Polinómios Ortogonais Laguerre-Hahn na Recta Real

Anabela Monteiro Paiva

Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior ,
Orientador: Prof. Doutor Amílcar Branquinho

Dissertação apresentada à Universidade da Beira Interior, para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, área de especialização em Matemática Pura.

Abstract

This work has the purpose of developing a new method to characterize the Laguerre-Hahn families of orthogonal polynomials on the real line by vectorial structures. In particular, we consider families of Laguerre-Hahn orthogonal polynomials on the real line defined by a Stieltjes function that satisfies a Riccati differential equation with polynomial coefficients and families of Laguerre-Hahn orthogonal polynomials with discrete variable defined on non-uniform lattices.

In chapter II, we will give a characterization of Laguerre-Hahn class, on the real line, in terms of second order vectorial differential equations for the monic orthogonal polynomials sequences, for first order orthogonal polynomials sequences and for the functions of second kind.

Considering the results obtained in chapter two, we have a characterization in terms of matrix Sylvester differential equations for Laguerre-Hahn orthogonal polynomials and we will obtain a representation of sequences of Laguerre-Hahn polynomials on the real line in terms of semi-classical families on the real line as we will show in chapter III.

The main subject of chapter IV consist in a characterization for discrete Laguerre--Hahn orthogonal polynomial, on non uniform lattices, in terms of first order structure relations, second order difference equation and matrix Sylvester difference equations using the same method as in chapters II and III.

Key words: orthogonal polynomials, Stieltjes function, matrix Riccati differential equations, matrix Sylvester differential equations, Laguerre-Hahn orthogonal polynomials, Laguerre-Hahn class on the real line, non uniform lattices, discrete Laguerre-Hahn orthogonal polynomials.

Resumo

Neste trabalho temos como objectivo principal desenvolver um método que nos permita caracterizar as famílias de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn na recta real utilizando estruturas vectoriais. Em particular, consideramos famílias de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn cujas funções de Stieltjes, S, satisfazem uma equação diferencial de Riccati com coeficientes polinomiais e famílias de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn discretas definidas sobre redes não uniformes.

Apresentaremos, no capítulo II, caracterizações da classe Laguerre-Hahn sobre a recta real em termos de equações diferenciais vectoriais de segunda ordem para sucessões de polinómios ortogonais mónicos, respectivas sucessões de polinómios associados de primeira espécie e sucessões de funções de segunda espécie.

Partindo dos resultados do capítulo II chegaremos a uma caracterização para as sucessões de polinómios Laguerre-Hahn através de equações diferenciais matriciais de Sylvester. Quando resolvidas estas equações existe uma representação para as sucessões de polinómios Laguerre-Hahn em termos de famílias semi-clássicas ambas definidas sobre a recta real como será mostrado no capítulo III.

O objectivo principal do capítulo IV, consiste numa caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn de variável discreta definidas sobre redes não uniformes em termmos de estruturas de primeira ordem, equações em diferenças de segunda ordem e de Sylvester usando o mesmo método que no capítulo II e III.

Palavras-chave:polinómios ortogonais, função de Stieltjes, classe Laguerre-Hahn sobre a recta real, equações diferenciais matriciais de Riccati, equações diferenciais matriciais de Sylvester, redes não uniformes, polinómios ortogonais Laguerre-Hahn discretos.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Amílcar Branquinho, por todo o apoio e incentivo que demonstrou pela elaboração deste trabalho que sem ele não teria sido possível. Também quero agradecer à Maria das Neves e ao António Bento por toda a disponibilidade e apoio que me deram sempre que necessitei.

À minha família por toda a paciência, carinho, apoio e coragem que me deram durante a elaboração deste trabalho.

Aos amigos que sempre estiveram do meu lado.

Obrigada a todos.

ÍNDICE GERAL

Introdução

Esta dissertação consiste em duas partes distintas e tem como objectivo o estudo de famílias de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn sobre a recta real e famílias de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn discretas. Pretendemos introduzir um novo método que consiste na utilização de estruturas vectoriais que nos permitirão encontrar caracterizações para as famílias de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn definidas na recta real e para as sucessões de polinómios ortogonais mónicas de variável discreta do tipo Laguerre-Hahn. Para o caso discreto consideramos as sucessões de polinómios definidas em redes não uniformes e utilizando o operador mais geral $\mathfrak{D}$. Teremos como ponto de partida os trabalhos de Magnus [**41, 42, 44**] e de Hahn [**31, 32, 33**] e será adaptando o método desenvolvido recentemente por Branquinho e Rebocho, em [**9, 10, 57**], para o caso de ortogonalidade sobre a circunferência unitária.

O primeiro capítulo consiste numa introdução de conceitos da teoria geral dos polinómios ortogonais que serão relevantes para os capítulos seguintes. Começaremos pelas definições gerais sobre a teoria dos polinómios ortogonais contínuos seguindo-se de alguns exemplos. Definiremos sucessão de polinómios ortogonais e respectivas caracterizações. Serão, também abordadas as classes de polinómios ortogonais clássica, semi-clássica e Laguerre-Hahn. Daremos uma perspectiva da representação matricial onde trataremos das sucessões de polinómios ortogonais mónicas e respectivos associados de primeira espécie em simultâneo. No final, deste capítulo, apresentaremos uma abordagem às sucessões de polinómios ortogonais de variável discreta tendo referência a teoria geral desenvolvida por Magnus em [**45**].

A classe dos polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn, para o caso da ortogonalidade sobre subconjuntos da recta real, foi estudada, em grande parte, por Hahn [**33, 34**], Magnus [**41, 44**], Maroni, Dini, Marcellán e co-autores [**24, 48, 50, 51**].

Laguerre, em [**40**], começou por investigar fracções contínuas que satisfaziam equações diferenciais e mostrou como construir a equação diferencial satisfeita por cada denominador, sendo este um polinómio ortogonal. Hahn trabalhou na direcção recíproca e pretendia saber o que acontecia quando os polinómios ortogonais satisfazem equações diferenciais lineares de ordem fixa com coeficientes polinomiais de grau independente de n. Estas famílias de polinómios ortogonais são as denominadas Laguerre-Hahn e foram introduzidos por A. Magnus em [**41**]. Mas foram Maroni e Dini em [**23, 24, 50, 51**] que estudaram estas famílias mais exaustivamente fazendo uma abordagem aos polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn segundo uma perspectiva funcional.

Maroni e co-autores desenvolveram os polinómios Laguerre-Hahn e famílias associadas (ver [**24, 52**] e referências aí citadas). A classe dos polinómios ortogonais Laguerre-Hahn classe zero foi estudada em [**18**] por Bouakkaz e Maroni. A esta classe pertencem os polinómios ortogonais clássicos, seus associados de primeira espécie, polinómios ortogonais co-recursivos, co-dilatados e co-modificados generalizados.

Em [**58**], Ronveaux determinou, explicitamente, as equações diferenciais de quarta ordem para os polinómios associados de primeira espécie dos clássicos e justificando que estes polinómios $P^{(1)}_{n-1}(x)$ correspondentes ao polinómio P_n clássico (excluindo a família Tchebychev) pertencem à classe Laguerre-Hahn e portanto são solução de uma equação diferencial de quarta ordem.

Em [**41**], Magnus propõe uma solução para a equação diferencial do tipo Riccati onde utiliza os polinómios ortogonais do tipo Laguerre-Hahn. Em [**44**], tratou do caso das sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicas onde considera a equação diferencial de Riccati satisfeita pela função de Stieltjes, S, pois, segundo Magnus, é o ponto de partida mais simples.

A perspectiva utilizada por Magnus nesse trabalho é a proposta por Hahn em [**32**]. Hahn, nos seus trabalhos, estuda uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais reais, $\{P_n\}$, através de equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes polinomiais e em [**31, 32**] estabeleceu uma equivalência entre estas equações diferenciais de segunda ordem e as relações de estrutura de primeira ordem com coeficientes polinomiais para $\{P_n\}$. Para o caso da ortogonalidade real estas relações de estrutura de primeira ordem caracterizam o carácter semi-clássico de $\{P_n\}$ (ver [**8**]).

Tendo como motivação trabalho [**44**] fazemos, no capítulo II, um estudo análogo ao de Magnus mas para as sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn definidas na recta real, pois este tratou do caso semi-clássico. Utilizaremos notação vectorial e matricial onde serão consideradas as sucessões de polinómios ortogonais mónicos, $\{P_n\}$, assim como os seus associados de primeira espécie, $\{P_n^{(1)}\}$ e adaptando o método desenvolvido por Branquinho e Rebocho em [**9, 10, 57**] para o caso da circunferência unitária.

Partiremos da equação diferencial de segunda ordem do tipo Riccati

$$A(x)S'(x) = B(x)S^2(x) + C(x)S(x) + D(x) \tag{1}$$

com $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$, $A(x), B(x), C(x), D(x) \in \mathbb{P}$ de graus limitados e das relações de estrutura de primeira ordem, obtidas em [**23, 41**] e que caracterizam os polinómios ortogonais Laguerre-Hahn. Reescrevemos estas relações na forma matricial, considerando o vector $\psi_n(x) = [P_{n+1}\ P_n^{(1)}]^T$, através da equação matricial

$$A\psi_n' = M_n\psi_n + N_n\psi_{n-1} \tag{2}$$

onde M_n e N_n são matrizes de ordem dois com coeficientes polinomiais que não dependem de n. Através desta desta relação obtemos uma equação diferencial vectorial de segunda ordem com coeficientes matriciais

$$\tilde{\mathcal{A}}_n\psi_n'' + \tilde{\mathfrak{B}}_n\psi_n' + \tilde{\mathfrak{C}}_n\psi_n = 0_{2\times 1} \tag{3}$$

onde os coeficientes estão definidos por

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_n &= A^2 N_n \\
\widetilde{\mathcal{B}}_n &= A((A' I_2 - M_n)N_n - N_n M_{n-1} + N_n N_{n-1}\tfrac{x-\beta_n}{\gamma_n} + A N_n') \\
\tilde{\mathcal{C}}_n &= \tfrac{N_n N_{n-1} N_n}{\gamma_n} - A M_n' - (N_n M_{n-1} + N_n N_{n-1}\tfrac{x-\beta_n}{\gamma_n} + A N_n') M_n.
\end{aligned}
$$

M_n e N_n são as matrizes de ordem dois obtidas anteriormente.

Hahn, em [**32**] afirmava que para as sucessões de polinómios ortogonais definidos na recta real as respectivas equações diferenciais lineares com coeficientes polinomiais têm ordem mínima dois ou quatro. Mais, Hahn provou que as soluções das equações diferenciais lineares de quarta ordem podem ser escritas em termos de soluções de equações diferenciais de segunda ordem. Mas a condição recíproca não foi demonstrada.

Neste trabalho provaremos que conseguimos obter uma equação diferencial de primeira ordem do tipo Sylvester tendo como ponto de partida a equação diferencial vectorial de segunda ordem com coeficientes matriciais (3). De seguida, mostra--se que a equação de Sylvester obtida tem a mesma estrutura que a relação (2) e deste modo conseguimos chegar à equação diferencial de Riccati. Apresentamos, assim, uma caracterização fechada para as sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn na recta real.

Considerando as sucessões de funções de segunda espécie, $\{q_n\}$ obtemos, de modo análogo ao anterior, uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn na recta real obtendo uma equivalência entre a equação diferencial de Riccati (1) e a equação diferencial de segunda ordem

$$\widehat{\mathcal{A}}_n q_{n+1}'' + \widehat{\mathcal{B}}_n q_{n+1}' + \widehat{\mathcal{C}}_n q_{n+1} = 0$$

com coeficientes não polinomiais pois dependem de S.

No final do capítulo aplicaremos o método desenvolvido aos polinómios ortogonais Laguerre-Hahn de classe zero. Neste exemplo obtemos um operador que é do tipo Sturm-Liouville e vai de encontro com os resultados obtidos por Branquinho em [**5**] (cf. capítulo IV.7). Neste trabalho, Branquinho, estudou o caso clássico onde explicitou relações que permitem determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos assim como as medidas associadas a estas famílias de polinómios. De facto, Branquinho encontrou uma caracterização para as famílias de polinómios Laguerre-Hahn, como será mostrado na secção quatro do capítulo II. Mostraremos, também, que os exemplos encontrados vão de encontro com o que foi feito por Maroni e Bouakkaz [**18**].

Em [**41**], Magnus deduziu sistemas diferenciais para sucessões de polinómios semi--clássicas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$. Considerou sucessões de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ relativamente a uma função de Stieltjes, S, verificando $AS' = BS + D$, então

$$AY' = \begin{bmatrix} U_n - \frac{C}{2} & \Theta_n \\ \Theta_{n-1} & -U_n - \frac{C}{2} \end{bmatrix} Y, \qquad Y = \begin{bmatrix} P_n & \frac{\varepsilon_n}{w} \\ P_{n-1} & \frac{\varepsilon_{n-1}}{w} \end{bmatrix}$$

onde w é a função peso da respectiva medida, $\{\varepsilon_n\}$ é a sucessão de funções de segunda espécie e U_n, Θ_n são polinómios cujos graus não dependem de n. No capítulo III iremos proceder de modo análogo ao de Magnus. Começaremos por reinterpretar os resultados obtidos no capítulo II estabelecendo uma equivalência entre a equação diferencial de Riccati e equações matriciais do tipo Sylvester da forma

$$AY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C} \tag{3}$$

com

$$\mathcal{B}_n = \begin{bmatrix} -l_{n+1} & \Theta^1_{n+1} \\ -\frac{\Theta^1_n}{\gamma_n} & \Theta^1_n \frac{(x-\beta_n)}{\gamma_n} - l_n \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{C}{2} & -D \\ B & -\frac{C}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

onde l_n, l_{n+1}, Θ^1_n e Θ^1_{n+1} polinómios de graus limitados que não dependem de n e onde β_n, γ_n são os coeficientes da relação de recorrência a três termos de $\{P_n\}$. Também obtemos as expressões para o $\det \mathcal{B}_n$ e concluiremos que o traço da matriz $\mathcal{B}_n$ é zero. Estas equações são análogas às obtidas por Magnus em [**41**] para o caso de ortogonalidade real e por Ismail e Witte [**35**] e por Branquinho e Rebocho em [**10**] para o caso da ortogonalidade sobre a circunferência.

Quando consideramos $B(x) = 0$ na equação (1) obtemos uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$A(x)S'(x) = C(x)S(x) + D(x).$$

A funcional linear diz-se Laguerre-Hahn afim e coincide com a funcional semi-clássica como foi mostrado em [**51**].

Os polinómios ortogonais semi-clássicos foram introduzidos por Laguerre e Shohat e são a generalização natural dos polinómios clássicos. Foi Shohat quem iniciou o estudo dos polinómios ortogonais semi-clássicos quando em [**59**] estudou as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a funcionais de momentos regulares e que verificam equações diferenciais do tipo Pearson $\mathbf{D}(\phi u) + \psi u = 0$ onde u é uma função integrável com derivada integrável $\phi, \psi \in \mathbb{P}$ e grau de $\psi \geq 1$. Se u satisfaz uma equação diferencial do tipo Pearson então a sucessão de polinómios ortogonais mónica associada a u verifica as relações de estrutura de primeira ordem

$$\psi(x)P_n(x) + \phi(x)P_n'(x) = \sum_{k=n-s}^{n+s} a_{n,k}P_k, \quad n \geq s \tag{4}$$

onde $s = \max\{\text{gr}(\psi - 1), \text{gr}(\phi - 2)\}$.

Foram vários os trabalhos que contribuiram para o desenvolvimento da teoria dos polinómios ortogonais semi-clássicos. Entre eles estão Krall que em [**39**] obteve três novas classes de polinómios ortogonais com respeito a medidas que não são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue de onde resultaram os polinómios que satisfazem uma equação diferencial linear de quarta ordem. Karlin e Szëgo [**38**] encontraram as medidas associadas às sucessões de polinómios ortogonais mónicos que satisfazem a relação (4) e em [**17**] Bonan, Lubinski e Nevai determinaram explicitamente a medida.

Karlin e Szëgo propuseram um problema que consistia na caracterização das funções pesos associadas a sucessões de polinómios ortogonais mónicos e na determinação das sucessões de polinómios mónicos que verificavam a equação (4). Foram AL-Salam e Chihara em [**1**] que estudaram o problema de Karlin e Szëgo para $s = 0$

e Hahn em [**32**] apresentou o resultado que a sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ verifica a equação diferencial de segunda ordem como

$$A_n(x)P_n''(x) + B_n(x)P_n'(x) + C_n(x)P_n(x) = 0\,, \tag{5}$$

onde A_n, B_n, C_n são polinómios que não dependem de n, se e somente se verifica as relações de estrutura com coeficientes polinomiais

$$\phi(x)P_{n+1}'(x) = S_n(x)P_{n+1}(x) + T_n(x)P_n(x), \quad n \geq 0\,.$$

Nevai [**54**] considerou a adição de um número finito de pontos de massa a uma medida positiva e estudou o comportamento assimptótico dos correspondentes polinómios ortogonais enquanto que Marcellán e Maroni estavam interessados na análise das modificações das funcionais semi-clássicas fazendo a adição de massas arbitrárias em qualquer ponto da recta real.

Foi Maroni que em [**51**] trabalhou a funcional de momentos linear e deu uma teoria unificadora para as famílias de polinómios semi-clássicas. Provou que estas sucessões de polinómios ortogonais mónicos são aquelas cujas sucessões de polinómios derivadas é quase-ortogonal de uma dada ordem e se $\{P_n\}$ verifica a equação (4) então qualquer função peso que lhe está associada verifica a equação de Pearson. Mostrou, também, que a classe semi-clássica coincide com a classe Laguerre-Hahn afim e que esta vem definida em termos de uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes polinomiais para a função formal de Stieltjes, S, por $\phi S' = CS + F$. Esta equação é equivalente à equação de Pearson $\mathbf{D}(\phi u) + \psi u = 0$ para a correspondente funcional de ortogonalidade, u, definida no espaço dos polinómios reais de variável real, onde $\mathbf{D}$ é o operador de derivação e ψ um polinómio que depende de ϕ e de C.

Branquinho em [**8**] mostrou que se $\{P_n\}$ satisfaz uma equação do tipo (4) tomando em vez de ϕ um polinómio que depende de n, a medida de ortogonalidade verifica uma equação do tipo Pearson.

Marcellán em [**46**] apresentou um estudo completo das famílias semi-clássicas. Com Alvarez-Nodarse, Marcellán, generalizou os polinomios clássicos de Laguerre adicionando a derivada de um delta de Dirac no ponto $z = 0$ e foi mostrado o carácter hipergeométrico destes novos polinómios. Com Prianes em [**56**] obteve condições necessárias e suficientes para que as funcionais modificadas sejam quasi-definidas. Juntamente com Ronveaux [**49**] estudou as sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ que verificam uma equação diferencial de segunda ordem (5).

Ainda no capítulo III obtemos uma solução para a equação de Sylvester (3) através do Teorema de Radon (cf. [**36**]). Esta solução é dada pela matriz $Y_n = \mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1}$ com $n \in \mathbb{N}$ e as matrizes $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{L}$ verificam os sistemas diferenciais

$$\begin{array}{c} A(z)\mathcal{L}'(z) = \mathcal{C}(z)\mathcal{L}(z) \\ \mathcal{L}(z_0) = I_{2\times 2} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} A(z)\mathcal{P}'_n(z) = \mathcal{B}_n(z)\mathcal{P}_n(z) \\ \mathcal{P}_n(z_0) = Y_n(z_0) \end{array}.$$

Nestas condições temos então que um sistema fundamental de soluções é dado por

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{n+1} & \frac{\widetilde{q}_{n+1}}{\widetilde{w}} \\ \widetilde{P}_n & \frac{\widetilde{q}_n}{\widetilde{w}} \end{bmatrix}$$

com $\{\widetilde{P}_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais em relação a um peso semi--clássico $\widetilde{w}$, $\{\widetilde{q}_n\}$ a respectiva sucessão de funções de segunda espécie e $\widetilde{C}$ um polinómio que será determinado no final do capítulo. Mostrámos também que se S verifica a equação de Riccati (1) então S é uma transformação racional e linear da função de Stieltjes semi-clássica $\widetilde{S}$.

O capítulo IV é inspirado no trabalho de Magnus [**42**] onde são relacionadas as famílias de polinómios Laguerre-Hahn de variável discreta com os polinómios de Askey-Wilson. Neste trabalho Magnus estudou sucessões de polinómios Laguerre--Hahn de variável discreta definidas em redes não uniformes e estabeleceu relações de recorrência em diferenças essênciais.

Existem muitos trabalhos sobre os polinómios ortogonais de variável discreta mas foram Nikiforov e Suslov em [**55**] que primeiramente consideraram de forma unificada todos os sistemas de polinómios ortogonais clássicos de variável discreta dando uma teoria geral e classificação para estas famílias de polinómios. Posteriormente, Koekoek e Swarttouw compilaram e tabelaram os trabalhos existentes sobre famílias de polinómios ortogonais gerais no que se denomina por Esquema de Askey [**37**].

A classe dos polinómios ortogonais de variável discreta foi estudada por muitos autores entre eles Garcia, Marcellán, e Salto que, em [**29**], caracterizaram os polinómios ortogonais clássicos discretos pertencentes à classe de Hahn: sucessões de polinómios de Hahn, Charlier, Meixner e Krawtchouk. Em [**53**], Medem, Álvarez-Nodarse e Marcellán caracterizaram os polinómios pertencentes à classe de q-Hahn através de relações de estrutura. Obtiveram-na colocando o operador q-derivada $\mathbf{D}_q$ no lugar da derivada onde

$$\mathbf{D}_{q,x}(f)(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}.$$

A família de polinómios ortogonais $P_n(x)$ que obtiveram está na classe de q-Hahn se os polinómios $(\mathbf{D}_q P_n)(x)$ são, novamente, polinómios ortogonais. Num certo sentido os polinómios ortogonais clássicos estão contidos na classe que estamos aqui a falar pois os polinómios ortogonais de Jacobi, Laguerre e Hermite são casos limite dos polinómios ortogonais discretos de Hahn, Meixner e Charlier, respectivamente, como foi mostrado em [**30**] por Godoy et al.

Foi Hahn, em [**31**], quem generalizou as propriedades que caracterizam os polinómios ortogonais clássicos de variável discreta. No lugar de derivadas, considerou o operador linear $\mathbf{L}_{q,\omega}$, mais geral que $\mathbf{D}_q$, definido por

$$\mathbf{L}_{q,\omega}(f)(x) = \frac{f(qx+\omega) - f(x)}{(q-1)x+\omega} \quad q, \omega \in \mathbb{R}^+$$

e quando se considera o caso limite, tomando $\omega = 0$ e $q \to 1$ em $\mathbf{L}$, obtem-se o operador derivada utilizado no caso contínuo. Provou que estas famílias de polinómios determinam uma única classe de polinómios ortogonais e que estes polinómios podem ser construídos em termos de séries hipergeométricas básicas. Como as derivadas são casos limite do operador de Hahn, os polinómios ortogonais clássicos estão contidos na classe de Hahn. Considerando o caso em que $q \in (0,1)$ e $\omega = 0$ resulta a tabela de q-Hahn (cf. [**37**]). Obteve, também, uma sucessão de polinómios ortogonais mais geral $\{P_n\}$ tal que a sucessão das suas q-derivadas $\{\mathbf{D}_q P_n\}$ ainda é uma sucessão de polinómios ortogonais que são designados por polinómios "big q-Jacobi" (ver secção 4.1 de [**2**]). Provou, também, que esta família de polinómios satisfaz uma equação em diferenças de segunda ordem da forma

$$\sigma(x)\mathbf{D}_q\mathbf{D}_{\frac{1}{q}}P_n(x) + \tau(x)\mathbf{D}_q P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0 \tag{6}$$

onde σ, τ são polinómios independentes de n, $\mathrm{gr}(\sigma) \leq 2, \mathrm{gr}(\tau) = 1$ e λ_n é uma constante. Os polinómios q-clássicos e q-semi-clássicos aparecem em trabalhos de Álvarez-Nordase, Medem e Marcellán, Foupoagnigni e Ronveaux e Godoy *et al* (cf. [**2, 53, 27, 30**]). Atakishiev *et al*, [**13**], obtiveram a relação de ortogonalidade discreta usando a equação em diferenças de segunda ordem (6) satisfeita pela família ortogonal $\{P_n\}$, e a equação do tipo Pearson satisfeita pela respectiva função peso.

Em [**26**], Foupouagnigni e Marcellán caracterizaram as sucessões de polinómios relativas aos funcionais lineares $\mathbf{D}_w$-Laguerre-Hahn. Em [**28**], Foupouagnigni apresentou uma caracterização dos polinómios ortogonais clássicos no sentido de Hahn e consistente com a definição dada por Andrews e Askey em [**3**]. Em [**21**], Costas-Santos e Lara estudaram as famílias de polinómios de Hahn em que os polinómios de ordem superior a n podem ser caracterizados pela ortogonalidade Δ-Sobolev e Dueñas *et al* [**22**] consideraram uma perturbação na funcional linear adicionando-lhe a derivada de um delta de Dirac verificando que a família de polinómios resultante mantinha o carácter Laguerre-Hahn.

Em [**12**], Atakishiyev *et al* estudaram as sucessões de polinómios ortogonais de que satisfazem equações em diferenças de quarta ordem para os polinómios associados de primeira espécie relativas aos clássicos, assim como foi feito em [**23, 27, 28**]. Bangerezako [**14**], estabeleceu uma generalização das equações em diferenças de quarta ordem para sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn considerando redes não uniformes especiais. Depois considera os casos particulares dos polinómios ortogonais clássicos associados de ordem r em redes lineares, q-lineares e q-não-lineares que são do tipo Askey-Wilson.

No quarto capítulo iremos caracterizar as sucessões de polinómios ortogonais de variável discreta tendo como ponto de partida os trabalhos de Magnus [**42, 45**] e, também, os trabalhos de Branquinho e Rebocho [**9, 10**] onde estudaram caracterizações para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn definidos sobre a circunferência unitária.

