para pensar:

1. Qual o valor n a inserir na posição a encarnado que dá origem ao número 2008 no topo do triângulo? E ao número 2009?

2. Consegues perceber o que sucederia se em vez de um triângulo tivéssemos uma pirâmide, tridimensional, com uma base quadrada, e fixássemos um dos vértices da base com o valor de um inteiro n?

3. Imagina que o valor nas bolas na base do triângulo é calculado como indicado na figura:

   Qual a diferença produzida então no valor no topo do triângulo?

Curiosidades:

O número total de bolas num triângulo como o deste desafio, contendo n bolas na base, é dado pelo número triangular de ordem n, T_n (ver Desafio 2 de Novembro de 2007).