Quando na equação diferencial de segunda ordem do tipo Riccati (1) substituímos o operador derivada por um operador mais geral $\mathfrak{D}$ definido por

$$\mathfrak{D}(f)(x) = \frac{f(\eta_2(x)) - f(\eta_1(x))}{\eta_2(x) - \eta_1(x)}$$

onde $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ são as raízes da equação quadrática

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0, \qquad A \neq 0$$

obtemos que as sucessões de funções de segunda espécie S satisfazem uma equação em diferenças do tipo Riccati

$$A(x)\mathfrak{D}(S)(x) = B(x)S(\eta_1(x))S(\eta_2(x)) + C(x)\mathfrak{M}(S)(x) + D(x)$$

e onde o operador $\mathfrak{M}$ está definido por $\mathfrak{M}(f)(x) = \dfrac{f(\eta_2(x)) + f(\eta_1(x))}{2}$.

A secção um, do capítulo IV, começa com uma demonstração alternativa do Lema de Magnus, para o caso Laguerre-Hahn discreto, relativamente à realizada por Magnus em [**42**]. Esta será baseada na demonstração que existe para o caso semi-clássico obtida por Branquinho, em [**4**].

Na secção dois caracterizaremos as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn discretas estabelecendo uma equivalência entre as relações de estrutura de primeira ordem para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ e sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ partindo da equação em diferenças de Riccati e utilizando as sucessões de vectores de polinómios $\psi_n = [P_{n+1}\ P_n^{(1)}]^T$, definidas no capítulo I.

De seguida encontraremos uma equação de segunda ordem em diferenças que caracteriza os polinómios ortogonais discretos. O procedimento será análogo ao que foi desenvolvido por Magnus em [**42, 45**]. Na secção três estabeleceremos equações em diferenças do tipo Sylvester e na secção quatro faremos um estudo da classe semi-clássica discreta.

CAPÍTULO I

Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais

Neste capítulo abordaremos a teoria geral dos polinómios ortogonais sobre a recta real indicando alguns resultados que serão relevantes para os capítulos seguintes que serão tratados nas secções um e dois. Faremos uma breve abordagem às sucessões de polinómios ortogonais de primeira espécie, função de Stieltjes, funções de segunda espécie, fórmula de Darboux-Christoffel e de Liouville-Ostrogradsky, Teorema de Markov, Lema de Magnus e sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn.

Na secção três apresentaremos as relações de recorrência a três termos e relações de ortogonalidade na forma matricial pois será esta a notação que iremos utilizar nos capítulos seguintes.

As secções quatro a seis serão dedicadas aos polinómios ortogonais de variável discreta definidos em redes não lineares. Os resultados que apresentamos, na sua maioria, são devidos a Magnus (ver [**43, 44, 45**]). Começaremos com as definições de redes lineares e não lineares, operador em diferenças de primeira ordem $\mathfrak{D}$, operador média aritmética $\mathfrak{M}$ e respectivas propriedades algébricas. Estabeleceremos a fórmula de Darboux-Christoffel, fórmula de Liouville-Ostrogradski, relações de recorrência a três termos para as sucessões de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ e $\{P_n^{(1)}\}$, de variável discreta, quando aplicados os operadores. Apresentaremos estas relações na forma matricial pois será esta notação que iremos utilizar no capítulo IV. No final do capítulo definiremos as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn para variável discreta juntamente com alguns exemplos.

1. Uma introdução à teoria dos polinómios ortogonais

Seja $\mathbb{P}$ o *espaço linear dos polinómios definidos em* $\mathbb{R}$ com coeficientes complexos e considere-se a *funcional linear* u sobre $\mathbb{P}$ definida da seguinte forma

$$u \quad : \quad \mathbb{P} \to \mathbb{C}, \qquad \langle u, x^n \rangle = u_n .$$

A sucessão de números complexos (u_n), com u definida como anteriormente diz-se uma *sucessão de momentos*.

Observação I.1. Uma funcional u diz-se *positiva*, se existe uma medida positiva μ tal que $u = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Definição I.1. Seja w um função positiva, integrável, definida num subconjunto de $\mathbb{R}$. Denominamos por *função peso*, a função cujos integrais correspondentes a $u_n = \int_I x^n w(x)dx$ são finitos.

Seja H_n o determinante de Hankel de ordem $(n+1), n \in \mathbb{N}$, associado à sucessão dos $(n+1)$ primeiros momentos

$$H_n = \begin{vmatrix} u_0 & \cdots & u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & \cdots & u_{2n} \end{vmatrix}$$

temos que:

Teorema I.1. *Seja u uma funcional de momentos com sucessão de momentos (u_n). Existe uma sucessão de polinómios ortogonais associada u se, e somente se, $H_n \neq 0$ com $n = 0, 1, \ldots$.*

Esta sucessão de polinómios vem dada, a menos de uma constante, por

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & \cdots & u_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} H_n^{-1} \quad \text{com} \qquad n \geq 1, \quad P_0(x) = 1 ,$$

obtém-se

$$\langle u, P_m(x)P_n(x)\rangle = \frac{H_{n+1}(x)}{H_n(x)}\delta_{mn},\ m,n \in \mathbb{N},$$

e esta equação fornece-nos uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sucessão de polinómios ortogonais. Daqui resulta que

Teorema I.2. *A funcional* u *diz-se regular ou quase-definida quando estiver associada a uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, ou quando* $H_n \neq 0$. *A funcional* u_n *é definida positiva se e somente se os momentos são todos reais e* $H_n > 0$. *Neste caso* $\{P_n\}$ *é uma sucessão de polinómios ortogonais reais.*

As famílias de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ têm diversas caracterizações mas uma das mais utilizadas é a relação de recorrência a três termos pois quaisquer três elementos consecutivos de $\{P_n\}$ satisfazem uma relação de recorrência do tipo

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \tag{I.1}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $P_{-1}(x) = 0$ e $P_0 = 1$ onde β_n, γ_n são constantes e $\gamma_n \neq 0$.

Um dos resultados mais importantes, neste contexto, deve-se a Favard [**25**], e afirma que qualquer sucessão de polinómios que satisfaça uma relação de recorrência da forma (I.1) é uma sucessão de polinómios ortogonais. Concretamente tem-se

Teorema I.3 (Favard, 1935). *Sejam* (β_n), (γ_n) *sucessões de números complexos e* $\{P_n\}$ *uma sucessão de polinómios definida pela relação de recorrência*(I.1). *Então existe uma funcional de momentos relativamente à qual* $\{P_n\}$ *é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, ou seja, uma sucessão de polinómios que verificam* $\langle u, 1\rangle = \gamma_1$, *e* $\langle u, P_m P_n\rangle = \gamma_1 \cdots \gamma_{n+1}\delta_{m,n}$.

[Além disso, a funcional linear u *é quase-definida se e somente se* $\lambda_n \neq 0$, *e* u *é definida-positiva se e somente se* $(\beta_n) \subseteq \mathbb{R}$ *e* $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ *com* $n \in \mathbb{N}$.*]*

Os exemplos mais notáveis de sucessões de polinómios ortogonais surgem quando as funções peso estão definidas em intervalos de números reais ou em conjuntos discretos. É o caso das sobejamente estudadas sucessões de polinómios ortogonais clássicas, sucessões de polinómios de Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel [**11, 20, 30**].

De seguida apresentamos uma condição necessária de ortogonalidade

Teorema I.4 (Darboux-Christoffel). *Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos, e $\lambda_n \neq 0$. As afirmações são equivalentes:*

(1) *A sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ satisfaz a relação de recorrência a três termos* (I.1)*;*

(2) *temos a identidade de Darboux-Christoffel*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\lambda_1 \cdots \lambda_{k+1}} = \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n (x-y)}, \tag{I.2}$$

(3) *é válida a forma confluente de Darboux-Christoffel*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(x)}{\lambda_1 \cdots \lambda_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\lambda_1 \cdots \lambda_{k+1}}.$$

(4) *e a fórmula de Liouville-Ostrogradsky*

$$P_n(x)P_n^{(1)}(x) - P_{n+1}(x)P_{n-1}^{(1)}(x) = \gamma_n \cdots \gamma_0, \tag{I.3}$$

onde $\gamma_0 = 1$ *com* $\gamma_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Demonstração: As condições (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) são conhecidas (c.f. [**20**]). Brezinski, [**19**], provou (2) $\Rightarrow$ (1), Branquinho, [**4**], provou (3) $\Rightarrow$ (1).

Vamos demonstrar (4) $\Rightarrow$ (1). Da fórmula de Liouville-Ostrogradsky temos

$$P_n(x)P_n^{(1)}(x) - P_{n+1}(x)P_{n-1}^{(1)}(x) = \gamma_{n+1}(P_{n-1}(x)P_{n-1}^{(1)}(x) - P_n(x)P_{n-2}^{(1)}(x)),$$

$$P_n\{P_n^1 + \gamma_n P_{n-2}^{(1)}\} = \{P_{n+1} + \gamma_n P_{n-1}\}P_{n-1}^{(1)}$$

Resulta, assim que P_n e $P_{n-1}^{(1)}$ não têm raízes em comum e são de grau n e $n-1$, respectivamente; pelo que existe um polinómios l_n tal que

$$P_{n+1} + \gamma_n P_{n-1} = l_n P_n \quad \text{e} \quad P_n^1 + \gamma_n P_{n-2}^{(1)} = l_n P_n^{(1)}.$$

Por comparação do termo de maior grau temos que $l_n = x - \beta_n$, l_n é de grau 1. ∎

A sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada de primeira espécie que está associada a uma modificação da funcional linear u define-se do modo seguinte:

Definição I.2. Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais associada à funcional linear u. Definimos *sucessão de polinómios ortogonais associada de primeira espécie* como sendo a sucessão $\{P_n^{(1)}\}$ de termos geral

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{u_0}\left\langle u_t, \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t}\right\rangle \tag{I.4}$$

onde u_t representa a acção de u na variável t.

A sucessão de polinómios ortogonais de primeira espécie, $\{P_n^{(1)}\}$, satisfaz a mesma relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$

$$\widetilde{P}_n(x) = (x-\beta_n)\widetilde{P}_{n-1}(x) - \gamma_n \widetilde{P}_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{I.5}$$

com as condições iniciais $\widetilde{P}_{-1} = 0$ e $\widetilde{P}_0 = 1$ então $\widetilde{P}_n(x) = -P_{n-1}^{(1)}(x)$.

De seguida definimos outra solução de (I.1):

Definição I.3. Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. A sucessão de polinómios ortogonais mónicos definida por

$$P_{n+1}(x,d) = P_{n+1}(x) - dP_n^{(1)}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

designa-se *co-recursiva* correspondente a $\{P_n\}$. As condições iniciais são $P_0(x,d) = 1$ e $P_1(x,d) = P_0(x) - d$.

Temos também (cf. [**5**]):

Definição I.4. Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear u. Dizemos que R_n é uma *transformação afim* de P_n se existirem parâmetros reais a, b, $a \neq 0$ tais que $R_n = \frac{P_n(ax+b)}{a^n}$. Neste caso $\{R_n\}$ satisfaz a relação de recorrência a três termos seguinte

$$xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \frac{\beta_n - b}{a}R_n(x) + \frac{\gamma_n}{a^2}R_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

com β_n, γ_n coeficientes de (I.1) e com condições iniciais $R_0(x) = 1$ e $R_1(x) = x - \frac{\beta_0 - b}{a}$.

Definição I.5. Seja u uma funcional regular. Chama-se *função de Stieltjes* formal a

$$S(u)(x) = \int_{\operatorname{supp}\mu} (x-t)^{-1} d\mu = -\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{x^{n+1}}$$

onde u_n, $n \geq 0$, são os momentos de u.

A função de Stieltjes, S, admite a representação em a *fracção contínua de Jacobi* seguinte:

$$S(z) = \cfrac{1}{z - \beta_1 - \cfrac{\gamma_1}{z - \beta_2 - \ddots}}.$$

Quanto a questões de convergência relativas às sucessões de polinómios ortogonais mónicos temos o seguinte Teorema:

Teorema I.5 (Markov). *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a uma medida de Borel positiva μ. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P^{(1)}_{n-1}(z)}{P_n(z)} = S(z) \tag{I.6}$$

uniformemente em todo o subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\mu)$.

Observação I.2. No Teorema de Markov $\operatorname{supp}(\mu)$ designa o suporte de μ, ou seja, é o menor conjunto fechado contendo todos os pontos de incremento de μ.

As *funções de segunda espécie*, associadas a $\{P_n\}$ e u, $\{q_n\}_{n\geq 0}$, definem-se por

$$q_n(x) = \int \frac{P_n(t)}{x-t} d\mu(t)$$

onde $\{P_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ são os polinómios ortogonais com medida μ e estão bem definidas para pontos pertencentes ao conjunto $\mathbb{C} \setminus \{\operatorname{supp}(\mu)\}$.

As sucessões de funções de segunda espécie, $\{q_n\}$ satisfazem a mesma relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$

$$q_{n+1}(x) = (x - \beta_n) q_n(x) - \gamma_n q_{n-1}(x) \tag{I.7}$$

com condições iniciais $q_{-1}(x) = 1$ e $q_0(x) = \int \frac{d\mu(t)}{x-t}$. Como se pode verificar q_0 é a *transformada de Stieltjes* da medida μ (ver [**61**]).

Deste resultado obtemos a *relação de Hermite-Padé*

$$P_{n+1}(x)S(x) - P_n^{(1)}(x) = q_{n+1}(z) \tag{I.8}$$

que será o ponto de partida para se chegar às relações de estrutura de primeira ordem para as sucessões de polinómios ortogonais mónicas $\{P_n\}$, como será mostrado no próximo capítulo. Outro resultado que será útil é o Lema de Magnus (cf. [**4**] pag.41) onde temos uma relação entre as sucessões de polinómios ortogonais e a equação diferencial de Riccati. Este Lema pode generalizar-se a uma função qualquer da seguinte forma:

Teorema I.6. *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções, qualquer, e existem duas sucessões de números reais (β_n) e (γ_n) com $\gamma_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que satisfazem uma relação de recorrência a três termos*

$$xf_n(x) = f_{n+1}(x) + \beta_n f_n(x) + \gamma_n f_{n-1}$$

com condições iniciais $f_{-1} = 0$ e $f_0(x) = 1$. Suponhamos que $g_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ verifica a equação

$$a_n(x)g_n'(x) = b_n(x)g_n^2(x) + c_n g_n(x) + d_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

onde a_n, b_n, c_n e d_n são polinómios de graus limitados; então, para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \\
b_{n+1} &= \frac{d_n}{\gamma_{n+1}} \\
c_{n+1} &= -c_n - 2(x - \beta_{n+1})\frac{d_n}{\gamma_{n+1}} \\
d_{n+1} &= a_n + \gamma_{n+1} b_n + (x - \beta_{n+1})c_n + (x - \beta_{n+1})^2 \frac{d_n}{\gamma_{n+1}}.
\end{aligned}$$

2. Famílias de polinómios ortogonais na recta real

Definimos, de seguida, as sucessões polinómios ortogonais Laguerre-Hahn. Seguiremos os trabalhos de Magnus e Maroni [**41, 51**]. Mostraremos que as famílias de polinómios ortogonais clássicas e semi-clássicas pertencem a esta classe de polinómios ortogonais.

Definição I.6. Uma *funcional linear regular* u diz-se *Laguerre-Hahn* se a respectiva função de Stieltjes S verifica a equação diferencial de Riccati

$$A(z)S'(z) = B(z)S^2(z) + C(z)S(z) + D(z) \tag{I.9}$$

onde $A(z) \neq 0$, $B(z) \neq 0$ e $C^2 - 4BD \neq 0$.

A sucessão de polinómios ortogonais relativamente a u designa-se por sucessão de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn.

Quando $B = 0$, a funcional S designa-se por *Laguerre-Hahn afim* e a respectiva sucessão de polinómios ortogonais designa-se por *sucessão de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn afim*. A classe dos polinómios ortogonais Laguerre-Hahn afim coincide com classe semi-clássica (ver [**51**]).

Os polinómios de Laguerre-Hahn podem ser caracterizados de várias formas como foi descrito em [**18**]. São as sucessões de polinómios ortogonais $\{P_n\}_{n\geq 0}$ tais que cada polinómio $P_n,\ n \geq 0$ verifica a relação de estrutura

$$A(x)P'_{n+1} - B(x)P_n^{(1)}(x) = \sum_{k=n-s}^{n+d} \Theta_{n,k}P_k(x) \quad n \geq s+1$$

onde $s = \max(p-1, d-2)$, $d = \max(t, r)$ e t, p, r são os graus dos polinómios A, B e ψ, respectivamente.

Os polinómios ortogonais Laguerre-Hahn constituem uma família mais alargada do que a dos polinómios semi-clássicos. Quando $s = 0$ obtêm-se as sucessões de polinómios de Laguerre-Hahn de classe zero que compreendem as sucessões de polinómios ortogonais clássicas, os seus associados, co-recursivos e as sucessões de polinómios perturbados de primeira ordem. Ao considerar uma perturbação na condição inicial dessa sucessão, ou seja, fazendo $P_1(x, k) = x - \beta_0 - k$, a sucessão resultante $\{P_n(x,k)\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais co-recursivos sendo a relação de recorrência a três termos definida por

$$P_{n+2}(x,k) = (x-\beta_{n+1})P_{n+1}(x,k) - \gamma_{n+1}P_n(x,k), \quad n = 0,1,\ldots$$

com condições iniciais $P_0(x,k) = 1$ e $P_1(x,k) = x - \beta_0 - k$. Esta sucessão de polinómios é, em geral, semi-clássica e pertence à família de polinómios Laguerre--Hahn. Pertencem, também, a esta família as sucessões de polinómios ortogonais onde é feita uma translação em β_0 ou uma dilatação em γ_1 e as sucessões de polinómios ortogonais associadas de primeira ordem, para o caso em que $\{P_n\}$ é semi-clássico.

Em [**32**], Hahn, estabeleceu que cada polinómio de uma sucessão ortogonal de Laguerre-Hahn satisfaz uma equação diferencial de quarta ordem com coeficientes polinomiais que dependem de n.

3. Forma matricial para as relações de recorrência

Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, $\{P_n^{(1)}\}$ sucessão de polinómios associados de primeira espécie e $\{q_n\}$ sucessão de funções de segunda espécie relativas a u. Definimos as seguintes matrizes, $n \geq 0$

$$\psi_n = [P_{n+1}\ P_n^{(1)}]^T \tag{I.10}$$

$$Q_n = [q_{n+1}\ q_n]^T \tag{I.11}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{bmatrix} \tag{I.12}$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{I.13}$$

$$\mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} x-\beta_n & -\gamma_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{I.14}$$

que serão necessárias nos capítulos seguintes e onde $[.]^T$ denota a matriz transposta.

As relações de recorrência a três termos (I.1) e (I.5) podem ser escritas pela relação

$$Y_n(x) = \mathcal{A}_n(x) Y_{n-1}(x)$$

que representamos na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}(x) & P_n^{(1)}(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}^{(1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-\beta_n & -\gamma_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n(x) & P_{n-1}^{(1)}(x) \\ P_{n-1}(x) & P_{n-2}^{(1)}(x) \end{bmatrix} \tag{I.15}$$

com condição inicial $Y_0(x) = \begin{bmatrix} x-\beta_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Estas sucessões de matrizes satisfazem as relações que apresentamos no Lema seguinte:

Lema I.1. *Seja u uma funcional linear regular, S a função de Stieltjes associada a u e sejam $\{\psi_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{Q_n\}$ sucessões de vectores. Consideremos, também, os coeficientes da relação de recorrência a três termos de $\{P_n\}$, β_n e γ_n onde $\beta_n, \gamma_n \in \mathbb{C}$, $\gamma_n \neq 0$. Então,*

(1) *a sucessão $\{\psi_n\}$ satisfaz a relação de recorrência a três termos*

$$\psi_n(x) = (x-\beta_n)\psi_{n-1} - \gamma_n \psi_{n-2}, \quad \forall n \geq 1; \tag{I.16}$$

com condições iniciais $\psi_{-1} = [1 \quad 0]^T$ e $\psi_0 = [x-\beta_0 \quad 1]^T$;

(2) *a sucessão $\{\varphi_n\}$ satisfaz a relação, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\varphi_n(x) = K_n(x)\varphi_{n-1}(x) \tag{I.17}$$

com $K_n = \begin{bmatrix} (x-\beta_n)I_2 & -\gamma_n I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{bmatrix}$ e $\varphi_0 = \begin{bmatrix} x-\beta_0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e onde I_2 denota a matriz identidade de ordem 2;

(3) *a sucessão $\{Q_n\}$ satisfaz a relação, $\forall n \geq 1$, $Q_n(x) = \mathcal{A}_n(x) Q_{n-1}$ com condições iniciais $Q_0 = \begin{bmatrix} (x-\beta_0)S - 1 \\ S \end{bmatrix}$.*

Para demonstrar este Lema basta considerar as relações de recorrência a três termos da sucessão de polinómios ortogonais mónicos (I.1), respectivos associados de primeira espécie, (I.5) e da sucessão de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ (I.7).

4. Polinómios ortogonais discretos em Redes não uniformes

Nesta secção iremos considerar as sucessões polinómios ortogonais discretos definidos em redes não uniformes. Começamos com a definição de rede linear:

Definição I.7. Uma função complexa $x(s)$ de variável complexa z diz-se uma *rede de tipo linear* se

$$x(z+\zeta) = F(\zeta)x(z) + G(\zeta), \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{C}, \quad F(\zeta) \neq 0$$

sendo F e G funções complexas que não dependem de z.

Apresentamos alguns exemplos de redes lineares mais utilizadas:

Exemplo 4.1.

(1) Quando $F(\zeta) = 1$ e $G(\zeta) = \zeta$ temos a rede linear $x(s) = s$.
(2) Funções da forma $x(s) = A\,\mathrm{q}^s + B$ com A, B constantes obtemos a rede q-linear onde $\mathrm{q} \neq \{0, \pm 1\}$. Neste caso $x(s+\zeta) = F(\zeta)x(s) + G(\zeta)$ onde $F(\zeta) = q^\zeta$ e $G(\zeta) = B(1 - \mathrm{q}^\zeta)$

Para as redes não uniformes temos:

Definição I.8. Se $x(s)$ é uma rede linear, q-linear, quadrática ou q-quadrática então $x(s)$ é da forma

$$\begin{aligned} x(s) &= C_1\,\mathrm{q}^{-s} + C_2\,\mathrm{q} + C_3, \quad \mathrm{q} \neq 1 \\ x(s) &= C_4 s^2 + C_5 s + C_6, \quad \mathrm{q} = 1 \end{aligned} \tag{I.18}$$

com $q \in \mathbb{C}$, C_i constantes arbitrárias tais que $C_1, C_2, C_4, C_5 \neq 0$. As redes da forma (I.18) com $C_1 C_2 \neq 0$ ou $C_4 \neq 0$ designam-se por redes não uniformes.

Neste trabalho iremos considerar redes quadráticas. Começamos por definir $\mathfrak{D}$, operador de primeira ordem em diferenças, por

$$\mathfrak{D}(f)(x) = \frac{f(\eta_2(x)) - f(\eta_1(x))}{\eta_2(x) - \eta_1(x)} \tag{I.19}$$

e o operador, *média aritmética* por

$$\mathfrak{M}(f)(x) = \frac{f(\eta_2(x)) + f(\eta_1(x))}{2} \tag{I.20}$$

onde para cada x, $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$ são as raízes, em y, da equação quadrática

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0, \qquad A \neq 0, \tag{I.21}$$

onde $\eta_1(x) = \mathrm{p}(x) + \sqrt{\mathrm{q}(x)}$ e $\eta_2(x) = \mathrm{p}(x) - \sqrt{\mathrm{q}(x)}$ com p e q polinómios de graus menor ou igual a 1 ou 2, respectivamente. Os operadores $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{M}$ transformam polinómios de grau n em polinómios de grau $n-1$.

O conjunto de pontos das redes, em x e em y, fica completamente determinado pelo ponto inicial (x_1, y_1) na cónica (I.21). A coordenada y_2 é a segunda ordenada correspondente a x_1, x_2 é a segunda abcissa correspondente a y_2 e assim sucessivamente. Salientamos o facto de as duas ordenadas y_k e y_{k+1} correspondentes a x_k, $k = 1, \dots, n$ são as duas raízes da equação (I.21), quando $x = x_k$, então a sua soma é

$$\begin{aligned} y_k + y_{k+1} &= -\frac{Bx_k + D}{A} \\ y_{k-1} + 2y_k + y_{k+1} &= -\frac{2(B(x_{k-1} + x_k) + 2D)}{A}. \end{aligned}$$

Por outro lado se x_{k-1} e x_k, são as duas abcissas correspondentes a y_k, $k = 1, \dots, n$, consideremos x como sendo uma raiz da cónica (I.21) para um dado y então temos (I.22) obtendo deste modo

$$y_{k-1} + \left(2 - \frac{4b^2}{ac}\right) y_k + y_{k+1} = 4\frac{BE - CD}{AC} \tag{I.22}$$

$$x_{k-1} + \left(2 - \frac{4b^2}{ac}\right) x_k + x_{k+1} = 4\frac{BD - AE}{AC} \tag{I.23}$$

onde $AC \neq 0$ para que as redes existam.

As soluções das equações (I.22) e (I.23) têm uma parte exponencial comum que usualmente se denomina por q^k e q^{-k}, ou seja,

$$
\begin{aligned}
y_k &= C_1\,\mathrm{q}^k + C_2\,\mathrm{q}^{-k} + \frac{BE-CD}{AC-B^2}\\
x_k &= C_3\,\mathrm{q}^k + C_4\,\mathrm{q}^{-k} + \frac{BD-AE}{AC-B^2}
\end{aligned}
$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4 são constantes e $\mathrm{q}+\mathrm{q}^{-1} = \frac{4B^2}{AC} - 2$. O último termos das equações anteriores dá-nos o centro cónica que toma a sua forma consoante os valores de q. Se

(1) $|\,\mathrm{q}\,| = 1$ obtemos uma elipse,
(2) q real e $\mathrm{q} \neq \{-1, 1\}$ obtemos uma hipérbole,
(3) $\mathrm{q} = 1$ obtemos uma parábola.

A representação gráfica destas redes encontram-se nos trabalhos de Magnus [**42, 45**].

5. Propriedades Algébricas de $\mathfrak{D}$ e de $\mathfrak{M}$

Definimos de seguida as propriedades algébricas dos operadores $\mathfrak{D}$ e de $\mathfrak{M}$:

Lema I.2. *Sejam f, g duas funções, $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{M}$ os operadores definidos em* (I.19) *e em* (I.20)*, respectivamente. Podemos representar de várias formas $\mathfrak{D}(fg)$ e $\mathfrak{D}\,(f/g)$:*

$$
\mathfrak{D}(fg)(x) = \mathfrak{D}(f)(x)g(\eta_1(x)) + f(\eta_2(x))\mathfrak{D}(g)(x) \tag{I.24}
$$

$$
\mathfrak{D}(fg)(x) = \mathfrak{D}(f)(x)g(\eta_2(x)) + f(\eta_1(x))\mathfrak{D}(g)(x)
$$

$$
\mathfrak{D}(fg)(x) = \mathfrak{M}(f)(x)\mathfrak{D}(g)(x) + \mathfrak{M}(g)(x)\mathfrak{D}(f)(x) \tag{I.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}\,(f/g)\,(x) &= \frac{\mathcal{D}(f)(x)\mathcal{M}(g)(x) - \mathcal{D}(g)(x)\mathcal{M}(f)(x)}{(\mathcal{M}(g)(x))^2 - \mathrm{q}(\mathcal{D}(g(x)))^2}\\
\mathcal{D}\,(f/g)\,(x) &= \frac{\mathcal{D}(f)(x)\mathcal{M}(g)(x) - \mathcal{D}(g)(x)\mathcal{M}(f)(x)}{g(\eta_1(x))g(\eta_2(x))} \qquad\qquad \text{(I.26)}\\
\mathfrak{D}\,(1/f)\,(x) &= -\frac{\mathfrak{D}(f)(x)}{f(\eta_1(x))f(\eta_2(x))}.
\end{aligned}
$$

Para o operador $\mathfrak{M}$ temos:

Lema I.3. *Sejam f, g duas funções, $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{M}$ os operadores definidos em* (I.19) *e em* (I.20)*, respectivamente. Podemos representar de várias formas $\mathfrak{M}(fg)$ e $\mathfrak{M}\left(\frac{f}{g}\right)$:*

$$\mathfrak{M}(fg)(x) = \mathfrak{M}(f)(x)\mathfrak{M}(g)(x) + \mathrm{q}\,\mathfrak{D}(f)(x)\mathfrak{D}(g)(x) \tag{I.27}$$

$$\mathfrak{M}\left(1/f\right)(x) = \frac{\mathfrak{M}(f)(x)}{f(\eta_1(x))f(\eta_2(x))}$$

$$\mathfrak{M}\left(f/g\right)(x) = \frac{(f(\eta_1(x)g(\eta_2(x)) + f(\eta_2(x))g(\eta_1(x)))}{2g(\eta_1(x))g(\eta_2(x))}. \tag{I.28}$$

Ao considerar $g(x) = x$ por (I.2) e por (I.27) obtemos as seguintes propriedades algébricas

$$\mathfrak{D}(xf)(x) = \mathrm{p}\,\mathfrak{D}(f)(x) + \mathfrak{M}(f)(x) \tag{I.29}$$

$$\mathfrak{M}(xf)(x) = \mathrm{p}\,\mathfrak{M}(f)(x) + \mathrm{q}\,\mathfrak{D}(f)(x) \tag{I.30}$$

que matricialmente têm a seguinte representação

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{D}(xf)\\ \mathfrak{M}(xf)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{p} & 1\\ \mathrm{q} & \mathrm{p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathfrak{D}(f)\\ \mathfrak{M}(f)\end{bmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz $\begin{bmatrix}\mathrm{p} & 1\\ \mathrm{q} & \mathrm{p}\end{bmatrix}$ são $\mathrm{p}+\sqrt{\mathrm{q}}$ e $\mathrm{p}-\sqrt{\mathrm{q}}$, logo esta matriz pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix}\mathrm{p} & 1\\ \mathrm{q} & \mathrm{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{q}}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{q}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{p}-\sqrt{\mathrm{q}} & 0\\ 0 & \mathrm{p}+\sqrt{q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \sqrt{\mathrm{q}} & -\sqrt{q}\end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix}\mathfrak{D}x^n\\ \mathfrak{M}x^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{p} & 1\\ \mathrm{q} & \mathrm{p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathfrak{D}x^{n-1}\\ \mathfrak{M}x^{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{p} & 1\\ \mathrm{q} & \mathrm{p}\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Em [**28**], Foupouagnigni mostrou o caso geral.

As sucessões de polinómios ortogonais associados de primeira espécie, de variável discreta, também satisfazem a representação (I.29) e (I.30). Portanto, podemos escrever estas equações na forma vectorial

$$\mathfrak{M}\begin{bmatrix} xP_n \\ xP_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathrm{q}\,\mathfrak{D}\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} + \mathrm{p}\,\mathfrak{M}\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

como, na secção três, definimos ψ_n por $\psi_n = [P_{n+1}\ P_n^{(1)}]^T$ vem

$$\mathfrak{M}(x\psi_{n-1}) = \mathrm{q}\,\mathfrak{D}(\psi_{n-1}) + \mathrm{p}\,\mathfrak{M}(\psi_{n-1}).$$

De modo análogo temos para o operador $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D}\begin{bmatrix} xP_n \\ xP_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathrm{p}\,\mathfrak{D}\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} + \mathfrak{M}\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\mathfrak{D}(x\psi_{n-1}) = \mathrm{p}\,\mathfrak{D}(\psi_{n-1}) + \mathfrak{M}(\psi_{n-1}).$$

Consideremos a relação de recorrência a três termos para $\{P_n\}$ (I.1). Aplicando $\mathfrak{D}$ em ambos os membros,

$$\mathfrak{D}(P_{n+1})(x) = \mathfrak{D}(xP_n)(x) - \mathfrak{D}(\beta_n P_n)(x) - \mathfrak{D}(\gamma_n P_{n-1})(x)$$

pelas relações (I.30) e pelo cálculo operacional (I.2) temos

$$\mathfrak{D}(P_{n+1})(x) = (\mathrm{p} - \beta_n)\mathfrak{D}(P_n)(x) + \mathfrak{M}(P_n)(x) - \gamma_n\mathfrak{D}(P_{n-1})(x).$$

De modo análogo voltando a considerar a relação de recorrência a três termos para $\{P_n\}$, (I.1). Aplicando o operador $\mathfrak{M}$ temos

$$\mathfrak{M}(P_{n+1})(x) = \mathfrak{M}(xP_n)(x) - \mathfrak{M}(\beta_n P_n)(x) - \mathfrak{M}(\gamma_n P_{n-1})(x)$$

utilizando as relações (I.30) e pelo cálculo operacional (I.27) temos

$$\mathfrak{M}(P_{n+1})(x) = (\mathrm{p} - \beta_n)\mathfrak{M}(P_n)(x) + \mathrm{q}\,\mathfrak{D}(P_n)(x) - \gamma_n\mathfrak{M}(P_{n-1})(x).$$

Os polinómios associados de primeira espécie satisfazem as mesmas relações quando consideremos as relações de recorrência a três (I.5)

$$\mathfrak{D}(P_n^{(1)})(x) = (\mathrm{p} - \beta_n)\mathfrak{D}(P_{n-1}^{(1)})(x) + \mathfrak{M}(P_{n-1}^{(1)})(x) - \gamma_n \mathfrak{D}(P_{n-2}^{(1)})(x),$$

$$\mathfrak{M}(P_n^{(1)})(x) = (\mathrm{p} - \beta_n)\mathfrak{M}(P_{n-1}^{(1)})(x) + \mathrm{q}\,\mathfrak{D}(P_{n-1}^{(1)})(x) - \gamma_n \mathfrak{M}(P_{n-2}^{(1)})(x).$$

Definiremos, em seguida a fórmula de Darboux-Christoffel para os polinómios ortogonais mónicos de variável discreta, $\{P_n\}$, começando por considerar a relação de recorrência a três termos de $\{P_n\}$ em $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$,

$$\eta_i(x)P_n(\eta_i(x)) = P_{n+1}(\eta_i(x)) + \beta_n P_n(\eta_i(x)) + \gamma_n P_{n-1}(\eta_i(x)) \qquad \text{(I.31)}$$

sendo $i = 1, 2$.

Teorema I.7. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos de variável discreta. As afirmações são equivalentes:*

(1) *a sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ satisfaz as relações de recorrência a três termos* (I.31)*,*

(2) *temos a fórmula de Darboux-Christoffel*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\eta_1(x))P_k(\eta_2(x))}{\gamma_1 \cdots \gamma_k} = \frac{P_n(\eta_2(x))P_{n+1}(\eta_1(x)) - P_n(\eta_1(x))P_{n+1}(\eta_2(x))}{(\gamma_1 \cdots \gamma_n)(\eta_2(x) - \eta_1(x))}, \qquad \text{(I.32)}$$

(3) *a fórmula de Darboux-Christoffel, também, tem a forma*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\eta_1(x))P_k(\eta_2(x))}{\gamma_1 \cdots \gamma_k} = \frac{\mathfrak{D}(P_n)\mathfrak{M}(P_{n+1}) - \mathfrak{D}(P_{n+1})(\mathfrak{M}(P_n)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n};$$

(4) *a fórmula de Liouville-Ostrogradski para $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$ é dada por*

$$P_n^{(1)}(\eta_i(x))P_n(\eta_i(x)) - P_{n+1}(\eta_i(x))P_{n-1}^{(1)}(\eta_i(x)) = \gamma_{n+1} \cdots \gamma_1, \quad i = 1, 2. \qquad \text{(I.33)}$$

Observação I.3. (1) Da fórmula de Christoffel-Darboux (I.32) concluímos que podemos trocar as posições de $\eta_1(x)$ com $\eta_2(x)$. Ao trocar as posições de

$\eta_1(x)$ e de $\eta_2(x)$ na fórmula de Darboux-Christtofel e com $\gamma_0 = 1$ obtemos as seguintes relações:

$$(\gamma_1 \cdots \gamma_n) \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\eta_1(x))P_k(\eta_2(x))}{\gamma_1 \cdots \gamma_k} = \frac{P_{n+1}(\eta_1(x)) - P_{n+1}(\eta_2(x))}{\eta_1(x) - \eta_2(x)} P_n(\eta_2(x)) + \frac{P_n(\eta_2(x)) - P_n(\eta_1(x))}{\eta_1(x) - \eta_2(x)} P_{n+1}(\eta_2(x))$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\eta_1(x))P_k(\eta_2(x))}{\gamma_1 \cdots \gamma_k} = \frac{\mathfrak{D}(P_{n+1})(x)P_n(\eta_2(x)) - \mathfrak{D}(P_n)(x)P_{n+1}(\eta_2(x))}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}.$$

De modo análogo temos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(\eta_1(x))P_k(\eta_2(x))}{\gamma_1 \cdots \gamma_k} = \frac{\mathfrak{D}(P_{n+1})(x)P_n(\eta_1(x)) - \mathfrak{D}(P_n)(x)P_{n+1}(\eta_1(x))}{\gamma_1 \cdots \gamma_n}.$$

(2) Consideremos a relação de recorrência a três termos de $\{P_n\}$ em η_1 (I.31) e a relação de recorrência a três termos de $\{P_n^{(1)}\}$ dada por

$$\eta_1(x)P_{n-1}^{(1)}(\eta_1(x)) = P_n^{(1)}(\eta_1(x)) + \beta_{n+1}P_{n-1}^{(1)}(\eta_1(x)) + \gamma_{n+1}P_{n-2}^{(1)}(\eta_1(x)).$$

Multiplicando a equação anterior por $P_n(\eta_1(x))$, a equação (I.31) por $P_{n-1}^{(1)}(\eta_1(x))$ e subtraindo as equações resultantes temos

$$P_n(\eta_1(x))P_n^{(1)}(\eta_1(x)) - P_{n-1}^{(1)}(\eta_1(x))P_{n+1}(\eta_1(x)) = \gamma_{n+1}(P_{n-1}^{(1)}(\eta_1(x))P_{n-1}(\eta_1(x)) - P_{n-2}^{(1)}(\eta_1(x))P_n(\eta_1(x))).$$

Iterando este processo obtemos a fórmula de Liouville-Ostrogradski (I.33), para $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$. Resulta, assim, que $P_{n+1}(\eta_1(x))$ e $P_n(\eta_2(x))$ não têm zeros em comum.

6. Famílias de polinómios ortogonais na recta - Caso Discreto

Consideremos a funcional linear regular u, S a respectiva função de Stieltjes e as sucessões de polinómios ortogonais mónicos de variável discreta $\{P_n\}$, respectivos polinómios associados de primeira espécie $\{P_n^{(1)}\}$ e funções de segunda espécie $\{q_n\}$.

Definição I.9. Seja u uma funcional linear regular, S a função de Stieltjes associada a u e $\{P_n\}$ sucessão de polinómios ortogonais mónicos tais que S satisfaz uma equação em diferenças de Riccati

$$A(x)\mathfrak{D}(S)(x) = B(x)S(\eta_1(x))S(\eta_2(x)) + C(x)\mathfrak{M}(S)(x) + D(x) \tag{I.34}$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$. Então $\{P_n\}$ é uma *sucessão de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn de variável discreta.*

Estas famílias de polinómios $P_n(x)$, $n \geq 0$, satisfazem relações de estrutura da forma

$$A(x)P'_{n+1}(x) - B(x)P_n^{(1)}(x) = \sum_{k=n-s}^{n+d} \theta_{n,k}P_k(x), \quad n \geq s+1,$$

onde $A(x)$ e $B(x)$ são os mesmos polinómios definidos na equação (I.34) com $t = \operatorname{gr} A(x)$, $p = \operatorname{gr} \psi \geq 1$, $r = \operatorname{gr} B(x)$, $s = \max\{p-1, d-2\}$ e $d = \max\{t, r\}$ (ver [**23, 56**]).

Os *polinómios ortogonais semi-clássicos definidos em redes não uniformes* podem definir-se através de equações em $\mathfrak{D}$ diferenças quando $B \equiv 0$ como fez Magnus em [**45**] da forma seguinte

$$A(x)\mathfrak{D}(S)(x) = C(x)\mathfrak{M}(S)(x) + D(x)$$

para a função de Stieltjes S onde $A, C, D \in \mathbb{P}$.

Esta definição cobre os polinómios q-Racah e os polinómios Askey-Wilson e os seus casos limites e casos especiais. Assim como os polinómios ortogonais clássicos-Jacobi, Laguerre e Hermite e também os polinómios ortogonais clássicos de variável discreta: Hahn-$H_n^{\alpha,\beta}(s,N)$, Meixner-$M_n^{\gamma,\mu}(s)$, Charlier-$C_n^{\mu}(s)$ e Krawchuk-$K_n^{p}(s)$ e os polinomios de variável q-discreta ("Big"-q-Jacobi,...).

CAPÍTULO II

Equação diferencial de segunda ordem

Neste capítulo caracterizaremos as famílias de polinómios ortogonais Laguerre -Hahn na recta real. Temos como ponto de partida a equação diferencial de Riccati

$$AS'(x) = BS^2(x) + CS(x) + D$$

tal como fez Magnus, em [**42**], para sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicos. Será adaptado, para o caso da recta, o método desenvolvido para a circunferência por Branquinho e Rebocho em [**9, 10, 57**].

Na secção um começamos por considerar as relações de estrutura de primeira ordem para os polinómios ortogonais Laguerre-Hahn estudadas por Dini e Maroni [**23**]. Partindo da equação diferencial de Riccati reescrevemos as relações de estrutura, para sucessões de polinómios Laguerre-Hahn, na forma vectorial obtendo a equação

$$A\psi_n' = M_n\psi_n + N_n\psi_{n-1}$$

onde o vector $\psi_n = [P_{n+1}\ P_n]^T$ e M_n, N_n são matrizes de ordem dois com entradas polinomiais. Obtemos, também, uma equação de primeira ordem para as sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ dada por

$$Aq_{n+1}' = \Theta_{n+1}^1 q_n + (-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS)q_{n+1}.$$

Mostraremos que existe uma equivalência entre estas três relações e obtendo deste modo uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn.

Esta caracterização é um resultado central no nosso trabalho, pois será a partir dela que no capítulo III obteremos uma representação para as respectivas sucessões de polinómios ortogonais através de equações do tipo Sylvester.

A secção dois foi motivada pelos trabalhos de Hahn [**32, 33, 34**] onde foi obtida uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais reais através de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes polinomiais. Em [**32**], Hahn estabeleceu que a ordem mínima de uma equação diferencial linear para uma sucessão de polinómios ortogonais definidos sobre a recta real, $\{P_n\}$ é dois ou quatro. Mais, mostrou que as soluções das equação diferenciais de ordem quatro são construídas através das soluções de equações diferenciais de segunda ordem.

Considerando a representação da secção um para as sucessões vectoriais $\{\psi_n\}$ e sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$, mostramos que as equações diferenciais que surgem para o caso Laguerre-Hahn, sobre a recta real, são equações diferenciais vectoriais de segunda ordem , com coeficientes matriciais. Para as sucessões vectoriais $\{\psi_n\}$ obteremos uma equivalência entre a equação diferencial de Riccati $AS'(x) = BS^2(x) + CS(x) + D$ com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$ e as equações diferenciais vectoriais de segunda ordem

$$\tilde{\mathcal{A}}_n\psi_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_n\psi_n' + \tilde{\mathcal{C}}_n\psi_n = 0_{2\times 1}$$

onde os coeficientes $\tilde{\mathcal{A}}_n, \tilde{\mathcal{B}}_n$ e $\tilde{\mathcal{C}}_n$ são matrizes de ordem dois com entradas polinomiais. A demonstração de que a condição é suficiente será efectuada através de vários lemas. Começaremos por mostrar que partindo da equação diferencial vectorial de segunda ordem chegamos a uma equação de primeira ordem do tipo Sylvester. Depois, mostraremos que esta equação mantém a estrutura das relações iniciais e daqui chegamos à equação de Riccati.

Para as sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ obtemos a equação diferencial de segunda ordem

$$\widehat{A}_n q_{n+1}'' + \widehat{B}_n q_{n+1}' + \widehat{C}_n q_{n+1} = 0.$$

com coeficientes não polinomiais pois dependem de S. Demonstraremos a equivalência entre esta equação e a equação diferencial de Riccati através do Lema de Magnus.

Deste modo, obtemos duas novas caracterizações para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn.

No final, aplicaremos este método às sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn de classe zero. Partindo da equação vectorial de segunda ordem com coeficientes matriciais definiremos um operador de segunda ordem que caracteriza as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn. Este operador de segunda ordem coincide com o operador encontrado por Branquinho em [**6**] e as famílias de polinómios ortogonais aí encontradas são Laguerre-Hahn. Deste modo temos explicitadas as medidas de ortogonalidade e os coeficientes da relação de recorrência a três termos para estas famílias de polinómios.

1. Fórmula de estrutura de primeiro grau

Consideremos a funcional linear regular u, S a respectiva função de Stieltjes que satisfaz uma equação diferencial de Riccati

$$AS'(x) = BS^2(x) + CS(x) + D \tag{II.1}$$

com $A \neq 0$, $A, B, C, D \in \mathbb{P}$ de graus limitados e $C^2 - 4BD \neq 0$. Consideremos, também, as sucessões de polinómios ortogonais $\{P_n\}$, polinómios associados de primeira espécie $\{P_n^{(1)}\}$, funções de segunda espécie $\{q_n\}$ e a sucessão de vectores $\{\psi_n\}$ onde $\psi_n = [P_{n+1}\ P_n^{(1)}]^T$.

Uma das formas de caracterização das sucessões de polinómios Laguerre-Hahn é através da relações de estrutura de primeira ordem. Estas relações foram obtidas em [**23, 24, 41**] por Dini, Maroni e Magnus.

No próximo Teorema reescrevemos estas relações de estrutura usando a forma matricial e considerando a sucessão de vectores $\{\psi_n\}$. Mostraremos, também, uma nova caracterização, para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn em termos das funções de segunda espécie. Estas caracterizações são equivalentes.

Teorema II.1. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes, $\{\psi_n\}$ sucessão de vectores associados a u. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *S é Laguerre-Hahn e satisfaz a equação diferencial de Riccati com coeficientes polinomiais* (II.1)*;*

(2) *a sucessão de vectores $\{\psi_n\}$ satisfaz, para $n \in \mathbb{N}$,*

$$A\psi_n' = M_n\psi_n + N_n\psi_{n-1} \tag{II.2}$$

onde M_n, N_n são matrizes de elementos polinomiais de graus limitados, dadas por $M_n = \begin{bmatrix} -l_{n+1} - \frac{C}{2} & -B \\ D & \frac{C}{2} - l_{n+1} \end{bmatrix}$, $N_n = \Theta_{n+1}^1 I_{2\times 2}$, e onde Θ_{n+1}^1 e l_n são polinómios de graus uniformemente limitados por uma constante;

(3) *a sucessão de funções de segunda espécie, $\{q_n\}$, satisfaz a equação diferencial de primeira ordem, para $n \in \mathbb{N}$*

$$Aq_{n+1}' = \Theta_{n+1}^1 q_n + (-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS)q_{n+1}. \tag{II.3}$$

Além disso, temos as relções seguintes para l_n e Θ_n^1:

$$\begin{aligned} l_{n+2} + l_{n+1} &= \frac{\Theta_{n+1}^1(x - \beta_{n+1})}{\gamma_{n+1}} && \text{(II.4)} \\ \Theta_{n+2} &= A + \frac{\Theta_n^1\gamma_{n+1}}{\gamma_n} + (x - \beta_{n+1})(l_{n+2} - l_{n+1}). && \text{(II.5)} \end{aligned}$$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2)

Ainda que este resultado seja conhecido, pois foi provado, em [**23**], por Dini e Maroni, vamos apresentar uma demonstração baseada no método utilizado por Magnus em [**42**].

Começamos por utilizar a relação de Hermite-Padé (I.8) e a equação diferencial de primeira ordem do tipo Riccati (II.1). Resulta

$$A\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}+\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)' = B\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}+\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)^2 + C\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}+\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)+D$$

$$\Leftrightarrow A\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)' - B\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)\left(\frac{q_{n+1}(x)+2P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right) - C\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}\right) = -A\left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1(x)}}\right)' + B\left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)^2 + C\left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)+D.$$

Tomando

$$\Theta_{n+1} = \left\{A\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)' - B\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)\left(\frac{q_{n+1}(x)+2P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right) - C\left(\frac{q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)\right\}P_{n+1}^2(x),$$

ou seja,

$$\Theta_{n+1}(x) = A\left(q'_{n+1}(x)P_{n+1}(x) - q_{n+1}(x)P'_{n+1}(x)\right) - Bq_{n+1}^2(x) - 2Bq_{n+1}(x)P_n^{(1)}(x) - Cq_{n+1}(x)P_{n+1}(x).$$

Fazendo a análise assintótica de q_n e pela expansão da equação anterior tem-se que Θ_{n+1} é um polinómio de grau independente de n e limitado por uma constante dada por

$$\mathrm{gr}(\Theta_{n+1}) = \max\{\mathrm{gr}(A)-2, \mathrm{gr}(B)-2, \mathrm{gr}(C)-1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A equação anterior pode escrever-se da seguinte forma

$$\left\{-A\left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1(x)}}\right)' + B\left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)^2 + C\left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{P_{n+1}(x)}\right)+D\right\}P_{n+1}^2(x) = \Theta_{n+1}(x)$$

onde

$$\Theta_{n+1}(x) = -A(P_n^{(1)})'(x)P_{n+1}(x) + AP_n^{(1)}(x)P'_{n+1}(x) + B(P_n^{(1)})^2(x) + CP_n^{(1)}(x)P_{n+1}(x) + DP_{n+1}^2(x) \quad \text{(II.6)}$$

Substituindo a equação de Liouville-Ostrogradski (I.3) em (II.6) vem

$$\Theta_{n+1}(x)\frac{P_n(x)P_n^{(1)}(x) - P_{n+1}(x)P_{n-1}^{(1)}(x)}{\gamma_n\cdots\gamma_1} = -A(x)(P_n^{(1)})'(x)P_{n+1}(x) + A(x)P_n^{(1)}(x)P'_{n+1}(x) + B(x)(P_n^{(1)})^2(x) + C(x)P_n^{(1)}(x)P_{n+1}(x) + D(x)P_{n+1}^2(x)$$

$$\left\{A(x)P'_{n+1}(x) + B(x)P_n^{(1)}(x) + \frac{C(x)}{2}P_{n+1}(x) - \frac{\Theta_{n+1}(x)}{\gamma_1\cdots\gamma_n}P_n(x)\right\}P_n^{(1)} = P_{n+1}(x)\left\{A(x)(P_n^{(1)})'(x) - \frac{C(x)}{2}P_n^{(1)}(x) - D(x)P_{n+1}(x) - \frac{\Theta_{n+1}(x)}{\gamma_1\cdots\gamma_n}P_{n-1}^{(1)}(x)\right\}.$$

Fazendo $\Theta_{n+1}^1(x) = \frac{\Theta_{n+1}(x)}{\gamma_1\cdots\gamma_n}$, onde $P_{n+1}(x) \neq 0$ e $P_n^{(1)}(x) \neq 0$. Como os polinómios $P_{n+1}(x)$ e $P_n^{(1)}(x)$ não têm zeros em comum então existe um polinómio l_{n+1} tal que

$$(-AP'_{n+1}(x) + \Theta_{n+1}^1(x)P_n(x) - B(x)P_n^{(1)}(x) - \frac{C(x)}{2}P_{n+1}(x))P_n^{(1)}(x) = (-A(P_n^{(1)})'(x) + \frac{C(x)}{2}P_n^{(1)}(x) + D(x)P_{n+1}(x) + \Theta_{n+1}^1(x)P_{n-1}^1(x))P_{n+1}(x)$$

que deve ter a forma $l_{n+1}P_n^{(1)}P_{n+1}$ onde

$$\mathrm{gr}(l_{n+1}) = \max\{\mathrm{gr}(A), \mathrm{gr}(B), \mathrm{gr}(C), \mathrm{gr}(D)\}.$$

Portanto

$$\begin{cases} -A(x)P'_{n+1}(x) + \Theta_{n+1}^1(x)P_n(x) - \frac{C(x)}{2}P_{n+1}(x) - B(x)P_n^{(1)}(x) \\ \qquad = l_{n+1}(x)P_{n+1}(x) \\ -A(x)(P_n^{(1)})'(x) + \Theta_{n+1}^1(x)P_{n-1}^{(1)}(x) + \frac{C(x)}{2}P_n^{(1)}(x) + D(x)P_{n+1}(x) \\ \qquad = l_{n+1}(x)P_n^{(1)}(x) \end{cases} \quad \text{(II.7)}$$

resultando assim as relações de estrutura de primeira ordem que matricialmente tem a seguinte forma:

$$A(x)\begin{bmatrix} P_{n+1}(x) \\ P_n^{(1)}(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -l_{n+1}(x) - \frac{C(x)}{2} & -B(x) \\ D(x) & \frac{C(x)}{2} - l_{n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+1}(x) \\ P_n^{(1)}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1(x) & 0 \\ 0 & \Theta_{n+1}^1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n(x) \\ P_{n-1}^{(1)}(x) \end{bmatrix}$$

e que representa a equação (II.2).

(2) $\Rightarrow$ (3)

Para encontrar a equação (II.3) começamos por derivar a equação de Hermite--Padé $q_{n+1}(x) = P_{n+1}(x)S(x) - P_n^{(1)}(x)$, i.e.

$$q_{n+1}'(x) = P_{n+1}'(x)S(x) + P_{n+1}(x)S'(x) - (P_n^{(1)})'(x)$$

multiplicando esta equação por A vem

$$A(x)q_{n+1}'(x) = A(x)P_{n+1}'(x)S(x) + A(x)P_{n+1}(x)S'(x) - A(x)(P_n^{(1)})'(x)$$

utilizando as relações (II.7) resulta

$$\begin{aligned} A(x)q_{n+1}'(x) = \Theta_{n+1}^1(x)P_n(x)S(x) - \left(l_{n+1} + \frac{C(x)}{2}\right) P_{n+1}(x)S(x) \\ - B(x)P_n^{(1)}(x)S(x) + A(x)P_{n+1}(x)S'(x) - \Theta_{n+1}^1(x)P_{n-1}^{(1)}(x) \\ + \left(l_{n+1}(x) - \frac{C(x)}{2}\right) P_n^{(1)}(x) - D(x)P_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Considerando a equação diferencial de Riccati (II.1) vem

$$\begin{aligned} A(x)q_{n+1}'(x) = \Theta_{n+1}^1(x)\left(P_n(x)S(x) - P_{n-1}^{(1)}(x)\right) \\ + \left(\frac{C(x)}{2} - l_{n+1}(x) + B(x)S(x)\right)(P_{n+1}(x)S(x) - P_n^{(1)}(x)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$A(x)q_{n+1}'(x) = \Theta_{n+1}^1(x)q_n(x) + \left(-l_{n+1}(x) + \frac{C(x)}{2} + B(x)S(x)\right) q_{n+1}(x).$$

(3) $\Rightarrow$ (1)

Consideremos a equação

$$A(x)q_n'(x) = \Theta_n^1(x)q_{n-1}(x) + \left(-l_n(x) + \frac{C(x)}{2} + B(x)S(x)\right) q_n(x).$$

Tomando $n = 0$ vem

$$A(x)q_0'(x) = \Theta_0^1(x)q_{-1}(x) + \left(-l_0(x) + \frac{C(x)}{2} + B(x)S(x)\right) q_0.$$

Pelas condições iniciais temos

$$\Theta_0^1 = D, \quad l_0(x) = -\frac{C(x)}{2}, \quad \gamma_0 = 1,$$

ou seja,

$$A(x)q_0'(x) = D(x)q_{-1}(x) + \left(C(x) + B(x)S(x)\right) q_0(x).$$

Como por definição $q_0(x) = S(x)$ e $q_{-1} = 1$ obtemos a equação diferencial de Riccati (II.1).As relações (II.4) e (II.5) obtêm-se quando multiplicamos a equação (II.3) por q_n

$$Aq_{n+1}'q_n = \Theta_{n+1}^1 q_n^2 + (-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS)q_{n+1}q_n.$$

e a equação (II.3), em n por q_{n+1}

$$Aq_n'q_{n+1} = \Theta_n^1 q_{n-1}q_{n+1} + (-l_n + \frac{C}{2} + BS)q_n q_{n+1}.$$

Subtraindo estas duas equações vem

$$\begin{aligned} A(q_{n+1}'q_n - q_n'q_{n+1}) = \Theta_{n+1}^1 q_n^2 + (-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS)q_{n+1}q_n& \\ - \Theta_n^1 q_{n-1}q_{n+1} - (-l_n + \frac{C}{2} + BS)q_n q_{n+1}&. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por q_n^2 vem

$$\begin{aligned} A\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)' = \Theta_{n+1}^1 + (-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS)\frac{q_{n+1}}{q_n}& \\ - \Theta_n^1 \frac{q_{n-1}q_{n+1}}{q_n^2} - (-l_n + \frac{C}{2} + BS)\frac{q_{n+1}}{q_n}&. \end{aligned}$$

Pela relação de recorrência a três termos obtemos

$$A\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)' = \Theta^1_{n+1} + \left(l_n - l_{n+1}\frac{\Theta^1_n(x-\beta_n)}{\gamma_n}\right)\frac{q_{n+1}}{q_n} + \frac{\Theta^1_n}{\gamma_n}\frac{q^2_{n+1}}{q^2_n}.$$

Fazendo $\frac{q_{n+1}}{q_n} = g_n$ temos

$$Ag'_n = \frac{\Theta^1_n}{\gamma_n}g^2_n + \left(l_n - l_{n+1}\frac{\Theta^1_n(x-\beta_n)}{\gamma_n}\right)g_n + \Theta^1_{n+1}.$$

Pela Teorema I.6 obtemos as relações (II.4) e (II.5). ■

Como consequência do Teorema II.1 obtemos para as sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicos o corolário seguinte:

Corolário II.1. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes, $\{\psi_n\}$ sucessão de vectores associados a u. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *S satisfaz a equação diferencial de primeira ordem com coeficientes polinomiais $AS' = CS + D$;*

(2) *a sucessão de vectores $\{\psi_n\}$ satisfaz, para $n \in \mathbb{N}$,*

$$A\psi'_n = M_n\psi_n + N_n\psi_{n-1}$$

onde M_n, N_n são matrizes de elementos polinomiais de graus limitados, dadas por $M_n = \begin{bmatrix} -l_{n+1} - \frac{C}{2} & 0 \\ D & \frac{C}{2} - l_{n+1} \end{bmatrix}$, $N_n = \Theta^1_{n+1}I_{2\times 2}$, e onde Θ^1_{n+1} e l_n são polinómios que não dependem de n;

(3) *a sucessão de funções de segunda espécie, $\{q_n\}$, verifica a equação diferencial de primeira ordem, para $n \in \mathbb{N}$*

$$Aq'_{n+1} = \Theta^1_{n+1}q_n + \left(-l_{n+1} + \frac{C}{2}\right)q_{n+1}.$$

A demonstração deste corolário é análoga à efectuada para o Teorema II.1. Basta considerar $B = 0$.

Observação II.1. A condição (2) $\Rightarrow$ (1) do Teorema II.1 podia ter sido provada da seguinte forma: considerando as relações de estrutura de primeira ordem (II.7) e multiplicando a primeira equação por $\frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}^2}$ e a segunda equação por $\frac{1}{P_{n+1}}$. Depois subtraíndo as equações resultantes temos

$$A\left[\frac{(P_n^{(1)})'P_{n+1}-P'_{n+1}P_n^{(1)}}{P_{n+1}^2}\right]=D+C\frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}+B\left(\frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}\right)^2$$
$$-\Theta_{n+1}^1\left(\frac{P_n^{(1)}P_n-P_{n-1}^{(1)}P_{n+1}}{P_{n+1}^2}\right),$$

ou seja,

$$A\left(\frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}\right)'=D+C\frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}+B\left(\frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}\right)^2+\frac{\Theta_{n+1}^1(\gamma_1\ldots\gamma_n)}{P_{n+1}^2}. \tag{II.8}$$

Tomando o limite da equação (II.8) e tendo em consideração o Teorema de Markov obtemos a equação diferencial de Riccati (II.1).

2. Equação diferencial vectorial de segunda ordem

Nesta secção mostraremos que partindo das relações de estrutura de primeira ordem (II.7) conseguimos obter uma equação diferencial vectorial de segunda ordem com coeficientes matriciais para a sucessão de vectores $\{\psi_n\}$.

Teorema II.2. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes, $\{\psi_n\}$ sucessão de vectores associados a u. Se S é Laguerre-Hahn e satisfaz a equação diferencial de Riccati com coeficientes polinomiais* (II.1). *Então para $n\in\mathbb{N}$, $\{\psi_n\}$ satisfaz a equação diferencial linear de segunda ordem*

$$\tilde{\mathcal{A}}_n\psi_n''+\tilde{\mathcal{B}}_n\psi_n'+\tilde{\mathcal{C}}_n\psi_n=0_{2\times1} \tag{II.9}$$

onde os coeficientes estão definidos por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_n=&\ A^2\Theta_{n+1}^1I_2\\ \widetilde{\mathcal{B}}_n=&\ A(A'I-M_n)\Theta_{n+1}^1-[\Theta_{n+1}^1(M_{n-1}+\tfrac{(x-\beta_n)\Theta_n^1}{\gamma_n}I_2)+A(\Theta_{n+1}^1)'I_2]\\ \tilde{\mathcal{C}}_n=&\ \left(\tfrac{\Theta_{n+1}^1\Theta_n^1}{\gamma_n}-AM_n'\right)\Theta_{n+1}^1\\ &+\left[\Theta_{n+1}^1\left(M_{n-1}+\tfrac{(x-\beta_n)\Theta_n^1}{\gamma_n}\right)+A(\Theta_{n+1}^1)'I_2\right]M_n\,.\end{aligned} \tag{II.10}$$

onde M_n e N_n são as matrizes de ordem 2 obtidas no Teorema II.1.

Demonstração: Derivando (II.2) e multiplicando por A obtemos

$$A^2\psi_n'' = A(M_n - A'I_2)\psi_n' + \Theta_{n+1}^1 A\psi_{n-1}' + M_n' A\psi_n + (\Theta_{n+1}^1)' A\psi_{n-1}.$$

Para eliminar ψ_{n-1} utilizamos a relação (II.2) e a relação de recorrência a três termos (I.16) obtendo

$$A\psi_{n-1}' = \left(M_{n-1} + \Theta_n^1 \frac{x-\beta_n}{\gamma_n}\right)\psi_{n-1} - \frac{\Theta_n^1}{\gamma_n}\psi_n$$

substituindo vem

$$A^2\psi_n'' + \left(\frac{\Theta_{n+1}^1\Theta_n^1}{\gamma_n} - AM_n'\right)\psi_n - A(M_n - A'I_2)\psi_n' =$$
$$\left(\Theta_{n+1}^1 M_{n-1} + \Theta_{n+1}^1\Theta_n^1\frac{x-\beta_n}{\gamma_n} + A(\Theta_{n+1}^1)'\right)\psi_{n-1}.$$

Multiplicando ambos os membros por Θ_{n+1}^1 e por (II.2) resulta

$$A^2\Theta_{n+1}^1\psi_n'' + A\left[\Theta_{n+1}^1(A'I_2 - M_n) - A(\Theta n + 1^1)' - \Theta_{n+1}^1(M_{n-1} + \frac{x-\beta_n}{\gamma_n}\Theta_n^1 I_2)\right]\psi_n'$$
$$+\left[\Theta_{n+1}^1\left(\frac{\Theta_{n+1}^1\Theta_n^1}{\gamma_n} - AM_n'\right) - \left(A(\Theta_{n+1}^1)' + \Theta_{n+1}^1\left(M_{n-1} + \frac{x-\beta_n}{\gamma_n}\Theta_n^1\right)M_n\right)\right]\psi_n$$
$$= 0_{2\times 1}$$

ou seja, $\tilde{\mathcal{A}}_n\psi_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_n\psi_n' + \tilde{\mathcal{C}}_n\psi_n = 0_{2\times 1}$ com coeficientes (II.10). ∎

Derivando a equação (II.9) conseguimos obter equações diferenciais de quarta ordem que são satisfeitas pelas sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn e que vai de encontro com os resultados obtidos por Hahn em [**32**].

As sucessões de funções de segunda espécie também verificam equações vectoriais de segunda ordem com coeficiente não polinomiais como mostraremos de seguida:

Teorema II.3. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes, $\{q_n\}$ sucessão de funções de segunda espécie. A função de Stieltjes S é Laguerre-Hahn e satisfaz a equação diferencial de Riccati com coeficientes polinomiais* (II.1) *para, $n \in \mathbb{N}$, se e somente se $\{q_n\}$ satisfaz a equação diferencial linear de* *segunda ordem*

$$\widehat{\mathcal{A}}_n q''_{n+1} + \widehat{\mathcal{B}}_n q'_{n+1} + \widehat{\mathcal{C}}_n q_{n+1} = 0 \tag{II.11}$$

com coeficientes

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{A}}_n &= A^2 \Theta^1_{n+1} \\
\widehat{\mathcal{B}}_n &= AA'\Theta^1_{n+1} - A^2(\Theta^1_{n+1})' - 2A\Theta^1_{n+1}(C/2 + BS) \\
\widehat{\mathcal{C}}_n &= A(\Theta^1_{n+1})' + \Theta^1_{n+1}\,(C/2 + l_{n+1} + BS)\,(C/2 - l_{n+1} + BS)' \\
&\quad - A\Theta^1_{n+1}\,(C/2 - l_{n+1} + BS)' + \frac{\Theta^1_n(\Theta^1_{n+1})^2}{\gamma_n}
\end{aligned} \tag{II.12}$$

Demonstração: Como, por hipótese, $AS' = BS^2 + CS + D$ então pelo Teorema II.1 temos que $\{q_{n+1}\}$ satisfaz a equação

$$Aq'_{n+1} = \Theta^1_{n+1} q_n + \left(\frac{C}{2} - l_{n+1} + BS\right) q_{n+1}.$$

Derivando esta equação obtemos

$$\begin{aligned}
A'q'_{n+1} + Aq''_{n+1} &= \left(\frac{C}{2} - l_{n+1} + BS\right)' q_{n+1} \\
&\quad + \left(-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS\right) q'_{n+1} + (\Theta^1_{n+1})' q_n + \Theta^1_{n+1} q'_n\,.
\end{aligned}$$

Multiplicando por A e utilizando a relação

$$q'_n = \Theta^1_n q_{n-1} + (-l_n + \frac{C}{2} + BS) q_n$$

temos

$$\begin{aligned}
A'Aq'_{n+1} + A^2 q''_{n+1} &= \Theta^1_{n+1}\Theta^1_n q_{n-1} + \left(A(\Theta^1_{n+1})' + \Theta^1_{n+1}\left(\frac{C}{2} - l_n + BS\right)\right) q_n \\
&\quad + A\left(-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS\right)' q_{n+1} + A\left(-l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS\right) q'_{n+1}.
\end{aligned}$$

Para eliminar q_{n-1} utilizamos a relação de recorrência a três termos e obtemos a equação:

$$\begin{aligned}A'Aq'_{n+1}+A^2q''_{n+1}=&\frac{\Theta^1_{n+1}\Theta^1_n(x-\beta_n)}{\gamma_n}q_n\\&-\frac{\Theta^1_{n+1}\Theta^1_n}{\gamma_n}q_{n+1}+\left(A(\Theta^1_{n+1})'+\Theta^1_{n+1}\left(\frac{C}{2}-l_n+BS\right)\right)q_n\\&+A\left(-l_{n+1}+\frac{C}{2}+BS\right)'q_{n+1}+A\left(-l_{n+1}+\frac{C}{2}+BS\right)q'_{n+1}.\end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros por Θ^1_{n+1} utilizando as relações (II.3) e (II.4) obtemos a equação diferencial de segunda ordem (II.11) com coeficientes (II.12).

Para mostrar o recíproco começamos por considerar a relação de recorrência a três termos (I.7):

$$q_{n+1}-(x-\beta_n)q_n+\gamma_nq_{n-1}=0,$$

derivando temos

$$q'_{n+1}-(x-\beta_n)q'_n+\gamma_nq'_{n-1}=q_n, \tag{II.13}$$

derivando novamente vem

$$q''_{n+1}-(x-\beta_n)q''_n+\gamma_nq''_{n-1}=2q'_n. \tag{II.14}$$

Consideremos, agora, a equação diferencial de segunda ordem (II.11)

$$\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}q''_{n+1}+\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}q'_{n+1}+\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}q_{n+1}=0$$

multiplicando ambos os membros desta equação por A_{n-1} e por (II.14),(II.13) e (I.7) resulta

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}(2q'_n+(x-\beta_n)q''_n-\gamma_nq''_{n-1})+\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}(q_n+(x-\beta_n)q'_n-\gamma_nq'_{n-1})&\\+\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}((x-\beta_n)q_n-\gamma_nq_{n-1})=0&\end{aligned}$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}(x-\beta_n)q_n'' + (2\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{A}}_{n+1} + \widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}(x-\beta_n))q_n'$$
$$+ (\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1} + \widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}(x-\beta_n))q_n = (-\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{B}}_{n-1}\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{B}}_{n+1})\gamma_n q_{n-1}'$$
$$+ (-\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{C}}_{n-1} + \widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{C}}_{n+1})\gamma_n q_{n-1}.$$

Multiplicando esta equação por $\widehat{\mathcal{A}}_n$ e a equação diferencial de segunda ordem (II.11), por $(x-\beta_n)\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}$ temos

$$\{\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}(2\widehat{\mathcal{A}}_{n+1} + \widehat{\mathcal{B}}_{n+1}(x-\beta_n)) - (x-\beta_n)\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{B}}_n\}q_n'$$
$$+ \{\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}(\widehat{\mathcal{B}}_{n+1} + \widehat{\mathcal{C}}_{n+1}(x-\beta_n)) - (x-\beta_n)\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1}\widehat{\mathcal{C}}_n\}q_n$$
$$= (\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1} - \widehat{\mathcal{B}}_{n-1}\widehat{\mathcal{A}}_{n+1})\gamma_n q_{n-1}' + (\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_{n-1} - \widehat{\mathcal{C}}_{n-1}\widehat{\mathcal{A}}_{n+1})\gamma_n q_{n-1} \quad \text{(II.15)}$$

Escrevendo esta equação para $n+1$ temos

$$\{\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_n(2\widehat{\mathcal{A}}_{n+2} + \widehat{\mathcal{B}}_{n+2}(x-\beta_{n+1})) - (x-\beta_{n+1})\widehat{\mathcal{A}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}\}q_{n+1}'$$
$$+ \{\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_n(\widehat{\mathcal{B}}_{n+2} + \widehat{\mathcal{C}}_{n+2}(x-\beta_{n+1})) - (x-\beta_{n+1})\widehat{\mathcal{A}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}\}q_{n+1}$$
$$= (\widehat{\mathcal{B}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n - \widehat{\mathcal{B}}_n\widehat{\mathcal{A}}_{n+2})\gamma_{n+1}q_n' + (\widehat{\mathcal{C}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n - \widehat{\mathcal{C}}_n\widehat{\mathcal{A}}_{n+2})\gamma_{n+1}q_n$$

pelas equações (I.7) e (II.13) obtemos

$$\{\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_n(2\widehat{\mathcal{A}}_{n+2} + \widehat{\mathcal{B}}_{n+2}(x-\beta_{n+1})) - (x-\beta_{n+1})\widehat{\mathcal{A}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}\}q_n$$
$$+ \{\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_n(2\widehat{\mathcal{A}}_{n+2} + \widehat{\mathcal{B}}_{n+2}(x-\beta_{n+1})) - (x-\beta_{n+1})\widehat{\mathcal{A}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}\}(x-\beta_n)q_n'$$
$$- \{\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_n(2\widehat{\mathcal{A}}_{n+2} + \widehat{\mathcal{B}}_{n+2}(x-\beta_{n+1})) - \widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{A}}_{n+2}\widehat{\mathcal{B}}_{n+1}\}\gamma_n q_{n-1}'$$
$$+ \{\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_n(\widehat{\mathcal{B}}_{n+2} + \widehat{\mathcal{C}}_n(x-\beta_{n+1})) - \widehat{\mathcal{A}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}(x-\beta_{n+1})\}(x-\beta_n)q_n$$
$$- \{\widehat{\mathcal{A}}_{n+1}\widehat{\mathcal{A}}_n(\widehat{\mathcal{B}}_{n+2} + \widehat{\mathcal{C}}_n(x-\beta_{n+1})) - \widehat{\mathcal{A}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n\widehat{\mathcal{C}}_{n+1}(x-\beta_{n+1})\}\gamma_n q_{n-1}$$
$$= (\widehat{\mathcal{B}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n - \widehat{\mathcal{B}}_n\widehat{\mathcal{A}}_{n+2})\gamma_{n+1}q_n' + (\widehat{\mathcal{C}}_{n+2}\widehat{\mathcal{A}}_n - \widehat{\mathcal{C}}_n\widehat{\mathcal{A}}_{n+2})\gamma_{n+1}q_n \quad \text{(II.16)}$$

Escrevendo matricialmente as equações (II.15) e (II.16) obtemos, então, uma equação diferencial vectorial de primeira ordem com coeficientes matriciais

$$\widehat{\mathcal{L}}_n Q_n' = \widehat{\mathcal{M}}_n Q_n$$

Multiplicando ambos os membros desta equação pela matriz adjunta de $\mathcal{L}_n$ obtemos a equação

$$\det(\widehat{\mathcal{L}}_n)Q_n' = \widehat{\mathcal{M}}_n^1 Q_n.$$

Pelo Teorema de Magnus I.6 verifica-se que $\det(\widehat{\mathcal{L}}_n)$ é um polinómio que não depende de n. Utilizando o Teorema I.6 obtemos (II.1). ■

Concluímos, deste modo, que a sucessão $\{q_{n+1}\}$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem. Pelo Teorema de Favard temos que esta equação diferencial é uma equação diferencial de Painlevé.

3. Método tipo Hahn

Esta secção tem como objectivo mostrar o recíproco do Teorema II.2. Ou seja, podemos caracterizar as famílias de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn tendo como ponto de partida a equação diferencial vectorial de segunda ordem (II.9) e chegar à equação de Riccati. Nesta demonstração irá ser adaptado o método desenvolvido por Rebocho em [**57**] para a circunferência unitária e consistirá dos Lemas seguintes:

Lema II.1. *Sejam u, funcional linear regular, $\{\psi_n\}$ sucessão de vectores associados a u. Se $\{\psi_n\}$ verificar a equação diferencial de segunda ordem* (II.9)

$$\tilde{\mathcal{A}}_n\psi_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_n\psi_n' + \tilde{\mathcal{C}}_n\psi_n = 0_{2\times 1}$$

com coeficientes (II.10) *então obtém-se a equação diferencial de primeira ordem*

$$A_n\varphi_n' = \mathcal{M}_n\varphi_n. \tag{II.17}$$

com $A_n \in \mathbb{P}$ e $\mathcal{M}_n$ matriz de ordem quatro com entradas polinomiais.

Demonstração: Passo 1: Consideremos a equação (II.9) escrita na forma

$$\mathcal{D}_n\varphi_n'' + \mathcal{E}_n\varphi_n' + \mathcal{F}_n\varphi_n = 0_{4\times 1} \tag{II.18}$$

onde $\varphi_n = \begin{bmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_n, \mathcal{E}_n, \mathcal{F}_n$ são matrizes de ordem quatro dadas por

$$\mathcal{D}_n = A^2 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_n^1 I_{2\times 2} \end{bmatrix}, \ \mathcal{E}_n = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}_n & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \tilde{\mathcal{C}}_{n-1} \end{bmatrix} \ \text{e} \ \mathcal{F}_n = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{B}}_n & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \tilde{\mathcal{B}}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Fazendo $n+1$ em (II.18) e utilizando o Lema I.1 obtemos, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{D}_{n+1}(K_{n+1}\varphi_n)'' + \mathcal{E}_{n+1}(K_{n+1}\varphi_n)' + \mathcal{F}_{n+1}K_{n+1}\varphi_n = 0_{4\times 1},$$

ou seja,

$$\mathcal{D}_{n+1}K_{n+1}\varphi_n'' + (2\mathcal{D}_{n+1}K_{n+1}' + \mathcal{E}_{n+1}K_{n+1})\varphi_n' \\ + (\mathcal{E}_{n+1}K_{n+1}' + \mathcal{F}_{n+1}K_{n+1})\varphi_n = 0_{4\times 1}.$$

Passo 2: Eliminar φ_n''.

Multiplicamos a equação anterior, à esquerda, por $\Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+2} I_2 \end{bmatrix}$ e obtemos

$$A^2\Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+2} I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{n+2}^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+1} I_2 \end{bmatrix} K_{n+1}\varphi_n'' \\ + \Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+2} I_2 \end{bmatrix} (2\mathcal{D}_{n+1}K_{n+1}' + \mathcal{E}_{n+1}K_{n+1})\varphi_n' \\ + \Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+2} I_2 \end{bmatrix} (\mathcal{E}_{n+1}K_{n+1}' + \mathcal{F}_{n+1}K_{n+1})\varphi_n = 0_{4\times 1}$$

ou seja,

$$\Theta_{n+2}^1 K_{n+1} \begin{bmatrix} \Theta_n^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+1}^1 I_2 \end{bmatrix} \mathcal{D}_n\varphi_n'' + \Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & -\Theta_{n+2}^1 I_2 \end{bmatrix} (2\mathcal{D}_{n+1}K_{n+1}' + \\ \mathcal{E}_{n+1}K_{n+1})\varphi_n' + \Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & \Theta_{n+2}^1 I_2 \end{bmatrix} (\mathcal{E}_{n+1}K_{n+1}' + \mathcal{F}_{n+1}K_{n+1})\varphi_n = 0_{4\times 1}.$$

Tendo em conta (II.18) para n, resulta a equação

$$\widetilde{A}_n \varphi'_n = \widetilde{\mathcal{M}}_n \varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{II.19}$$

onde

$$\widetilde{A}_n = \Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_2 \\ 0_2 & \Theta_{n+2}^1 I_2 \end{bmatrix} (2\mathcal{D}_{n+1} K'_{n+1} + \mathcal{E}_{n+1} K_{n+1}) - \Theta_{n+2}^1 K_{n+1} \begin{bmatrix} \Theta_n^1 I_2 & 0_2 \\ 0_2 & \Theta_{n+1}^1 I_2 \end{bmatrix} \mathcal{E}_n$$

e

$$\widetilde{\mathcal{M}}_n = \Theta_{n+2}^1 K_{n+1} \begin{bmatrix} \Theta_n^1 I_2 & 0_2 \\ 0_2 & \Theta_{n+1}^1 I_2 \end{bmatrix} \mathcal{F}_n - \Theta_n^1 \begin{bmatrix} \Theta_{n+1}^1 I_2 & 0_2 \\ 0_2 & \Theta_{n+2}^1 I_2 \end{bmatrix} (\mathcal{E}_{n+1} K'_{n+1} + \mathcal{F}_{n+1} K_{n+1}).$$

Passo 3: Relação de estrutura.
De (II.19) temos $\varphi'_n = (\widetilde{A}_n)^{-1} \widetilde{\mathcal{M}}_n \varphi_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Multiplicando ambos os membros desta equação pela matriz adjunta de $\widetilde{A}_n$ vem

$$\det(\widetilde{A}_n) \varphi'_n = \mathcal{M}_n \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

que é uma equação do tipo Sylvester onde, $A_n = \det(\widetilde{A}_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é um polinómio e $\mathcal{M}_n = \operatorname{adj}(\widetilde{A}_n) \widetilde{M}_n$. ■

Mostraremos de seguida que, considerando a equação do tipo Sylvester (II.17) e a matriz $\mathcal{M}_n$ definida por

$$\mathcal{M}_n = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{n,1} & \mathcal{N}_{n,1} \\ \mathcal{N}_{n,2} & \mathcal{M}_{n,2} \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{M}_{n,1}$, $\mathcal{M}_{n,2}$ são matrizes de ordem dois e $\mathcal{N}_{n,1}, \mathcal{N}_{n,2}$ são matrizes escalares de ordem dois obteremos uma relação da forma

$$A_n \psi'_n = M_n^1 \psi'_n + N_n^1 \psi_{n-1}. \tag{II.20}$$

Para provar que a equação (II.20) tem a mesma estrutura que (II.2) começamos por mostrar que A_n não depende de n. Para isso vamos estudar os coeficientes das relações obtidas no Lema II.1. Esta prova também poderia ser feita utilizando o Teorema I.6.

Lema II.2. *Seja u uma funcional linear regular, $\{\varphi_n\}$ a sucessão de vectores com respeito a u e satisfazendo a equação* (II.18), $\forall n \in \mathbb{N}$.
Se $\{\varphi_n\}$ satisfaz (II.17), *onde $A_n \in \mathbb{P}$ e $\mathcal{M}_n$ é uma matriz de ordem 4 então,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 && \text{(II.21)} \\ A_1 I_2 &= (x-\beta_{n+1})(\mathcal{M}_{n+1,1}-\mathcal{M}_{n,1})+\gamma_{n+1}\mathcal{N}_{n,2}+\mathcal{N}_{n+1,1} && \text{(II.22)} \\ 0_{2\times 2} &= (x-\beta_{n+1})\mathcal{N}_{n,1}+\gamma_{n+1}(\mathcal{M}_{n+1,1}-\mathcal{M}_{n,2}) && \text{(II.23)} \\ \mathcal{M}_{n,1} &= \mathcal{N}_{n+1,2}(x-\beta_{n+1})+\mathcal{M}_{n+1,2} && \text{(II.24)} \\ \mathcal{N}_{n,1} &= -\mathcal{N}_{n+1,2}\gamma_{n+1}. && \text{(II.25)} \end{aligned}$$

Demonstração: Tomando $(n+1)$ na equação (II.17) e pela relação (I.17) resulta

$$A_{n+1}(K_{n+1}\varphi_n)' = \mathcal{M}_{n+1}(K_{n+1}\varphi_n)$$
$$A_{n+1}\varphi_n' = K_{n+1}^{-1}(\mathcal{M}_{n+1}K_{n+1} - A_{n+1}K_{n+1}'\varphi_n)$$

Temos que K_{n+1} é invertível pois $\det(K_{n+1}) = \gamma_{n+1}^2 \neq 0$.

Comparando esta equação com (II.17) concluímos que existe um polinómio L_n tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1} &= L_n\mathcal{A}_n \\ L_n\mathcal{M}_n &= K_{n+1}^{-1}(\mathcal{M}_{n+1}K_{n+1} - \mathcal{A}_{n+1}K_{n+1}'\varphi_n). \end{aligned}$$

A equação diferencial de primeira ordem para φ_n é única, a menos de um factor multiplicativo. Como $\mathcal{A}_{n+1} = L_n\mathcal{A}_n$ obtemos $\mathcal{A}_{n+1} = L_nL_{n-1}\cdots L_2\mathcal{A}_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como o grau de $\mathcal{A}_n$ é limitado por um número independente de n, então obtemos que o grau de L_n deve ser zero, ou seja, L_n é constante, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n+1} &= \mathcal{A}_1 \\ K_{n+1}\mathcal{M}_n &= (\mathcal{M}_{n+1}K_{n+1} - \mathcal{A}_{n+1}K'_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

de onde resultam as equações (II.21) a (II.25). ■

Falta mostrar que a equação (II.20) tem a mesma estrutura que a equação (II.2).

Lema II.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ os coeficientes das relações de estrutura* (II.2) *são dados por*

$$A_n = A_1; \quad \mathcal{N}_{n1} = p_4 I_2; \quad \mathcal{N}_{n2} = p_5 I_2;$$

$$\mathcal{M}_{n,i} = \begin{bmatrix} -l_{n,i} - \frac{p_1}{2} & -p_2 \\ p_3 & -l_{ni} + \frac{p_1}{2} \end{bmatrix} \tag{II.26}$$

com $i = 1, 2$ onde $p_j, l_{n,1}, l_{n,2} \in \mathbb{P}$, $i = j, \ldots, 5$ e A_1, p_1, p_2, p_3 não dependem de n.

Demonstração: Pelo Lema II.2 obtivemos $A_n = A_1$. Pelo Lema II.1 temos que as matrizes $\mathcal{N}_{n,1}$ e $\mathcal{N}_{n,2}$ são matrizes escalares logo são da forma

$$\mathcal{N}_{n,1} = p_4 I_2, \quad \mathcal{N}_{n2} = p_5 I_2 \tag{II.27}$$

para alguns polinómios p_4 e p_5. Para obtermos as matrizes $\mathcal{M}_{n,i}$, $i = 1, 2$ vamos ter em conta as matrizes escalares $\mathcal{N}_{n,1}$ e $\mathcal{N}_{n,2}$ logo as entradas $[\mathcal{N}_{n,1}]_{1,2} = [\mathcal{N}_{n,1}]_{2,1} = 0$ de (II.21) temos que

$$[\mathcal{M}_{n+1,1}]_{1,2} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2}, \quad [\mathcal{M}_{n+1,1}]_{2,1} = [\mathcal{M}_{n,2}]_{2,1}$$

$$[\mathcal{M}_{n,1}]_{1,2} = [\mathcal{M}_{n+1,2}]_{1,2}, \quad [\mathcal{M}_{n,1}]_{2,1} = [\mathcal{M}_{n+1,2}]_{2,1}.$$

De (II.27) conclui-se que os elementos de $[\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2}$ e de $[\mathcal{M}_{n,2}]_{2,1}$ não dependem de n e escrevemos $[\mathcal{M}_{n,2}]_{1,2} = -p_2$ e $[\mathcal{M}_{n,2}]_{2,1} = p_3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo vem que $[\mathcal{M}_{n,1}]_{1,2} = -p_2$ e $[\mathcal{M}_{n+1,1}]_{2,1} = p_3$.

De (II.21) temos que

$$[\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,1} = [\mathcal{M}_{n+1,1}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n+1,1}]_{1,1},$$
$$[\mathcal{M}_{n,1}]_{1,1} - [\mathcal{M}_{n,1}]_{2,2} = [\mathcal{M}_{n+1,2}]_{1,1} - [\mathcal{M}_{n+1,2}]_{2,2}.$$

Portanto $[\mathcal{M}_{n,1}]_{1,1} - [\mathcal{M}_{n,1}]_{2,2}$ não depende de n e assim $[\mathcal{M}_{n,1}]_{1,1} - [\mathcal{M}_{n,1}]_{2,2} = p_1$ e o mesmo acontece a $[\mathcal{M}_{n,2}]_{2,2} - [\mathcal{M}_{n,2}]_{1,1} = p_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Finalmente, considerando (II.21) obtemos (II.2). ■

Considerando os Lemas anteriores provámos que partindo da equação diferencial vectorial de segunda ordem obtemos uma equação diferencial do tipo Riccati. Deste modo damos uma caracterização fechada para as sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn.

Teorema II.4. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes, $\{\psi_n\}$ uma sucessão de vectores com respeito a u.*
Se $\{\psi_n\}$ satisfaz a equação deferencial vectorial de segunda ordem

$$\tilde{\mathcal{A}}_n \psi_n'' + \tilde{\mathcal{B}}_n \psi_n' + \tilde{\mathcal{C}}_n \psi_n = 0_{2\times 1}$$

com coeficientes (II.10) *então a função de Stieltjes S satisfaz a equação diferencial de Riccati* (II.1).

Demonstração: Pelos Lemas (II.1), (II.2) obtemos as relações de estrutura (II.2) para $\{\psi_n\}$ que satisfazem a equação diferencial de segunda ordem (II.9) com coeficientes (II.10). ■

Concluímos deste modo que quando usamos a forma matricial conseguimos passar de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes matriciais para uma equação do tipo Sylvester que caracteriza a família de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn. Não necessitamos de ir até à quarta ordem como tinha feito W. Hahn em [**32**].

4. Exemplo

Consideremos a equação diferencial de Riccati $AS' = BS^2 + CS + D$ onde A, B, C e D são polinómios cujos graus não dependem de n. Para o caso Laguerre-Hahn de classe zero vamos considerar estes polinómios definidos da seguinte forma

$$\begin{aligned} A(x) &= c_2x^2 + c_1x + c_0 \\ B(x) &= b_2x^2 + b_1x + b_0 \\ D(x) &= k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Das relações de estrutura de primeira ordem (II.7) temos as seguintes condições iniciais

$$\Theta_0^1(x) = D(x), \quad \Theta_1^1(x) = A(x) + B(x) + C(x)(x-\beta_0) + D(x)(x-\beta_0)^2$$

$$l_0(x) = -\frac{C(x)}{2}, \qquad l_1(x) = \frac{C(x)}{2} + D(x)(x-\beta_0)$$

Substituindo estes valores na equação diferencial vectorial de segunda ordem

$$A\Theta_{n+1}^1\psi_n'' + \widetilde{B}_n\psi_n' + \widetilde{C}_n\psi_n = 0_{2\times}$$

obtemos os coeficientes matriciais, (II.10), seguintes

$$\widetilde{\mathcal{A}}_n = \begin{bmatrix} A^2\Theta_{n+1}^1 & 0 \\ 0 & A^2\Theta_{n+1}^1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_n = A(x)\Theta_{n+1}^1 \begin{bmatrix} A'(x) + C(x) & 2B(x) \\ -2D(x) & A'(x) - C(x) \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathcal{C}}_n = \Theta_{n+1}^1 \begin{bmatrix} (-l_{n+1} + \frac{C}{2})' + A(D + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Theta_k^1}{\gamma_k}) & A(x)B'(x) \\ 0 & (\frac{C}{2} - l_{n+1})' + A(D + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Theta_k^1}{\gamma_k}) \end{bmatrix}$$

Considerando $B = 0$ temos o caso semi-clássico logo a equação diferencial vectorial pode escrever-se sob a forma

$$A(x)P''_{n+1} + (A'(x) - C(x))P'_{n+1} + (-l_{n+1} + \frac{C}{2})' + A(D + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Theta_k^1}{\gamma_k})P_{n+1} = 0$$

e também, pela equação

$$A(x)(P_n^{(1)})'' + (A'(x) - C(x))(P_n^{(1)})' \\ + \left(\left(\frac{C}{2} - l_{n+1} \right)' + A \left(D + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Theta_k^1}{\gamma_k} \right) \right) P_n^{(1)} = 2D(x)P'_{n+1}.$$

Escrevendo esta equação em notação operacional temos

$$L_n^* P_n^{(1)}(x) = 2D(x)P'_{n+1}(x) \tag{II.28}$$

onde

$$L_n^* = A(x)\mathbf{D}^2 + (A'(x) - C(x))\mathbf{D} + \left(\left(\frac{C}{2} - l_{n+1} \right)' + A(D + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Theta_k^1}{\gamma_k}) \right) I$$

e $A(x), C(x)$ e $D(x) = k$ resultam da equação de primeira ordem $A(x)S'(x) = C(x)S(x) + D(x)$.

Este resultado está de acordo com o que foi estudado para o caso clássico por Branquinho em [**5**] (cf. capítulo IV.7). Neste trabalho, Branquinho, começa por determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos para as sucessões de polinómios que satisfazem (II.28). De seguida classifica-as em quatro classes por analogia ao caso clássico. Destas classes de polinómios fazem parte o caso Laguerre-Hahn como podemos comparar agora. Então temos as fórmulas para determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos e as medidas associadas às famílias Laguerre-Hahn de classe zero. Os exemplos encontrados vão de encontro com o que foi feito por Maroni e Bouakkaz em [**18**].

CAPÍTULO III

Teorema de Representação da classe Laguerre-Hahn.

Neste capítulo temos como objectivo principal obter uma representação para sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn sobre a recta real em termos de equações diferenciais matriciais do tipo Sylvester.

Consideremos uma função de Stieltjes, S, Laguerre-Hahn, ou seja, S verificando a equação diferencial de Riccati

$$A(x)S'(x) = B(x)S^2(x) + C(x)S(x) + D(x),$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$, a sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$, sucessão de polinómios associados de primeira ordem $\{P_n^{(1)}\}$ e sucessão de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ relativamente a S. Consideremos, também, $\{Y_n\}$ a sucessão de matrizes, onde $Y_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$, a sucessão de vectores $\{Q_n\}$ com $Q_n = \begin{bmatrix} q_{n+1} \\ q_n \end{bmatrix}$ para $n \in \mathbb{N}$.

Na secção um estabeleceremos uma relação entre equações do tipo Riccati para S, com coeficientes polinomiais, e as equações diferenciais matriciais de Sylvester, para $\{Y_n\}$,

$$A(x)Y_n'(x) = \mathcal{B}_n(x)Y_n(x) - Y_n(x)\mathcal{C}(x) \qquad \text{(III.1)}$$

onde $\mathcal{B}_n(x)$ e $\mathcal{C}(x)$ são matrizes de ordem dois com entradas que dependem dos polinómios A, B, C e D. Considerando a relação de ortogonalidade $Y_n = \mathcal{A}_n Y_{n-1}$ vemos que $\mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} x-\beta_n & -\gamma_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação diferencial matricial do tipo Sylvester

$$A\mathcal{A}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para as funções de segunda espécie obtemos a equação diferencial vectorial

$$AQ_n' = (\mathcal{B}_n + (BS + C/2)I)Q_n.$$

Em [**44**] encontram-se relações análogas para o caso semi-clássico, na recta real.

Na secção dois mostramos que da equação matricial de Sylvester obtem-se um sistema de equações que nos permite determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos que caracterizam os polinómios ortogonais Laguerre-Hahn. Este resultado será aplicado aos polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn de classe zero.

Como consequência das equivalências anteriores encontramos, na secção três, uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais sobre a recta que pertencem à classe semi-clássica como foi feito em [**44**].

As equações diferenciais matriciais de Sylvester são casos particulares de equações diferenciais matriciais de Riccati. O Lema de Radon,(c.f. [**36**]), diz-nos que toda a equação diferencial matricial de Riccati é localmente equivalente a um sistema diferencial linear de primeira ordem. Este Lema permite-nos estabelecer uma representação para a solução de (III.1), num certo domínio $G \in \mathbb{C}$.

Como consequência desta equivalência obtém-se uma caracterização para os polinómios ortogonais semi-clássicos, na recta real. Esta equivalência permite-nos escrever Y_n da forma $Y_n = \mathcal{P}_n(z)\mathcal{L}^{-1}(z)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ sendo $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{L}$ soluções dos sistemas diferenciais lineares

$$\begin{array}{c} A(z)\mathcal{L}'(z) = \mathcal{C}(z)\mathcal{L}(z) \\ \mathcal{L}(z_0) = I_{2\times 2} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} A(z)\mathcal{P}_n'(z) = \mathcal{B}_n(z)\mathcal{P}_n(z) \\ \mathcal{P}_n(z_0) = Y_n(z_0) \end{array}.$$

Para o sistema $A(z)\mathcal{P}_n'(z) = \mathcal{B}_n(z)\mathcal{P}_n(z)$ apresentamos uma matriz fundamental de soluções definida por $\mathcal{P}_n = \widetilde{\mathcal{P}}_n e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\widetilde{C}}{2A} dt}$ onde $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{n+1} & \frac{\widetilde{q}_{n+1}}{\widetilde{w}} \\ \widetilde{P}_n & \frac{\widetilde{q}_n}{\widetilde{w}} \end{bmatrix}$ onde $\widetilde{w}$ é um peso semi-clássico sendo $\{\widetilde{P}_n\}$ a respectiva sucessão de polinómios ortogonais mónicos, $\{\widetilde{q}_n\}$ sucessão de funções de segunda espécie e $\widetilde{C}$ um polinómio que será determinado no fim desta secção.

Considerando $\widetilde{S}$ a função de Stieltjes associada ao peso $\widetilde{w}$ e considerando matriz fundamental de soluções $\mathcal{P}_n$ verificamos que a função de Stieltjas S pode escrever--se como uma transformação racional de $\widetilde{S}$ permitindo uma representação para a sucessão de matrizes $\{Y_n\}$. No final, consideramos os polinómios Laguerre-Hahn classe zero como exemplo.

1. Equações diferenciais matriciais de Sylvester

Através do Teorema seguinte obteremos uma caracterização para a sucessão de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn através da reinterpretação das relações de estrutura (II.7) em termos de equações matriciais do tipo Sylvester, o que permitirá obter uma representação para as respectivas sucessões de polinómios ortogonais.

Teorema III.1. *Sejam u uma funcional linear regular definida positiva e S a função de Stieltjes correspondente. Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a u, $\{P_n^{(1)}\}$ sucessão de polinómios associados de primeira espécie e $\{q_n\}$ sucessão de funções de segunda espécie. As afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) *S satisfaz a equação diferencial do tipo Riccati*

$$A(x)S'(x) = B(x)S^2(x) + C(x)S(x) + D(x), \tag{III.2}$$

com $A, B, C, D \in \mathbb{P}$,

(2) *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\{Y_n\}$ satisfaz a equação*

$$AY_n' = \mathcal{B}_n Y_n - Y_n \mathcal{C} \tag{III.3}$$

onde $\mathcal{B}_n = \begin{bmatrix} -l_{n+1} & \Theta_{n+1}^1 \\ -\frac{\Theta_n^1}{\gamma_n} & \Theta_n^1 \frac{(x-\beta_n)}{\gamma_n} - l_n \end{bmatrix}$ $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \frac{C}{2} & -D \\ B & -\frac{C}{2} \end{bmatrix}$
com l_n, l_{n+1}, Θ_n^1 e Θ_{n+1}^1 polinómios de graus limitados e que dependem de A, B, C, D e β_n, γ_n os coeficientes da relação de recorrência a três termos de $\{P_n\}$.

(3) $\mathcal{A}_n = \begin{bmatrix} x-\beta_n & -\gamma_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *satisfaz a equação tipo Sylvester*

$$A\mathcal{A}_n' = \mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{III.4}$$

com

$$\mathrm{tr}(\mathcal{B}_n) = 0$$

e

$$\det(\mathcal{B}_n) = \det(\mathcal{B}_0) - A\sum_{k=2}^{n} \frac{\Theta_k^1}{\gamma_k} \tag{III.5}$$

sendo $\det \mathcal{B}_0 = (C/2)^2 + D(A+B)$.

(4) $\forall n \geq 1$, *a sucessão* $\{Q_n\}$ *satisfaz a equação*

$$AQ_n' = (\mathcal{B}_n + (BS + C/2)I)Q_n. \tag{III.6}$$

Demonstração: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

Considerando o Teorema II.1 do capítulo anterior e as relações de recorrência a três termos de $\{P_n\}$ e dos seus associados de primeira espécie $\{P_n^{(1)}\}$ podemos reescrever as equações (II.2) na forma seguinte:

$$A\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -l_{n+1} & \Theta_{n+1}^1 \\ -\frac{\Theta_n}{\gamma_n} & \frac{\Theta_n^1(x-\beta_n)}{\gamma_n} - l_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{C}{2} & -D \\ B & -\frac{C}{2} \end{bmatrix}$$

onde obtemos a equação (III.1) que é do tipo Sylvester para $\{Y_n\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Derivando a relação $Y_n = \mathcal{A}_nY_{n-1}$ onde $\mathcal{A}_n(x) = \begin{bmatrix} x-\beta_n & -\gamma_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e usando a equação (III.1) vem

$$A(\mathcal{A}_nY_{n-1})' = \mathcal{B}_n\mathcal{A}_nY_{n-1} - \mathcal{A}_nY_{n-1}\mathcal{C} \Leftrightarrow$$

$$A\mathcal{A}_nY_{n-1} = (\mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1})Y_{n-1}.$$

Obtemos (III.4), $\forall n \in \mathbb{N}$, pois Y_n é uma matriz regular.

Partindo da equação (III.4) encontra-se o determinante da matriz $\mathcal{B}_n$. Calculando

$$\det(\mathcal{B}_n \mathcal{A}_n) = \det(A\mathcal{A}_n + \mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1}), \quad n \geq 2$$

obtemos

$$\det(\mathcal{B}_n) = \frac{A\Theta_n^1}{\gamma_n} + \det(\mathcal{B}_{n-1}).$$

Como o determinante de $\mathcal{B}_n$ se escreve à custa do determinante de $\mathcal{B}_{n-1}$ obtemos (III.5).

Para mostrar que $\operatorname{tr} \mathcal{B}_n = 0$ começamos por considerar as relações de estrutura, definidas em (II.7) no capítulo II, para n e para $n-1$:

$$\begin{cases} A(P_{n+1})' - \Theta_n^1 P_n + \frac{C}{2} P_{n+1} + BP_n^{(1)} = l_n P_{n+1} \\ A(P_n^{(1)})' - \Theta_n^1 P_{n-1}^{(1)} - \frac{C}{2} P_n^{(1)} - DP_{n+1} = l_n P_n^{(1)} \\ A(P_n)' - \Theta_{n-1}^1 P_{n-1} + \frac{C}{2} P_n + BP_{n-1}^{(1)} = l_{n-1} P_n \\ A(P_{n-1}^{(1)})' - \Theta_{n-1}^1 P_{n-2}^{(1)} - \frac{C}{2} P_{n-1}^{(1)} - DP_n = l_{n-1} P_{n-1}^{(1)} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $P_{n-1}^{(1)}$, a segunda por $-P_n$, a terceira por $-P_n^{(1)}$ e a última por P_{n+1} e adicionando as quatro equações temos

$$\begin{aligned} & A(P'_{n+1} P_{n-1}^{(1)} - (P_n^{(1)})' P_n - P'_n P_n^{(1)} (P_{n-1}^{(1)})' P_{n+1}) \\ & \qquad - \Theta_n^1 (P_{n-2}^{(1)} P_{n+1} - P_{n-1} P_n^{(1)}) = (l_{n+1} + l_n)(P_n^{(1)} P_n - P_{n+1} P_{n-1}^{(1)}) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} & A(P_{n+1} P_{n-1}^{(1)} - P_n^{(1)} P_n)' - \Theta_n^1 (P_{n-2}^{(1)} P_{n+1} - P_{n-1} P_n^{(1)}) \\ & \qquad = (l_{n+1} + l_n)(P_{n+1} P_{n-1}^{(1)} - P_n^{(1)} P_n) \end{aligned}$$

Por (I.8) e pelas relações de recorrência a três termos (I.1) e (I.5) vem

$$A(\gamma_1 \cdots \gamma_n)' + \Theta_n^1 (P_{n-2}^{(1)} P_n - P_{n-1} P_{n-1}^{(1)} (x - \beta_n)) = (l_{n+1} + l_n)(\gamma_1 \cdots \gamma_n),$$

ou seja, $\Theta_n^1 (\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1})(x - \beta_n) = (l_{n+1} + l_n)(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$.

Portanto $\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2)

Multiplicando a equação (III.4) por Y_{n-1} vem

$$A\mathcal{A}_n' Y_{n-1} = \mathcal{B}_n \mathcal{A}_n Y_{n-1} - \mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1} Y_{n-1}$$

e utilizando a derivada de $\mathcal{A}_n Y_{n-1}$ temos $\mathcal{A}_n' Y_{n-1} = (\mathcal{A}_n Y_{n-1})' - \mathcal{A}_n Y_{n-1}'$ substituindo obtemos

$$A(\mathcal{A}_n Y_{n-1})' - \mathcal{B}_n \mathcal{A}_n Y_{n-1} = A\mathcal{A}_n Y_{n-1}' - \mathcal{A}_n \mathcal{B}_{n-1} Y_{n-1}$$

e pela relação $Y_n = \mathcal{A}_n Y_{n-1}$ resulta

$$AY_n' - \mathcal{B}_n Y_n = \mathcal{A}_n (AY_{n-1}' - \mathcal{B}_{n-1} Y_{n-1}).$$

Iterando o procedimento temos

$$AY_n' - \mathcal{B}_n Y_n = \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \ldots \mathcal{A}_1 (AY_0' - \mathcal{B}_0 Y_0)$$

e como

$$Y_n Y_0^{-1} = \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \cdots \mathcal{A}_1$$

obtemos (III.1) onde $C = -Y_0^{-1}(AY_0' - \mathcal{B}_0 Y_0)$ para $n \geq 2$.

(4) $\Leftrightarrow$ (1)

No capítulo II, mostrámos que se verificava a relação (II.3), para a sucessão de funções de segunda espécie $\{q_n\}$

$$Aq_{n+1}' = \Theta_{n+1}^1 q_n + \left(l_{n+1} + \frac{C}{2} + BS \right) q_{n+1}.$$

Considerando a relação de recorrência a três termos de $\{q_n\}$ temos

$$q_{n-1}(x) = \frac{(x-\beta_n) q_n(x) - q_{n+1}(x)}{\gamma_n}.$$

Substituindo na equação

$$\begin{aligned} Aq_n' &= \Theta_n^1 q_{n-1} + \left(-l_n + \frac{C}{2} + BS \right) q_n \\ Aq_n' &= \frac{\Theta_n^1 (x-\beta_n)}{\gamma_n} q_n - \frac{\Theta_n^1}{\gamma_n} q_{n+1} + \left(-l_n + \frac{C}{2} + BS \right) q_n. \end{aligned}$$

Escrevendo matricialmente estas duas equações temos

$$A\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ q_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -l_{n+1} & \Theta^1_{n+1} \\ -\frac{\Theta^1_n}{\gamma_n} & \frac{\Theta^1_n(x-\beta_n)}{\gamma_n} - l_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C}{2}+BS & 0 \\ 0 & \frac{C}{2}+BS \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{n+1} \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Obtemos deste modo (III.6), $AQ'_n = (\mathcal{B}_n + (BS + \frac{C}{2})I)Q_n$. ■

A equação de Sylvester (III.4) é equivalente ao sistema de equações seguinte:

$$\begin{cases} (l_{n+1} - l_n)(x-\beta_n) = -A + \Theta^1_{n+1} - \gamma_n \frac{\Theta^1_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \\ l_{n+1} - l_{n-1} = \dfrac{(x-\beta_n)}{\gamma_n}\Theta^1_n - \dfrac{(x-\beta_{n-1})}{\gamma_{n-1}}\Theta^1_{n-1} \end{cases} \tag{III.7}$$

simplificando a segunda equação do sistema (III.7) obtemos a equação

$$l_{n+1} - l_n + l_n - l_{n-1} = \frac{(x-\beta_n)}{\gamma_n}\Theta^1_n - \frac{(x-\beta_{n-1})}{\gamma_{n-1}}\Theta^1_{n-1}$$

aplicando a propriedade telescópica a ambos os membros vem

$$l_{n+1} + l_n - \frac{(x-\beta_n)}{\gamma_n}\Theta^1_n = l_1 + l_0 - (x-\beta_0)\Theta^1_0.$$

Resulta, deste modo, o sistema de equações

$$\begin{cases} (l_{n+1} - l_n)(x-\beta_n) = -A + \Theta^1_{n+1} - \gamma_n \frac{\Theta^1_{n-1}}{\gamma_{n-1}}, \quad n \geq 1 \\ l_{n+1} + l_n - \dfrac{(x-\beta_n)}{\gamma_n}\Theta^1_n = l_1 + l_0 - (x-\beta_0)\Theta^1_0, \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{III.8}$$

Do sistema de equações (III.8) podemos obter os coeficientes β_n e γ_n da relação de recorrência a três termos que caracteriza as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn.

2. Polinómios ortogonais Laguerre-Hahn classe zero

Considerando o sistema linear (III.8). Temos como objectivo principal encontrar os coeficientes da relação de recorrência a três termos β_n e γ_n e além disso conhecer os valores das constantes $b_{n,0}; a_{n,1}$ e $a_{n,0}$ tendo como condições iniciais

$$A = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad l_n = a_{n,1}x + a_{n,0} \quad \text{e} \quad \Theta_n^1 = b_{n,0} \tag{III.9}$$

Já vimos que, pelas condições iniciais, a segunda equação de (III.8) é

$$l_{n+1} + l_n - \frac{(x-\beta_n)}{\gamma_n}\Theta_n^1 = 0. \tag{III.10}$$

Substituindo na primeira equação do sistema (III.8) os polinómios $A(x), l_n(x)$ e $\Theta_n^1(x)$, dados em (III.9), temos

$$\begin{aligned}(a_{n+1,1}x + a_{n+1,0} - a_{n,1}x - a_{n,0})(x-\beta_n)&\\ = \gamma_n\left(\frac{b_{n+1,0}}{\gamma_n} - \frac{b_{n-1,0}}{\gamma_{n-1}}\right) - (a_2x^2 + a_1x + a_0).&\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos termos em $[x^2]$ resulta

$$a_{n+1,1} - a_{n,1} = -a_2$$

pela propriedade telescópica vem

$$a_{n+1,1} = a_{1,1} - na_2. \tag{III.11}$$

Temos, também, comparando os coeficientes dos termos em $[x]$, que

$$(a_{n,1} - a_{n+1,1})\beta_n + a_{n+1,0} - a_{n,0} = -a_1$$

e por (III.11) obtemos

$$a_{n,0} - a_{n+1,0} = a_1 + a_2\beta_n. \tag{III.12}$$

e aplicando a propriedade telescópica vem

$$a_{n+1,0} = a_{1,0} - na_1 - a_2\sum_{k=1}^{n}\beta_k$$

Substituindo l_n e Θ_n^1, dados em (III.9), na segunda equação do sistema (III.8) vem

$$a_{n+1,1}x + a_{n+1,0} + a_{n,1}x + a_{n,0} = \frac{x-\beta_n}{\gamma_n}b_{n,0}. \tag{III.13}$$

Comparando os coeficientes dos termos em $[x]$ desta equação obtemos que

$$a_{n+1,1} + a_{n,1} = \frac{b_{n,0}}{\gamma_n}$$

pela equação (III.11)

$$b_{n,0} = (2a_{1,1} - (2n-1)a_2)\gamma_n. \tag{III.14}$$

Comparando os termos independentes de ambos os membros de (III.13) vem

$$a_{n+1,0} + a_{n,0} = -\frac{\beta_n b_{n,0}}{\gamma_n}. \tag{III.15}$$

Para obter a expressão de β_n começamos por adicionar as equações (III.12) e (III.15) resultando

$$2a_{n,0} = a_1 + \beta_n(-2a_{1,1} + 2na_2) \tag{III.16}$$

substituindo em (III.12) temos

$$a_1 + \beta_{n+1}(-2a_{1,1} + 2(n+1)a_2) - a_1 - \beta_n(-2a_{1,1} + 2na_2) = -2a_2\beta_n - 2a_1$$

ou seja,

$$-2a_1 = \beta_{n+1}(-2a_{1,1} + 2(n+1)a_2) - \beta_n(-2a_{1,1} + 2(n-1)a_2).$$

Multiplicando ambos os membros por $(-2a_{1,1} + 2na_2)$ vem

$$\begin{aligned} -2a_1(-2a_{1,1} + 2na_2) &= \beta_{n+1}(-2a_{1,1} + 2na_2)(-2a_{1,1} + 2(n+1)a_2) \\ &\quad - \beta_n(-2a_{1,1} + 2na_2)(-2a_{1,1} + 2(n-1)a_2) \end{aligned}$$

aplicando a propriedade telescópica

$$\begin{aligned} &-2a_1(-2na_{1,1} + (n+1)na_2) \\ &\quad = \beta_{n+1}(-2a_{1,1} + 2na_2)(-2a_{1,1} + 2(n+1)a_2) - \beta_0(-2a_{1,1})(-2a_{1,1} + 2a_2) \end{aligned}$$

obtendo β_{n+1} definido por

$$\beta_{n+1} = \frac{a_1 n((n+1)a_2 - 2a_{1,1}) + 2a_{1,1}\beta_0(a_2 - a_{1,1})}{(a_{1,1} - na_2)(a_{1,1} - (n+1)a_2)}.$$

Para determinar uma expressão para γ_n começamos por considerar a primeira equação de (III.8) fazendo $x = \beta_n$ e obtemos a relação seguinte

$$A(\beta_n) = \gamma_n \left(\frac{b_{n+1,0}}{\gamma_n} - \frac{b_{n-1,0}}{\gamma_{n-1}} \right).$$

Por (III.14) resulta

$$A(\beta_n) = (2a_{1,1} - (2n+1)a_2)\gamma_{n+1} - (2a_{1,1} - (2n-3)a_2)\gamma_n$$

multiplicando ambos os membros desta equação por $2a_{1,1} - (2n-1)a_2 \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}(2a_{1,1} - (2n-1)a_2)A(\beta_n) &= (2a_{1,1} - (2n-1)a_2)(2a_{1,1} - (2n+1)a_2)\gamma_{n+1} \\ &\quad - (2a_{1,1} - (2n-1)a_2)(2a_{1,1} - (2n-3)a_2)\gamma_n.\end{aligned}$$

Pela propriedade telescópica vem

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2a_{1,1} - (2k-1)a_2)A(\beta_k) &= (2a_{1,1} - (2n-1)a_2)(2a_{1,1} - (2n+1)a_2)\gamma_{n+1} \\ &\quad - (2a_{1,1} + a_2)(2a_{1,1} + 3a_2)\gamma_0.\end{aligned}$$

Portanto

$$\gamma_{n+1} = \frac{-(2a_{1,1} + a_2)(2a_{1,1} + 3a_2) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A(\beta_k)(2a_{1,1} - (2k-1)a_2)}{(2a_{1,1} - (2n-1)a_2)(2a_{0,1} - (2n+1)a_2)}. \tag{III.17}$$

Para se encontrar uma expressão para $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} A(\beta_k)(2a_{1,1} - (2k-1)a_2)$ começamos por multiplicar as equações (III.15) e (III.12) vem

$$(a_{n,0})^2 - (a_{n+1,0})^2 = -(a_1 + a_2\beta_n)(\beta_n(2a_{1,1} - (2n-1)a_2)$$

somando e subtraíndo $a_0(2a_{1,1} - (2n-1)a_2)$ e como $A(\beta_n) = a_2(\beta_n)^2 + a_1\beta_n + a_0$ vem

$$(a_{n,0})^2 - (a_{n+1,0})^2 = -A(\beta_n)(2a_{0,1} - (2n-1)a_2) + a_0(2a_{0,1} - (2n-1)a_2)$$

pela propriedade telescópica vem

$$\sum_{k=1}^{n} A(\beta_k)(2a_{1,1}-(2k-1)a_2) = (a_{n+1,0})^2-(a_{0,0})^2+2a_0a_{1,1}(n+1)-a_0a_2(n+1)(n-1).$$

Por (III.16) obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} A(\beta_k)(2a_{0,1}-(2k-1)a_2) = (2(a_1+\beta_{n+1}(2a_{1,1}-2(n+1)a_2))^2 \\ -(a_{0,0})^2+2a_0a_{0,1}(n+1)-a_0a_2(n+1)(n-1). \quad \text{(III.18)}$$

Substituíndo (III.18) em (III.17) vem

$$\gamma_{n+1} = \frac{(2a_{1,1}+a_2)(2a_{1,1}+3a_2)-(a_{0,0})^2+2a_0a_{0,1}(n+1)-a_0a_2(n+1)(n-1)}{(2a_{1,1}-(2n-1)a_2)(2a_{1,1}-(2n+1)a_2)} \\ + \frac{(2(a_1+\beta_{n+1}(2a_{1,1}-2(n+1)a_2))^2}{(2a_{1,1}-(2n-1)a_2)(2a_{1,1}-(2n+1)a_2)}.$$

Com estas equações podemos obter qualquer sucessão de polinómios ortogonais.

3. Representação dos polinómios ortogonais semi-clássicos

De seguida vamos proceder à caracterização das sucessões de polinómios ortogonais sobre a recta real pertencentes à classe semi-clássica iniciando a secção com o seguinte resultado

Lema III.1. *Seja A um polinómio e sejam X eC funções matriciais de ordem dois tais que $AX' = CX$. Então*

$$(\det X)' = \frac{\mathrm{tr}(C)}{A}\det(X) \quad \text{(III.19)}$$

onde $\mathrm{tr}(C)$ *designa o traço da matriz* C.

O próximo Teorema permite obter uma caracterização para as sucessões de polinómios semi-clássicos, definidos na recta real, em termos de sistemas diferenciais. Obtemos uma extensão do resultado obtido por Magnus, em [**44**], para as sucessões de polinómios semi-clássicos sobre a recta real.

Teorema III.2. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativamente a uma medida w. Então, $w = Ke^{\int_{z_0}^{z} \frac{C}{A} dt}$, $K \in \mathbb{C}$, se e somente se* $\widetilde{Y}_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & \frac{q_{n+1}}{w} \\ P_n & \frac{q_n}{w} \end{bmatrix}$ *satisfaz o sistema diferencial*

$$A\widetilde{Y}_n' = (\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}I)\widetilde{Y}_n$$

onde $\mathcal{B}_n$ é a matriz associada à equação $AS' = CS + D$, $C, D \in \mathbb{P}$, que a respectiva função de Stieltjes satisfaz.

Demonstração: Se $w = Ke^{\int_{z_0}^{z} \frac{C}{A} dt}$ então $\dfrac{w'}{w} = \frac{C}{A}$. Temos que a função de Stieltjes, S, satisfaz a equação $AS' = CS + D$ para um certo polinómio D. Do Teorema III.1 temos (III.6)

$$A(Q_n)' = (\mathcal{B}_n + \frac{C}{2}I)Q_n,$$

ou seja,

$$A \begin{bmatrix} \frac{q_{n+1}}{w} \\ \frac{q_n}{w} \end{bmatrix}' = (\mathcal{B}_n + \frac{C}{2}I) \begin{bmatrix} \frac{q_{n+1}}{w} \\ \frac{q_n}{w} \end{bmatrix}.$$

e como

$$A \begin{bmatrix} \frac{P_{n+1}}{w} \\ \frac{P_n^{(1)}}{w} \end{bmatrix}' = (\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}I) \begin{bmatrix} \frac{P_{n+1}}{w} \\ \frac{P_n^{(1)}}{w} \end{bmatrix}$$

e por $\dfrac{w'}{w} = \frac{C}{A}$ obtemos

$$A\widetilde{Y}_n' = (\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}I)\widetilde{Y}_n.$$

Reciprocamente, se a sucessão $\{\widetilde{Y}_n\}$ satisfaz a relação $A\widetilde{Y}_n' = (\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}I)\widetilde{Y}_n$ então pelo Lema III.1 temos

$$\det(\widetilde{Y}_n)' = \frac{\mathrm{tr}(\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}I)}{A} \det(\widetilde{Y}_n).$$

Por outro lado temos também que

$$\det(\widetilde{Y}_n) = P_{n+1}\frac{q_n}{w} - P_n\frac{q_{n+1}}{w}$$

substituindo na equação anterior vem

$$\det(\widetilde{Y}_n)' = \frac{\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}I)}{A}(P_{n+1}\frac{q_n}{w} - P_n\frac{q_{n+1}}{w})$$

pelo Teorema III.1 vimos que $\operatorname{tr}(\mathcal{B}_n) = 0$ e temos que

$$(P_{n+1}\frac{q_n}{w} - P_n\frac{q_{n+1}}{w})' = -\frac{C}{A}(P_{n+1}\frac{q_n}{w} - P_n\frac{q_{n+1}}{w}).$$

Resulta $\dfrac{w'}{w} = \dfrac{C}{A}$ e portanto w é um peso semi-clássico. ■

O Lema de Radon [**36**] permite-nos resolver as equações de Sylvester (III.6) através da resolução de dois sistemas diferenciais lineares e onde se vai estabelecer uma representação para a solução da equação anterior num certo domínio G.

Teorema III.3 (Lema de Radon). *Consideremos a equação de Riccati*

$$W'(t) = M_{21}(t) + M_{22}(t)W(t) - W(t)M_{11}(t) - W(t)M_{12}(t)W(t) \quad \text{(III.20)}$$

com $W(t_0) = W_0$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *ou* $t \in \mathbb{C}$, *onde* $M_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $M_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *e* $M_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *são matrizes cujos elementos são funções localmente integráveis definidas no intervalo* $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$. *Então:*

(1) *Se* W *for uma solução de* (III.20) *no intervalo* $[t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ *e se* L *for uma solução do problema de valor inicial*

$$L' = (M_{11} + M_{12}W)L, \quad L(t_0) = I_n,$$

onde I_n *é a matriz identidade de ordem* n, *e* $P(t) := W(t)L(t)$, *então o vector* $[L \;\; P]^T$ *é uma solução do sistema linear de equações diferenciais*

$$\begin{bmatrix} L \\ P \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ P \end{bmatrix}. \quad \text{(III.21)}$$

(2) *Se* $[L \;\; P]^T$ *for uma solução real do sistema diferencial* (III.21) *tal que* $L(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *é regular para* $t \in [t_0, t_f]$, *então*

$$W : [t_0, t_f] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, t \mapsto W(t) = P(t)L^{-1}(t)$$

é uma solução real de (III.20).

(3) *No caso de* t *pertencer a* $\mathbb{C}$ *e as matrizes* M_{11}, M_{12}, M_{13} *e* M_{14}*forem matrizes complexas, as afirmações (1) e (2) permanecem verdadeiras se substituirmos o intervalo* $[t_0, t_f]$ *por um domínio arbitrário do plano complexo* $G \subset \mathbb{C}$, *com* $t_0 \in G$.

Os resultados seguintes encontram-se demonstrados por Branquinho e Rebocho em [**10, 57**].

Teorema III.4. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *consideremos a equação diferencial de Sylvester* (III.6). *Seja* $G \subset \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in G$, *tal que os elementos das matrizes* $\frac{\mathcal{B}_n}{A}$ *e* $\frac{\mathcal{C}}{A}$ *são localmente integráveis em* G. *Se as matrizes* $\mathcal{P}_n$ *e* $\mathcal{L}$ *com* $\mathcal{L}$ *invertível verificarem os sistemas*

$$\begin{cases} A(z)\mathcal{L}'(z) = \mathcal{C}(z)\mathcal{L}(z) \\ \mathcal{L}(z_0) = I_{2\times 2} \end{cases} \tag{III.22}$$

e

$$\begin{cases} A(z)\mathcal{P}_n'(z) = \mathcal{B}_n(z)\mathcal{P}_n(z) \\ \mathcal{P}_n(z_0) = Y_n(z_0) \end{cases} \tag{III.23}$$

então as soluções de (III.6) *têm a seguinte representação em* G, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1}. \tag{III.24}$$

A solução da equação de Sylvester (III.6) *é dada por*

$$Y_n(z) = P_n(z)G_nL^{-1}(z) \tag{III.25}$$

onde L *é a matriz fundamental do sistema* (III.22), P_n *é uma matriz fundamental do sistema* (III.23), *e*

$$G_n = (P_n(t_0))^{-1}Y_n(t_0)L(t_0). \tag{III.26}$$

Lema III.2. *Se* L *verifica o sistema III.22 então* $\det(L(z)) = \det(L(z_0))$.

Para resolver o problema de valor inicial (III.22) começamos por procurar uma matriz fundamental de soluções L, de ordem 2, que verifique a equação

$$A(z)L'(z) = \mathcal{C}(z)L(z).$$

onde $\mathcal{C}(z)$ está definida no Teorema III.1 e $\det(L(z_0)) \neq 0$.

Designando por $L_1(z)$ e $L_2(z)$ as colunas da matriz L resolveremos o sistema

$$A(z)L_1'(z) = \mathcal{C}(z)L_1(z) \quad \text{e} \quad A(z)L_2'(z) = \mathcal{C}(z)L_2(z).$$

Lema III.3. *Seja $\mathcal{C}(z)$ a função matricial definida no Teorema III.1. Então verifica-se que:*

(1) *A função matricial $\mathcal{C}$ verifica $\mathcal{C}^2(z) = \beta(z)I_{2\times 2}$ com $\beta(z) = (\frac{C}{2})^2 - BD$;*
(2) *os valores próprios de $\mathcal{C}$ são $\pm\sqrt{\beta}$;*
(3) *Uma base do espaço dos vectores próprios associados aos valores próprios $\pm\sqrt{\beta}$ é dada por $V_{\pm\sqrt{\beta}} = \begin{bmatrix} D \\ \frac{C}{2} \pm \sqrt{\beta} \end{bmatrix}$.*

Lema III.4. *Se $L = [L_1 \quad L_2]$ for a solução de III.22 então*

$$AL_1' = \sqrt{\beta}L_1 + Ac_1V_{-\sqrt{\beta}} \quad e \quad AL_2' = -\sqrt{\beta}L_2 + Ac_2V_{\sqrt{\beta}}$$

onde $c_1(z), c_2(z)$ são funções.

Exemplo 3.1. Polinómios Ortogonais de Laguerre-Hahn Classe Zero

Consideremos a equação diferencial do tipo Riccati $AS' = BS^2 + CS + D$ sendo $A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $B(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$, $C(x) = c_1x + c_0$ e $D(x) = k$ onde k é uma constante. Vamos encontrar uma matriz L,invertível, que é solução do Problema, de valor inicial, III.22

$$\begin{cases} A(z)\mathcal{L}'(z) = \mathcal{C}(z)\mathcal{L}(z) \\ \mathcal{L}(z_0) = I_{2\times 2} \end{cases}.$$

Ou seja,

$$A\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{C}{2} & -k \\ B & -\frac{C}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

de onde resulta o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
AL'_{11} &= \frac{C}{2}L_{11} - kL_{21} \Leftrightarrow kL_{21} = \frac{C}{2}L_{11} - AL'_{11} \\
AL'_{12} &= \frac{C}{2}L_{12} - kL_{22} \Leftrightarrow kL_{22} = \frac{C}{2}L_{12} - AL'_{12} \\
AL'_{21} &= -\frac{C}{2}L_{21} + BL_{11} \\
AL'_{22} &= -\frac{C}{2}L_{22} + BL_{12}
\end{aligned}$$

Substituindo a primeira equação na terceira equação do sistema anterior obtemos

$$A\left(\frac{C}{2}L_{11} - AL'_{11}\right)' = BL_{11} - \frac{C}{2}\left(\frac{C}{2}L_{11} - AL'_{11}\right)$$

resultando, assim, a seguinte equação

$$A^2L''_{11} + AA'L'_{11} + \left(-\frac{C^2}{4} + Bk - \frac{AC'}{2}\right)L_{11} = 0$$

pelo Lema III.3 temos

$$A^2L''_{11} + AA'L'_{11} + \left(\beta^2 - \frac{AC'}{2}\right)L_{11} = 0. \tag{III.27}$$

Fazendo como em [**60**] vem

$$L_{11} = us, \quad L'_{11} = u's + us', \quad L''_{11} = u''s + 2u's' + s''$$

Substituindo em (III.27) temos

$$Asu'' + (2A^2s' + AA's)u' + \left[A^2s'' + AA's' + \left(\beta^2 - \frac{C'A}{2}\right)s\right]u = 0.$$

Fazendo $2A^2s' + AA's = 0$ obtemos a equação

$$Asu'' + \left[\left(\frac{(A')^2}{2} + \frac{AA''}{2} + \beta^2 + \frac{AC'}{2}\right)s\right]u = 0. \tag{III.28}$$

A equação de Airy $u'' + \frac{1}{3}us = 0$ é uma transformação da equação diferencial de Bessel. Tem como solução a função de Airy, [**60**].

A equação obtida em (III.28) é uma equação de Wittaker e tem a forma geral

$$W'' + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right\} W = 0$$

onde k, m são constantes. São solução desta equação as funções de Wittaker e as de Bessel(c.f. [**62**]).

Para o problema de valor inicial (III.23) procuramos uma matriz fundamental de soluções do sistema diferencial correspondente a este problema. Ou seja, procuramos matrizes de ordem dois, $\mathcal{P}_n$, que satisfaçam a equação $A(z)\mathcal{P}'_n(z) = \mathcal{B}_n(z)\mathcal{P}_n(z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dada por

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{n+1} & \frac{\widetilde{q}_{n+1}}{\widetilde{w}} \\ \widetilde{P}_n & \frac{\widetilde{q}_n}{\widetilde{w}} \end{bmatrix} \tag{III.29}$$

onde $\{\widetilde{P}_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma funcional $\widetilde{u}$ e $\{\widetilde{q}_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie. Vamos considerar $\widetilde{w}$ a parte absolutamente contínua da medida e denotaremos os coeficientes das relações de recorrência das sucessões definidas anteriormente por $\widetilde{\beta}_n$ e $\widetilde{\gamma}_n$.

Lema III.5. *Sejam $\{\widetilde{P}_n\}$ sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma funcional $\widetilde{u}$ e $\{\widetilde{q}_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie. A sucessão $\{\widetilde{\mathcal{P}}_n\}$ satisfaz a equação*

$$A(\widetilde{\mathcal{P}}_n)' = (\mathcal{B}_n - \frac{C}{2}I)\widetilde{\mathcal{P}}_n \tag{III.30}$$

se e somente se, $\mathcal{P}_n = e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\widetilde{C}}{2A} dt}\widetilde{\mathcal{P}}_n$ satisfaz $A\mathcal{P}'_n = \mathcal{B}_n\mathcal{P}_n$ para alguma função analítica $\widetilde{C}$ e algum $z_1 \in \mathbb{C}$.

Portanto, se $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ tiver a forma (III.29) então

$$\mathcal{P}_n = e^{\int_{t_1}^{z} \frac{\widetilde{C}}{2A} dt} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{n+1} & \frac{\widetilde{q}_{n+1}}{\widetilde{w}} \\ \widetilde{P}_n & \frac{\widetilde{q}_n}{\widetilde{w}} \end{bmatrix}. \tag{III.31}$$

Lema III.6. *Seja S a função de Stieltjes que satisfaz a equação diferencial de Riccati $AS' = BS^2 + CS + D$ e $\{\mathcal{P}_n\}$ a respectiva sucessão de polinómios ortogonais mónicos.*

Seja $\{P_n\}$ *uma solução do sistema diferencial* (III.23), *dada por* (III.29). *Então, se* $\{\mathcal{P}_n\}$ *for definida por* (III.31), $\forall n \in \mathbb{N}$, *temos*

$$A(\widetilde{\mathcal{A}}_n)' = \mathcal{B}_n\widetilde{\mathcal{A}}_n - \widetilde{\mathcal{A}}_n\mathcal{B}_{n-1}. \tag{III.32}$$

onde $\mathcal{P}_n = \widetilde{\mathcal{A}}_n\mathcal{P}_{n-1}$ *e* $\widetilde{\mathcal{A}}_n = \begin{bmatrix} x - \widetilde{\beta}_n & -\widetilde{\gamma}_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Os polinómios que compõem a matriz $\mathcal{B}_n$ *verificam as seguintes equações, para* $n \geq 2$,

$$\begin{array}{l} 0 = (l_n - l_{n-1})(\widetilde{\beta}_n - \beta_n) - (\widetilde{\gamma}_n - \gamma_n)\frac{\Theta^1_{n-2}}{\gamma_{n-1}} \\ 0 = l_n - l_{n-2} + \frac{\Theta^1_{n-2}(x-\beta_{n-1})}{\gamma_{n-1}}(\widetilde{\gamma}_n - \gamma_n) + (\widetilde{\beta}_n - \beta_n)\Theta_{n-1} \\ 0 = (\widetilde{\beta}_n - \beta_n)\frac{\Theta^1_{n-1}}{\gamma_n}, \\ 0 = (\widetilde{\gamma}_n - \gamma_n)\frac{\Theta^1_{n-1}}{\gamma_n} \end{array} \tag{III.33}$$

Seja $\{\mathcal{T}_n\}$ *a solução do sistema* (III.23) *e* $\widetilde{S}$ *a função de Stieltjes associada a* $\{\widetilde{P_n}\}$. *Então, a transformação racional* $T_{(a,b;c,d)}$, $a, b, c, d \in \mathbb{P}$ *com* $ad - bc \neq 0$, *é única e* $S = T_{(a,b;c,d)}(\widetilde{S})$.

Demonstração: Fazendo a subtracção das equações

$$\begin{aligned} A\mathcal{A}'_n &= \mathcal{B}_n\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_{n-1} \\ A(\widetilde{\mathcal{A}}_n)' &= \mathcal{B}_n\widetilde{\mathcal{A}}_n - \widetilde{\mathcal{A}}_n\mathcal{B}_{n-1} \end{aligned}$$

obtemos

$$A(\mathcal{A}'_n - (\widetilde{\mathcal{A}}_n)') = \mathcal{B}_n(\mathcal{A}_n - \widetilde{\mathcal{A}}_n) - (\mathcal{A}_n - \widetilde{\mathcal{A}}_n)\mathcal{B}_{n-1}.$$

que matricialmente tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} l_n & -\Theta^1_n \\ \frac{\theta^1_{n-1}}{\gamma_n} & l_{n-1} - \frac{\theta^1_{n-1}(x-\beta_n)}{\gamma_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\beta}_n - \beta_n & \widetilde{\gamma}_n - \gamma_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} \widetilde{\beta}_n - \beta_n & \widetilde{\gamma}_n - \gamma_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{n-1} & -\Theta^1_{n-1} \\ \frac{\theta^1_{n-2}}{\gamma_{n-1}} & l_{n-2} - \frac{\theta^1_{n-2}(x-\beta_{n-1})}{\gamma_{n-1}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

resultando o sistema de equações (III.33).

Analisando este sistema (III.33) temos que se $\beta_n \neq \widetilde{\beta}_n$, para um número finito de termos $n = 2, \ldots, n_0$, então $\Theta^1_{n-1} = 0$ para $n = 2, \ldots, n_0$. A partir de n_0, $\Theta^1_{n-1} \neq 0$ e $\beta_n = \widetilde{\beta}_n$.

Seja S é uma transformação racional de $\widetilde{S}$. O inverso de $T_{(a,b;c,d)}$ onde $ad - bc \neq 0$ existe e é dado por $T_{(a,-c;-b,d)}$. Se existirem duas transformações racionais T_1 e T_2 tais que $T_1(\widetilde{S}) = T_2(\widetilde{S}_2)$ então a composição $T_2^{-1} \circ T_1$ satisfaz $(T_2^{-1} \circ T_1)(\widetilde{S}) = \widetilde{S}$ e concluímos que $T_1 = T_2$ onde fica estabelecida a unicidade de T. ■

Corolário III.1. *Considerando as hipóteses do Teorema anterior, seja $\widetilde{S}$ a função de Stieltjes de $\{\widetilde{P}_n\}$ então, S é uma transformação racional de $\widetilde{S}$ do tipo*

$$\widetilde{S} = \frac{a(z) + b(z)S}{c(z) + d(z)S} \tag{III.34}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{P}$.

Pelo Teorema III.2 vimos que ao determinar uma solução do tipo (III.29) é equivalente a $\widetilde{w} = K e^{\int_{z_1}^{z} \frac{\widetilde{C}}{2A}}$ com $K \in \mathbb{C}$.

4. Determinação do polinómio $\widetilde{C}$

O polinómio $\widetilde{C}$ define a função peso $\widetilde{w}$.

Lema III.7. *Consideremos as mesmas condições que no Lema* (III.6)*. Seja S a função de Stieltjes que satisfaz* (II.1) *$AS' = BS^2 + CS + D$. Seja $\widetilde{C}$ um polinómio e $\widetilde{S}$ a função de Stieltjes relativa a $\widetilde{w}$. Seja $T_{(\alpha_1,-\beta_1;-\alpha_2,\beta_2)}$, onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{P}$, $i = 1, 2$ e $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, tal que $S = T(\widetilde{S})$. Se $\widetilde{S}$ satisfaz*

$$A\widetilde{S}' = \widetilde{C}\widetilde{S} + \widetilde{D}, \tag{III.35}$$

$\widetilde{D} \in \mathbb{P}$ então temos as seguintes relações:

$$B = (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)A + \alpha_2\beta_2\widetilde{C} + \beta_2^2\widetilde{D} \tag{III.36}$$

$$C = (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)A + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\widetilde{C} + 2\beta_1\beta_2\widetilde{D} \tag{III.37}$$

$$D = (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)A + \alpha_1\beta_1\widetilde{C} + \beta_1^2\widetilde{D}. \tag{III.38}$$

Demonstração: Se $\widetilde{C} \in \mathbb{P}$, pelo Teorema III.1 temos que $\dfrac{\widetilde{w}'}{\widetilde{w}} = \dfrac{\widetilde{C}}{A}$, e $\widetilde{C}$ é um peso semi-clássico, então resulta (III.35). Como $S = \dfrac{\alpha_1 - \beta_1 \widetilde{S}}{-\alpha_2 + \beta_2 \widetilde{S}}$ temos $\widetilde{S} = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 S}{\beta_1 + \beta_2 S}$.

Usando $\widetilde{S}$ em (III.35) obtemos a equação

$$A(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)S' = B_2 S^2 + C_2 S + D_2 \tag{III.39}$$

com

$$\begin{aligned}
B_2 &= (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)A + \alpha_2\beta_2\widetilde{C} + \beta_2^2\widetilde{D} \\
C_2 &= (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)A + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\widetilde{C} + 2\beta_1\beta_2\widetilde{D} \\
D_2 &= (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)A + \alpha_1\beta_1\widetilde{C} + \beta_1^2\widetilde{D}.
\end{aligned}$$

Como S satisfaz (II.1) e (III.39), segue-se que, se $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = 1$ então $B_2 = B$, $C_2 = C$, $D_2 = D$ e obtemos as relações (III.36). ■

Podemos encontrar $\widetilde{C}$ resolvendo o sistema de equações lineares (III.36). Consideremos (III.36) escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \alpha_2\beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & 2\beta_1\beta_2 \\ \alpha_1\beta_1 & \beta_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{C} \\ \widetilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B - (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)A \\ C - (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)A \\ D - (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)A \end{bmatrix}$$

e seja $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B - (\alpha_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_2)A \\ C - (\alpha_2\beta_1' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2'\beta_1 - \alpha_1'\beta_2)A \\ D - (\alpha_1\beta_1' - \alpha_1'\beta_1)A \end{bmatrix}$.

Caso I:

Se $\alpha_2\beta_2 \neq 0$ então

$$\beta_1\beta_2\alpha_2 u_2 - \beta_1\beta_2 u_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1) - \beta_2^2 u_3\alpha_2\beta_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{C} &= \frac{u_1 + u_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) - u_2\alpha_2\beta_2}{\alpha_2\beta_2} \\
\widetilde{D} &= \frac{u_2\alpha_2\beta_2 - u_1(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)}{\beta_2^2}.
\end{aligned}$$

Caso II:

Se $\alpha_2 = 0$ e $\beta_2 \neq 0$ então

$$\beta_2^2 u_3 - \beta_1 \beta_2 u_2 + \beta_1^2 u_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \widetilde{C} &= \frac{u_2\beta_2 - 2\beta_1 u - 1}{\alpha_1 \beta_2^2} \\ \widetilde{D} &= \frac{u_1}{\beta_2^2}. \end{aligned}$$

Se $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_2 = 0$ então $u_1 \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \widetilde{C} &= \frac{u_2}{\alpha_2 \beta_1} \\ \widetilde{D} &= \frac{u_3\alpha_2 - \alpha_1 u_2}{\alpha_2 \beta_1^2}. \end{aligned}$$

Estabelecemos, de seguida, o resultado pricipal desta secção,

Teorema III.5. *Sejam S a função de Stieltjes satisfazendo a equação de Riccati* (II.1) *e $\{Y_n\}$ a correspondente sucessão de matrizes dada por $Y_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$. Então, existem um polinómio $\widetilde{C}$(cf. Lema III.7), e uma função peso $\widetilde{w} = Ke^{\int_{z_0}^{z} \frac{\widetilde{C}}{A} dt}$, $K \in \mathbb{C}$ tais que*

$$Y_n = \begin{bmatrix} \sqrt{\widetilde{w}}\widetilde{P}_{n+1} & \frac{\widetilde{q}_{n+1}}{\sqrt{\widetilde{w}}} \\ \sqrt{\widetilde{w}}\widetilde{P}_n & \frac{\widetilde{q}_n}{\sqrt{\widetilde{w}}} \end{bmatrix} G_n L^{-1}(z)$$

onde G_n é a matriz definida no Teorema III.4, $\{\widetilde{P}_{n+1}\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativos a $\widetilde{w}$, $\{q_n\}$ a correspondente sucessão de funções de segunda espécie e L a matriz fundamental do sistema (III.22).

CAPÍTULO IV

Representação Matricial de Polinómios Ortogonais Discretos

Os polinómios ortogonais aparecem como soluções especiais de importantes equações diferenciais da física matemática tais como equações de Shohat-Freud denominadas equações de Painlevé discretas e expansões em frações contínuas de alguns números irracionais especiais.

Neste capítulo vamos estudar as famílias de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn de variável discreta definidas em redes não uniformes. O operador em diferenças divididas utilizado aqui é um operador mais geral, do tipo Askey-Wilson, definido por

$$\mathfrak{D}(f)(x) = \frac{f(\eta_2(x)) - f(\eta_1(x))}{\eta_2(x) - \eta_1(x)}$$

onde $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ são as raízes da equação quadrática

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0, \qquad A \neq 0.$$

Os polinómios ortogonais Laguerre-Hahn satisfazem uma equação em diferenças do tipo Riccati

$$A(x)(\mathfrak{D}S)(x) = B(x)S(\eta_1(x))S(\eta_2(x)) + C(x)(\mathfrak{M}S)(x) + D(x)$$

onde $A(x), B(x), C(x)$ e $D(x)$ são polinómios, $A(x) \neq 0$ e o operador $\mathfrak{M}$ está definido por

$$\mathfrak{M}(f)(x) = \frac{f(\eta_2(x)) + f(\eta_1(x))}{2}.$$

Esta equação em diferenças do tipo Riccati será o ponto de partida utilizado na abordagem que faremos neste capítulo que tem como inspiração o trabalho de Magnus [**42**].

Na secção um começamos por apresentar uma demonstração alternativa à existente em [**42**] para o Lema dito de Magnus. De seguida, daremos uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais Laguerre-Hahn discretas estabelecendo uma equivalência entre as relações de estrutura de primeira ordem para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ e sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ partindo da equação em diferenças de Riccati e utilizando vectores de polinómios designado por $\psi_n = [P_{n+1}\ P_n^{(1)}]^T$.

Na secção dois iremos encontrar uma equação em diferenças de segunda ordem que caracteriza os polinómios ortogonais discretos. O procedimento será idêntico ao que foi utilizado por Magnus em [**42, 45**] e Rebocho em [**57**] para o caso da circunferência unitária.

Na secção três estabeleceremos equações em diferenças do tipo Sylvester e começaremos por fazer um estudo da classe semi-clássica discreta onde apresentamos as soluções das equações em diferenças do tipo Sylvester na forma de dois sistemas matriciais.

1. Polinómios ortogonais Laguerre-Hahn discretos

Consideremos a sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$, sucessão de polinómios associados de primeira ordem $\{P_n^{(1)}\}$ e sucessão de funções de segunda espécie $\{q_n\}$. Sejam u uma funcional linear regular e S a função de Stieltjes associada a u. Temos que u é Laguerre-Hahn discreta se S satisfaz a equação em diferenças de Riccati

$$A(x)\mathfrak{D}(S)(x) = B(x)S(\eta_1(x))S(\eta_2(x)) + C(x)\mathfrak{M}(S)(x) + D(x) \tag{IV.1}$$

com A, B, C e D polinómios, $A \neq 0$.

A equação de Riccati (IV.1) pode, também, escrever-se da seguinte forma

$$B(x)S(\eta_1)S(\eta_2) + \left(\frac{A(x)}{\eta_2 - \eta_1} + \frac{C(x)}{2}\right) S(\eta_1) - \left(\frac{A(x)}{\eta_2 - \eta_1} - \frac{C(x)}{2}\right) S(\eta_2) + D(x) = 0.$$

As relações que se seguem serão utilizadas nas secções seguintes.

Lema IV.1. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos de variável discreta,respectivas sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ e as respectivas relações de recorrência a três termos. Consideremos, também, os operadores $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{M}$ definidos em* (I.19) *e* (I.20)*, respectivamente. Temos as seguintes relações:*

(1)
$$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{S_n}\right)(x) = \frac{S_n(\eta_2(x)) + S_n(\eta_1(x))}{2S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))}. \tag{IV.2}$$

(2) *Para as sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ temos a seguinte relação*

$$\frac{S(\eta_1(x))q_n(\eta_2(x)) + S(\eta_2(x))q_n(\eta_1(x))}{2} = \mathfrak{M}(S)(x)\mathfrak{M}(q_n)(x) - \mathrm{q}\,\mathfrak{D}(S)(x)\mathfrak{D}(q_n)(x). \tag{IV.3}$$

Demonstração: Começamos por considerar a relação de recorrência a três termos de $\{P_n(x)\}$. Dividindo ambos os membros por $P_n(x)$ obtemos

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = (x - \beta_n) - \gamma_n \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}.$$

Considerando $S_n = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ resulta que

$$S_n(x) = (x - \beta_n) - \gamma_n \frac{1}{S_{n-1}(x)}. \tag{IV.4}$$

Pela equação (IV.4) para $n+1$ e aplicando $\mathfrak{D}$ (I.19) vem

$$\mathfrak{D}(S_{n+1})(x) = 1 + \frac{\gamma_{n+1}\mathfrak{D}(S_n(x))}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))}. \tag{IV.5}$$

Aplicando o operador $\mathfrak{M}$ definido em (I.20) à equação (IV.4) temos

$$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{S_n}\right)(x) = \frac{(\mathrm{p} - \beta_{n+1}) - \mathfrak{M}(S_{n+1})(x)}{\gamma_{n+1}}. \tag{IV.6}$$

Para mostrar (IV.3) basta considerar a definição (I.20) de $\mathfrak{M}$ e de $\mathfrak{M}(fg)$ (I.27). ■

O resultado seguinte encontra-se provado por Magnus em [**42**]. Mostraremos uma forma alternativa de demonstrar este resultado.

Teorema IV.1 (de Magnus). *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. Suponhamos que $S_n(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$ satisfaz a equação*

$$a_n(x)\mathfrak{D}(S_n)(x) = b_n(x)S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x)) + c_n(x)\mathfrak{M}(S_n)(x) + d_n(x) \qquad \text{(IV.7)}$$

com a_n, b_n, c_n, d_n polinómios de graus limitados. Então

$$a_{n+1}(x) = a_n(x) - 2\,\mathrm{q}\, b_{n+1}(x) \qquad \text{(IV.8)}$$

$$b_{n+1}(x) = \frac{d_n(x)}{\gamma_{n+1}} \qquad \text{(IV.9)}$$

$$c_{n+1}(x) = -c_n(x) + 2\frac{d_n(x)}{\gamma_{n+1}}(\beta_{n+1}(x) - \mathrm{p}) \qquad \text{(IV.10)}$$

$$d_{n+1}(x) = a_n(x) + \gamma_{n+1}b_n(x) + (\mathrm{p} - \beta_{n+1})c_n(x) \qquad \text{(IV.11)}$$

$$+ (\eta_1(x) - \beta_{n+1})(\eta_2(x) - \beta_{n+1})b_{n+1}. \qquad \text{(IV.12)}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (IV.5) por a_n e utilizando a equação de Riccati em diferenças (IV.1) temos

$$a_n\mathfrak{D}(S_{n+1})(x) = a_n + \gamma_{n+1}\frac{b_nS_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x)) + c_n\mathfrak{M}(S_n)(x) + d_n}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))}$$

pela definição de $\mathfrak{M}$ (I.20) e por (IV.2) vem

$$\begin{aligned} a_n\mathfrak{D}(S_{n+1})(x) &= a_n + \gamma_{n+1}b_n \\ &\quad + \gamma_{n+1}c_n\frac{S_n(\eta_1(x)) + S_n(\eta_2(x))}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))} + \frac{\gamma_{n+1}d_n}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))} \\ a_n\mathfrak{D}(S_{n+1})(x) &= a_n + \gamma_{n+1}b_n + \gamma_{n+1}c_n\mathfrak{M}\left(\frac{1}{S_n}\right)(x) + \frac{\gamma_{n+1}d_n}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))}. \end{aligned}$$

Pela relação (IV.6) temos

$$a_n\mathfrak{D}(S_{n+1})(x) = a_n + \gamma_{n+1}b_n + c_n(\mathrm{p} - \beta_{n+1}) - c_n\mathfrak{M}((S_{n+1})) + \frac{\gamma_{n+1}d_n}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))}. \qquad \text{(IV.13)}$$

Por (IV.4) temos que

$$\frac{\gamma_{n+1}d_n(x)}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))} = \frac{d_n(x)}{\gamma_{n+1}}((\eta_1(x)-\beta_{n+1})(\eta_2(x)-\beta_{n+1})$$
$$+(\eta_1(x)-\beta_{n+1})S_{n+1}(\eta_2(x))+(\eta_2(x)-\beta_{n+1})S_{n+1}(\eta_1(x))+S_{n+1}(\eta_1(x))S_{n+1}(\eta_2(x)))$$

ou ainda,

$$\frac{\gamma_{n+1}d_n}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))} = \frac{d_n}{\gamma_{n+1}}((\eta_1(x)-\beta_{n+1})(\eta_2(x)-\beta_{n+1})+\eta_2(x)S_{n+1}(\eta_1(x))+$$
$$\eta_1(x)S_{n+1}(\eta_2(x))-2\beta_{n+1}(\mathfrak{M}S_{n+1})(x)+S_{n+1}(\eta_1(x))S_{n+1}(\eta_2(x))). \quad \text{(IV.14)}$$

Como

$$\eta_2(x)S_{n+1}(\eta_1(x))+\eta_1(x)S_{n+1}(\eta_2(x)) = -(\eta_2(x)-\eta_1(x))^2\mathfrak{D}(S_{n+1})(x)$$
$$+2\,\mathrm{q}\,\mathfrak{D}(S_{n+1})(x)+2\,\mathrm{p}\,\mathfrak{M}(S_{n+1})(x)\,,$$

substituindo na equação (IV.14) vem

$$\frac{\gamma_{n+1}d_n(x)}{S_n(\eta_1(x))S_n(\eta_2(x))} = \frac{d_n(x)}{\gamma_{n+1}}((-\eta_1(x)-\beta_{n+1})(\eta_2(x)-\beta_{n+1})+$$
$$2(\mathrm{p}-\beta_{n+1})\mathfrak{M}(S_{n+1})(x)+S_{n+1}(\eta_1(x))S_{n+1}(\eta_2(x))-((\eta_2(x)-\eta_1(x))^2+2\,\mathrm{q})\mathfrak{D}(S_{n+1})).$$

Substituindo na equação (IV.13) obtemos

$$a_n(x)\mathfrak{D}(S_{n+1})(x) = a_n(x)-\gamma_{n+1}b_n(x)-c_n(x)(\mathrm{p}-\beta_{n+1})+c_n(x)\mathfrak{M}(S_{n+1}))$$
$$-\frac{d_n(x)}{\gamma_{n+1}}((-\eta_1(x)-\beta_{n+1})(\eta_2(x)-\beta_{n+1})+2(\mathrm{p}-\beta_{n+1})\mathfrak{M}(S_{n+1})(x)$$
$$+S_{n+1}(\eta_1(x))S_{n+1}(\eta_2(x))-((\eta_2(x)-\eta_1(x))^2+2\,\mathrm{q})\mathfrak{D}(S_{n+1})).$$

Comparando com a equação (IV.7) obtemos os coeficientes (IV.8) a (IV.12). ■

O objectivo principal desta secção consiste em obter uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos Laguerre-Hahn de variável discreta onde adaptaremos o método desenvolvido no capítulo II ao caso discreto. Começamos por estabelecer as relações de estrutura de primeira ordem na classe Laguerre-Hahn discreta sendo $\psi_n = [P_{n+1}\ P_n^{(1)}]^T$:

Teorema IV.2. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes e $\{\psi_n\}$ a sucessão de vectores associada a u. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *S satisfaz a equação em diferenças do tipo Riccati* (IV.1).

(2) *A sucessão de vectores $\{\psi_n\}$ satisfaz, para $n \in \mathbb{N}$,*

$$A\mathfrak{D}(\psi_n) = l_{n+1}\psi_n(\eta_1) + \begin{bmatrix} -\frac{C}{2} & -B \\ D & \frac{C}{2} \end{bmatrix} \psi_n(\eta_2) + \Theta^1_{n+1}\psi_{n-1}(\eta_1)$$

(3) *A sucessão vectorial $\{\psi_n\}$, também, satisfaz a equação*

$$A\mathfrak{D}(\psi_n) = l_{n+1}\psi_n(\eta_1) + \begin{bmatrix} -\frac{C}{2} & -B \\ D & \frac{C}{2} \end{bmatrix} \psi_n(\eta_1) + \Theta^1_{n+1}\psi_{n-1}(\eta_2).$$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2)

Como $S_{n+1}(x) = \dfrac{q_{n+1}}{P_{n+1}} + \dfrac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}$ substituindo $S_{n+1}(x)$ na equação em diferenças do tipo Riccati (IV.1) e utilizando a definição de $\mathfrak{M}$ vem

$$A(x)\mathfrak{D}\left(\frac{q_{n+1}}{P_{n+1}} + \frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}\right) = B(x)\left(\frac{q_{n+1}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)} + \frac{P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)}\right)\left(\frac{q_{n+1}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_2)}\right.$$
$$\left.+\frac{P_n^{(1)}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_2)}\right) + \frac{C(x)}{2}\left(\frac{q_{n+1}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)} + \frac{P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)} + \frac{q_{n+1}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_2)} + \frac{P_n^{(1)}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_2)}\right) + D(x).$$

Como $\mathfrak{D}$ é linear e pela definição (I.26), de $\mathfrak{D}(f/g)$, para a função $\eta_1(x)$ temos

$$A\mathfrak{D}\left(\frac{q_{n+1}}{P_{n+1}}\right) + A\frac{\mathfrak{D}(P_n^{(1)})P_{n+1}(\eta_1) - \mathfrak{D}(P_{n+1})P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}$$
$$= B\left(\frac{q_{n+1}(\eta_1)q_{n+1}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} + \frac{q_{n+1}(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} + \frac{q_{n+1}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}\right)$$
$$+ B\left(\frac{P_n^{(1)}(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}\right) + \frac{C}{2}\left(\frac{q_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2) + q_{n+1}(\eta_2)P_{n+1}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}\right)$$
$$+ \frac{C}{2}\left(\frac{P_n^{(1)}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} + \frac{P_n^{(1)}(\eta_2)P_{n+1}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}\right) + D\frac{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}, \quad \text{(IV.15)}$$

ou seja,

$$\left(A(x)\mathfrak{D}\left(\frac{q_{n+1}}{P_{n+1}}\right)(x)\right)P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)-B(x)q_{n+1}(\eta_1)q_{n+1}(\eta_2)$$
$$-B(x)(q_{n+1}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)+q_{n+1}(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_2))\frac{C(x)}{2}q_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)+q_{n+1}(\eta_2)P_{n+1}(\eta_1)$$
$$=-A(x)\mathfrak{D}(P_n^{(1)})P_{n+1}(\eta_1)-\mathfrak{D}(P_{n+1})P_n^{(1)}(\eta_1)+B(x)P_n^{(1)}(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_2)$$
$$+\frac{C(x)}{2}(P_n^{(1)}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)+P_n^{(1)}(\eta_2)P_{n+1}(\eta_1))+D(x)P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2).$$

Fazendo

$$\Theta_{n+1}=-A\mathfrak{D}(P_n^{(1)})P_{n+1}(\eta_1)+A\mathfrak{D}(P_{n+1})P_n^{(1)}(\eta_1))+BP_n^{(1)}(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_2)$$
$$+\frac{C}{2}(P_n^{(1)}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)+P_n^{(1)}(\eta_2)P_{n+1}(\eta_1))+DP_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2) \quad \text{(IV.16)}$$

temos que Θ_{n+1} é um polinómio pois temos simetria em $\eta_1(x)$ e em $\eta_2(x)$, isto significa que podemos efectuar todo o processo considerando η_2 no lugar de η_1, e tem grau limitado pois $q_n(x)\sim x^{-2n-1}$ sendo

$$\operatorname{gr}\Theta_{n+1}=\max\{\operatorname{gr}A-2,\operatorname{gr}B-2,\operatorname{gr}C-1\}.$$

Pela equação de Liouville-Ostrogradski (I.33) temos

$$\frac{\Theta_{n+1}}{\gamma_1\cdots\gamma_n}(P_n(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_1)-P_{n+1}(\eta_1)P_{n-1}^{(1)}(\eta_1))=-A\mathfrak{D}(P_n^{(1)})P_{n+1}(\eta_1)$$
$$+A\mathfrak{D}(P_{n+1})P_n^{(1)}(\eta_1))+\frac{C}{2}(P_n^{(1)}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)+\frac{C}{2}P_n^{(1)}(\eta_2)P_{n+1}(\eta_1))$$
$$+BP_n^{(1)}(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_2)+DP_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2).$$

Fazendo $\Theta_{n+1}^1=\frac{\Theta_{n+1}}{\gamma_1\cdots\gamma_n}$ temos

$$(-\Theta_{n+1}^1P_n(\eta_1)+A\mathfrak{D}(P_{n+1})+BP_n^{(1)}(\eta_2)+\frac{C}{2}P_{n+1}(\eta_2))P_n^{(1)}(\eta_1)$$
$$=(-\Theta_{n+1}^1P_{n-1}^{(1)}(\eta_1)+A\mathfrak{D}(P_n^{(1)})-\frac{C}{2}P_n^{(1)}(\eta_2)-DP_{n+1}(\eta_2))P_{n+1}(\eta_1).$$

Como os polinómios $P_n^{(1)}(\eta_1)$ e $P_{n+1}(\eta_1)$ não têm zeros em comum então existe um polinómio l_{n+1} com grau independente de n tal que

$$\begin{aligned} -\Theta_{n+1}^1 P_n(\eta_1) + A\mathfrak{D}(P_{n+1}) + BP_n^{(1)}(\eta_2) + \frac{C}{2}P_{n+1}(\eta_2) &= l_{n+1}P_{n+1}(\eta_1) \\ -\Theta_{n+1}^1 P_{n-1}^{(1)}(\eta_1) + A\mathfrak{D}(P_n^{(1)}) - \frac{C}{2}P_n^{(1)}(\eta_2) - DP_{n+1}(\eta_2) &= l_{n+1}P_n^{(1)}(\eta_1) \end{aligned}$$

ou seja, obtemos as relações

$$A\mathfrak{D}(P_{n+1}) = l_{n+1}P_{n+1}(\eta_1) + \Theta_{n+1}^1 P_n(\eta_1) - BP_n^{(1)}(\eta_2) - \frac{C}{2}P_{n+1}(\eta_2) \quad \text{(IV.17)}$$

$$A\mathfrak{D}(P_n^{(1)}) = l_{n+1}P_n^{(1)}(\eta_1) + \Theta_{n+1}^1 P_{n-1}^{(1)}(\eta_1) + \frac{C}{2}P_n^{(1)}(\eta_2) + DP_{n+1}(\eta_2) \quad \text{(IV.18)}$$

Considerando o vector $\psi_n = [P_{n+1} \; P_n^{(1)}]^T$ podemos escrever vectorialmente as relações (IV.17), (IV.18) da seguinte forma

$$A\mathfrak{D}(\psi_n) = l_{n+1}\psi_n(\eta_1) + \begin{bmatrix} -\frac{C}{2} & -B \\ D & \frac{C}{2} \end{bmatrix} \psi_n(\eta_2) + \Theta_{n+1}^1 \psi_{n-1}(\eta_1) \quad \text{(IV.19)}$$

(1) $\Rightarrow$ (3) De modo análogo ao anterior podemos obter as relações de estrutura de primeira ordem para $\{P_n\}$ mas considerando a função $\eta_2(x)$. Começamos por utilizar a definição (I.26) do operador $\mathfrak{D}\,(f/g)$ para a função $\eta_2(x)$ em (IV.15) e, posteriormente, a equação (I.33) também em $\eta_2(x)$. Deste modo obtemos as relações de primeira ordem

$$A\mathfrak{D}(P_{n+1}) = l_{n+1}P_{n+1}(\eta_2) + \Theta_{n+1}^1 P_n(\eta_2) - BP_n^{(1)}(\eta_1) - \frac{C}{2}P_{n+1}(\eta_1) \quad \text{(IV.20)}$$

$$A\mathfrak{D}(P_n^{(1)}) = l_{n+1}P_n^{(1)}(\eta_2) + \Theta_{n+1}^1 P_{n-1}^{(1)}(\eta 21) + \frac{C}{2}P_n^{(1)}(\eta_1) + DP_{n+1}(\eta_1). \quad \text{(IV.21)}$$

Escrevendo vectorialmente as relações (IV.20) e (IV.21) vem

$$A\mathfrak{D}(\psi_n)(x) = l_{n+1}\psi_n(\eta_2) + \begin{bmatrix} -\frac{C}{2} & -B \\ D & \frac{C}{2} \end{bmatrix} \psi_n(\eta_1) + \Theta_n^1 \psi_{n-1}(\eta_2) \quad \text{(IV.22)}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Considerando as relações de estrutura (IV.17) e (IV.18) podemos obter a equação em diferenças do tipo Riccati. Para isso multiplicamos a equação (IV.17)

por $-\dfrac{P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}$ e a equação (IV.18) por $\dfrac{1}{P_{n+1}(\eta_2)}$ temos

$$\begin{aligned}-\frac{A\mathfrak{D}(P_{n+1})P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} &= -l_{n+1}\frac{P_{n+1}(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} + \Theta_{n+1}^1\frac{P_n(\eta_1)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}\\ &\quad + B\frac{P_n^{(1)}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} - \frac{C}{2}\frac{P_{n+1}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}\end{aligned}$$

e

$$A\frac{\mathfrak{D}(P_n^{(1)})}{P_{n+1}(\eta_2)} = l_{n+1}\frac{P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_2)} + \Theta_{n+1}^1\frac{P_{n-1}^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_2)} + \frac{C}{2}\frac{P_n^{(1)}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_2)} + D.$$

Somando estas duas equações obtemos

$$\begin{aligned}A\frac{\mathfrak{D}(P_n^{(1)})}{P_{n+1}(\eta_2)} - \frac{A\mathfrak{D}(P_{n+1})P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} &= \Theta_{n+1}^1\frac{P_{n-1}^{(1)}(\eta_2)P_{n+1}(\eta_2) - P_{n+1}(\eta_1)P_{n-1}^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)}\\ &\quad - B\frac{P_n^{(1)}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} + \frac{C}{2}\frac{P_{n+1}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)} + \frac{C}{2}\frac{P_n^{(1)}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_2)} + D\end{aligned}$$

pela equação (I.33) vem

$$\begin{aligned}A\mathfrak{D}\left(\frac{P_n^{(1)}}{P_{n+1}}\right) &= \Theta_{n+1}^1\frac{\gamma_n\cdots\gamma_1}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} - B\frac{P_n^{(1)}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)P_{n+1}(\eta_2)} + \frac{C}{2}\frac{P_{n+1}(\eta_2)P_n^{(1)}(\eta_1)}{P_{n+1}(\eta_1)}\\ &\quad + \frac{C}{2}\frac{P_n^{(1)}(\eta_2)}{P_{n+1}(\eta_2)} + D.\end{aligned}$$

Como a sucessão $\{P_n\}$ é ortogonal a uma medida de Borel positiva então pelo Teorema de Markov $\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n} \rightrightarrows S$ então considerando o limite na equação anterior temos

$$A\mathfrak{D}(S_n) = BS_n(\eta_1)S_n(\eta_2) + \frac{C}{2}(S_n(\eta_2) + S_n(\eta_1)) + D$$

pela definição (I.20) de $\mathfrak{M}$ temos a equação de Riccati em diferenças (IV.1). ∎

Observação IV.1. Consideremos as equações vectoriais(IV.19) e (IV.22). Somando estas equações e usando a definição de $\mathfrak{M}$ obtemos

$$A\mathfrak{D}(\psi_n)(x) = \begin{bmatrix} l_{n+1} - \frac{C}{2} & -B \\ D & l_{n+1} + \frac{C}{2}\end{bmatrix}\mathfrak{M}(\psi_n)(x) + \Theta_{n+1}^1\mathfrak{M}(\psi_{n-1})(x). \tag{IV.23}$$

Também temos uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais discretos em termos das funções de segunda espécie:

Teorema IV.3. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes e $\{q_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *S satisfaz a equação em diferençasdo tipo Riccati* (IV.1).

(2) *A sucessão de funções de segunda espécie $\{q_n\}$ satisfaz a equação, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$A\mathfrak{D}(q_{n+1}) = l_{n+1}(x)q_{n+1}(\eta_2(x)) + \Theta^1_{n+1}(x)q_n(\eta_2(x)) + \left(\frac{C}{2} + B(x)S(\eta_2(x))\right)q_{n+1}(\eta_1(x)). \quad \text{(IV.24)}$$

(3) *A sucessão de funções de segunda espécie $\{q_n\}$, também, satisfaz a equação, $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$A\mathfrak{D}(q_{n+1}) = l_{n+1}(x)q_n(\eta_1(x)) + \Theta^1_{n+1}(x)q_n(\eta_1(x)) + \left(\frac{C}{2} + B(x)S(\eta_1(x))\right)q_{n+1}(\eta_2(x)) \quad \text{(IV.25)}$$

onde $l_{n+1}, \Theta^1_{n+1} \in \mathbb{P}$ cujos graus não dependem de n.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Consideremos a equação de Hermite-Padé (I.8)

$$P_{n+1}(x)S(x) - P^{(1)}_n = q_{n+1}(x).$$

Aplicando o operador $\mathfrak{D}$ em ambos os membros desta equação e multiplicando-os por $A(x)$ vem

$$A(x)\mathfrak{D}(q_{n+1})(x) = A(x)\mathfrak{D}(P_{n+1}S)(x) - A(x)\mathfrak{D}(P^{(1)}_n)(x).$$

Pela relação (I.24) obtemos

$$A(x)\mathfrak{D}(q_{n+1})(x) = A(x)\mathfrak{D}(P_{n+1})(x)S(\eta_1(x)) + A(x)\mathfrak{D}(S)(x)P_{n+1}(\eta_2(x)) - A(x)\mathfrak{D}(P^{(1)}_n)(x)$$

pelas relações de estrutura de primeira ordem (IV.17) e (IV.18) temos

$$
\begin{aligned}
&A(x)\mathfrak{D}(q_{n+1})(x) = l_{n+1}(x)P_{n+1}(\eta_1(x))S(\eta_1(x)) + \Theta^1_{n+1}(x)P_n(\eta_1(x))S(\eta_1(x)) \\
&- B(x)P^{(1)}_n(\eta_2(x))S(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}P_{n+1}(\eta_1(x))S(\eta_1(x)) + A(x)\mathfrak{D}(S)(x)P_{n+1}(\eta_2(x)) \\
&- l_{n+1}(x)P^{(1)}_n(\eta_1(x)) - \Theta^1_{n+1}(x)P^{(1)}_{n-1}(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}P^{(1)}_n(\eta_2(x)) - D(x)P_{n+1}(\eta_2(x))
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&A(x)\mathfrak{D}(q_{n+1})(x) \\
&\quad = A(x)\mathfrak{D}(S)(x)P_{n+1}(\eta_2(x)) + l_{n+1}(x)(P_{n+1}(\eta_1(x))S(\eta_1(x)) - P^{(1)}_n(\eta_1(x))) \\
&\quad + \Theta^1_{n+1}(x)(P_n(\eta_1(x))S(\eta_1(x)) - P^{(1)}_{n-1}(\eta_1(x))) - B(x)P^{(1)}_n(\eta_2(x))S(\eta_1(x)) \\
&\qquad - \frac{C(x)}{2}(P_{n+1}(\eta_1(x))S(\eta_1(x)) - P^{(1)}_n(\eta_1(x))) - D(x)P_{n+1}(\eta_2(x))
\end{aligned}
$$

Pela equação em diferenças de Riccati (IV.1) obtemos a equação (IV.24)

$$
\begin{aligned}
A(x)\mathfrak{D}(q_{n+1})(x) &= l_{n+1}(x)q_{n+1}(\eta_2(x)) + \Theta^1_{n+1}(x)q_n(\eta_2(x)) \\
&\qquad + \left(\frac{C(x)}{2} + B(x)S(\eta_2(x))\right) q_{n+1}(\eta_1(x)).
\end{aligned}
$$

(1) $\Rightarrow$ (3) Esta relação, (IV.25), obtém-se de modo análogo ao anterior fazendo $\eta_2(x)$ no lugar de $\eta_1(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Consideremos a equação (IV.24) para n

$$
\begin{aligned}
A(x)\mathfrak{D}(q_n)(x) &= l_n(x)q_n(\eta_2(x)) + \Theta^1_n(x)q_{n-1}(\eta_2(x)) \\
&\qquad + \left(\frac{C(x)}{2} + B(x)S(\eta_2(x))\right) q_n(\eta_1(x)).
\end{aligned}
$$

Fazendo $n = 0$ resulta

$$A\mathfrak{D}(q_0) = l_0(x)q_0(\eta_2(x)) + \Theta^1_0(x)q_{-1}(\eta_2(x)) + \left(\frac{C}{2} + B(x)S(\eta_2(x))\right) q_0(\eta_1(x)),$$

como por definição $q_0 = S$ temos

$$A\mathfrak{D}(S) = \frac{C}{2}S(\eta_2(x)) + D + \left(\frac{C}{2} + B(x)S(\eta_2(x))\right) S(\eta_1(x))\,,$$

que é a equação de Riccati em diferenças para S, (IV.1).

(3) $\Rightarrow$ (1) De modo análogo obtemos que partindo de (IV.25) se obtém (IV.1). ■

Observação IV.2. As relações (IV.24) e (IV.25), para as sucessões de funções de segunda espécie $\{q_n\}$, podem escrever-se vectorialmente da seguinte forma

$$A\mathfrak{D}(Q_n) = \begin{bmatrix} l_{n+1} & 0 \\ 0 & l_n \end{bmatrix} \mathfrak{M}(Q_n) + \begin{bmatrix} \Theta^1_{n+1} + C/2 & 0 \\ 0 & \Theta^1_n + C/2 \end{bmatrix} \mathfrak{M}(Q_{n-1}) \\ + B\mathfrak{M}(S)I_2\mathfrak{M}(Q_{n-1}) - \mathrm{q}\, B\mathfrak{D}(S)I_2\mathfrak{D}(Q_{n-1}) \quad \text{(IV.26)}$$

onde $Q_n = [q_{n+1} \quad q_n]^T$. Na demonstração foram utilizadas a relação de recorrência a três termos e a relação (IV.3).

2. Equação em diferenças de segunda ordem

No trabalho [**42**], Magnus, apresenta uma equação em diferenças de segunda ordem para os polinómios ortogonais Laguerre-Hahn de variável discreta. Nesta secção iremos, também, estabelecer uma equação em diferenças de segunda ordem para os polinómios Laguerre-Hahn de variável discreta mas considerando as sucessões de vectores ψ_n.

No Teorema seguinte mostraremos que as sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn satisfazem uma equação em diferenças de segunda ordem com coeficientes matriciais:

Teorema IV.4. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes e $\{\psi_n\}$ a sucessão de vectores associada a u.*

Se S satisfaz a equação em diferenças do tipo Riccati (IV.1).

Então para $n \in \mathbb{N}$, $\{\psi_n\}$ satisfaz a equação em diferenças de segunda ordem

$$\mathcal{A}_n\psi_n(y_{k+1}) + \mathcal{B}_n\psi(y_k) + \mathcal{C}_n\psi_n(y_{k-1}) = 0_{2\times 1} \quad \text{(IV.27)}$$

com coeficientes definidos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n &= \Theta_n^1(x_{k-1})\begin{bmatrix} \frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k}+\frac{C(x_k)}{2} & B(x_k) \\ -D(x_k) & \frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k}-\frac{C(x_k)}{2}\end{bmatrix}\\
\mathcal{B}_n &= \left[\Theta_n^1(x_k)\left(l_n(x_{k-1})-\frac{A(x_{k-1})}{y_k-y_{k-1}}\right)-\Theta_n^1(x_{k-1})\left(\frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k}+l_n(x_k)\right)\right]I_{2\times 2}\\
\mathcal{C}_n &= \Theta_n^1(x_k)\begin{bmatrix} \frac{A(x_{k-1})}{y_k-y_{k-1}}-\frac{C(x_{k-1})}{2} & -B(x_{k-1}) \\ D(x_{k-1}) & \frac{A(x_{k-1})}{y_k-y_{k-1}}+\frac{C(x_{k-1})}{2}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Consideremos as relações de primeira ordem (IV.17) e (IV.20) para as funções $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$. Fazendo $x = x_k$ com $k = 0, \ldots, n$ na equação (IV.17) temos

$$\begin{aligned}
A(x_k)\mathfrak{D}(P_n)(x_k) = l_n(x_k)P_n(\eta_1(x_k)) + \Theta_n^1(x_k)P_{n+1}(\eta_1(x_k))\\
- B(x_k)P_{n-1}^{(1)}(\eta_2(x_k)) - \frac{C(x_k)}{2}P_n(\eta_2(x_k)),
\end{aligned}$$

colocando na rede vem $\eta_1(x_k) = \eta_2(x_{k-1}) = y_k$ obtendo a equação

$$\begin{aligned}
A(x_k)\mathfrak{D}(P_n)(x_k) = (l_n(x_k)P_n(y_k) + \Theta_n^1(x_k)P_{n+1}(y_k)\\
- B(x_k)P_{n-1}^{(1)}(y_{k+1}) - \frac{C(x_k)}{2}P_n(y_{k+1}). \quad \text{(IV.28)}
\end{aligned}$$

Fazendo, agora, $x = x_{k-1}$ com $k = 0, 1, \ldots, n$ em (IV.20) vem

$$\begin{aligned}
A(x_{k-1})\mathfrak{D}(P_n)(x_{k-1}) = (l_n(x_{k-1})P_n(\eta_2()x_{k-1}) + \Theta_n^1(x_{k-1})P_{n+1}(\eta_2(x_{k-1})))\\
- B(x_{k-1})P_{n-1}^{(1)}(\eta_1(x_{k-1})) - \frac{C}{2}P_n(\eta_1(x_{k-1})),
\end{aligned}$$

colocando na rede vem $\eta_1(x_k) = \eta_2(x_{k-1}) = y_k$,

$$\begin{aligned}
A(x_{k-1})\mathfrak{D}(P_n)(x_{k-1}) = (l_n(x_{k-1})P_n(\eta_2(x_{k-1})) + \Theta_n^1(x_{k-1})P_{n+1}(y_k)+\\
- B(x_{k-1})P_{n-1}^{(1)}(y_{k-1}) - \frac{C}{2}P_n(y_{k-1}). \quad \text{(IV.29)}
\end{aligned}$$

Para eliminar $P_{n+1}(y_k)$ multiplicamos (IV.28) por $\Theta_n^1(x_{k-1})$ e (IV.29) por $\Theta_n^1(x_k)$. Subtraímos as equações resultantes e obtemos

$$\begin{aligned}
&\Theta_n^1(x_{k-1})A(x_k)\mathfrak{D}(P_n)(x_k) - \Theta_n^1(x_k)A(x_{k-1})\mathfrak{D}(P_n)(x_{k-1}) \\
&\quad = (\Theta_n^1(x_{k-1})l_n(x_k) - \Theta_n^1(x_k)l_n(x_{k-1}))P_n(y_k) - B(x_k)P_{n-1}^{(1)}(y_{k+1})\Theta_n^1(x_{k-1}) + \\
&B(x_{k-1})P_{n-1}^{(1)}(y_{k-1})\Theta_n^1(x_k) - \frac{C(x_k)}{2}P_n(y_{k+1})\Theta_n^1(x_{k-1})) + \frac{C(x_{k-1})}{2}P_n(y_{k-1})\Theta_n^1(x_k)).
\end{aligned}$$

Fazendo actuar $\mathfrak{D}$ e tendo em conta que $\eta_1(x_k) = \eta_2(x_{k-1}) = y_k$ resulta a equação seguinte:

$$\begin{aligned}
&\Theta_n^1(x_{k-1})\left(\frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k} + \frac{C(x_k)}{2}\right)P_n(y_{k+1}) + \\
&\left[-\Theta_n^1(x_{k-1})\left(\frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k} + l_n(x_k)\right) - \Theta_n^1(x_k)\left(\frac{A(x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} - l_n(x_{k-1})\right)\right]P_n(y_k) + \\
&\quad \Theta_n^1(x_k)\left(\frac{A(x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} - \frac{C(x_{k-1})}{2}\right)P_n(y_{k-1}) + B(x_k)P_{n-1}^{(1)}(y_{k+1})\Theta_n^1(x_{k-1}) \\
&\qquad - B(x_{k-1})P_{n-1}^{(1)}(y_{k-1})\Theta_n^1(x_k) = 0. \qquad \text{(IV.30)}
\end{aligned}$$

Utilizando um processo análogo ao anterior nas relações de estrutura de primeira ordem (IV.18) e (IV.21) resulta a equação

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k} - \frac{C(x_k)}{2}\right)\Theta_n^1(x_{k-1})P_{n-1}^{(1)}(y_{k+1}) + \Theta_n^1(x_k)\frac{l_n(x_{k-1}) - A(x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}}P_{n-1}^{(1)}(y_k) - \\
&\Theta_n^1(x_{k-1})\left(\frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k} + l_n(x_k)\right)P_{n-1}^{(1)}(y_k) + \left(\frac{A(x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} + \frac{C(x_{k-1})}{2}\right)\Theta_n^1(x_k) \\
&\times P_{n-1}^{(1)}(y_{k-1}) + \Theta_n^1(x_k)D(x_{k-1})P_n(y_{k-1}) - D(x_k)P_n(y_{k+1}\Theta_n^1(x_{k-1}) = 0. \qquad \text{(IV.31)}
\end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial as equações (IV.30) e (IV.31) vem para $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\Theta_n^1(x_{k-1}) \begin{bmatrix} \frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k} + \frac{C(x_k)}{2} & B(x_k) \\ -D(x_k) & \frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k} - \frac{C(x_k)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n(y_{k+1}) \\ P_{n-1}^{(1)}(y_{k+1}) \end{bmatrix}$$
$$- \left[\Theta_n^1(x_k)\left(\frac{A(x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} - l_n(x_{k-1})\right) + \Theta_n^1(x_{k-1})\left(\frac{A(x_k)}{y_{k+1} - y_k} + l_n(x_k)\right)\right] \begin{bmatrix} P_n(y_k) \\ P_{n-1}^{(1)}(y_k) \end{bmatrix}$$
$$+ \Theta_n^1(x_k) \begin{bmatrix} \frac{A(x_{k-1})}{y_k-y_{k-1}} - \frac{C(x_{k-1})}{2} & -B(x_{k-1}) \\ D(x_{k-1}) & \frac{A(x_{k-1})}{y_k-y_{k-1}} + \frac{C(x_{k-1})}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n(y_{k-1}) \\ P_{n-1}^{(1)}(y_{k-1}) \end{bmatrix} = 0_{2\times 1}.$$

que é uma equação em diferenças matricial de segunda ordem da forma (IV.27). ■

As sucessões de funções de segunda espécie também verificam uma equação em diferenças de segunda ordem.

Teorema IV.5. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes e $\{q_n\}$ a sucessão de funções de segunda espécie de variável discreta.*

Se S satisfaz a equação em diferenças do tipo Riccati (IV.1). *Então, a sucessão $\{q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, satisfaz a equação em diferenças de segunda ordem com coeficientes polinomiais*

$$\Theta_n^1(x_k)\left(-\frac{A(x_k)}{y_{k+1} - y_k} + \frac{C(x_k)}{2} - B(x_k)S(y_k)\right) q_n(y_{k+1})$$
$$+ \left((\frac{A(x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} - l_n(x_{k-1}))\Theta_n^1(x_k) + (\frac{A(x_k)}{y_{k+1} + y_k} - l_n(x_k))\Theta_n^1(x_{k-1})\right) q_n(y_k)$$
$$+ \left(-\frac{A(x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} - \frac{C(x_{k-1})}{2} + B(x_{k-1})S(y_k)\right) q_n(y_{k-1}) = 0. \quad \text{(IV.32)}$$

Demonstração: Pelo Teorema IV.2 temos que as sucessões de funções de segunda espécie q_n satisfazem as relações de primeira ordem (IV.24)

$$A(x)\mathfrak{D}(q_n)(x) = l_n(x)q_n(\eta_2(x)) + \Theta_n^1(x)q_{n+1}(\eta_2(x))$$
$$+ \left(\frac{C(x)}{2} - B(x)S(\eta_2(x))\right) q_n(\eta_1(x))$$

pela definição de $\mathfrak{D}$ (I.19), vem

$$A(x)\left(\frac{q_n(\eta_2(x))-q_n(\eta_1(x))}{\eta_2(x)-\eta_1(x)}\right)=l_n(x)q_n(\eta_2(x))$$
$$+\Theta_n^1(x)q_{n+1}(\eta_2(x))+\left(\frac{C(x)}{2}-B(x)S(\eta_2(x))\right)q_n(\eta_1(x))$$

Fazendo $x=x_{k-1}$ obtemos

$$A(x_{k-1})\left(\frac{q_n(\eta_2(x_{k-1}))-q_n(\eta_1(x_{k-1}))}{\eta_2(x_{k-1})-\eta_1(x_{k-1})}\right)=l_n(x_{k-1})q_n(\eta_2(x_{k-1}))$$
$$+\Theta_n^1(x_{k-1})q_{n+1}(\eta_2(x_{k-1}))+\left(\frac{C(x_{k-1})}{2}-B(x_{k-1})S(\eta_2(x_{k-1}))\right)q_n(\eta_1(x_{k-1})).$$

Se consideramos os pontos na rede temos $\eta_1(x_k)=\eta_2(x_{k-1})=y_k$ então

$$\left(\frac{A(x_{k-1})}{y_k-y_{k-1}}-l_n(x_{k-1})\right)q_n(y_k)-\Theta_n^1(x_{k-1})q_{n+1}(y_k)$$
$$+\left(-\frac{A(x_{k-1})}{y_k-y_{k-1}}-\frac{C(x_{k-1})}{2}+B(x_{k-1})S(y_k)\right)q_n(y_{k-1}). \quad \text{(IV.33)}$$

Fazendo de modo análogo para (IV.25)

$$A(x)\mathfrak{D}(q_n)(x)=l_n(x)q_n(\eta_1(x))+\Theta_n^1(x)q_{n+1}(\eta_1(x))$$
$$+\left(\frac{C(x)}{2}-B(x)S(\eta_1(x))\right)q_n(\eta_2(x))$$

aplicando a definição do operador $\mathfrak{D}$ e fazendo $x=x_k$ vem

$$A(x_k)\left(\frac{q_n(\eta_2(x_k))-q_n(\eta_1(x_k))}{\eta_2(x_k)-\eta_1(x_k)}\right)=l_n(x_k)q_n(\eta_1(x_k))$$
$$+\Theta_n^1(x_{k-1})q_{n+1}(\eta_1(x_k))+\left(\frac{C(x_k)}{2}-B(x_k)S(\eta_1(x_k))\right)q_n(\eta_2(x_k)).$$

ou seja,

$$\left(-\frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k}-l_n(x_k)\right)q_n(y_k)-\Theta_n^1(x_k)q_{n+1}(y_k)$$
$$+\left(\frac{A(x_k)}{y_{k+1}-y_k}-\frac{C(x_k)}{2}+B(x_k)S(y_k)\right)q_n(y_{k+1})=0. \quad \text{(IV.34)}$$

Para eliminar $q_{n+1}(y_k)$ vamos multiplicar a equação (IV.33) por $\Theta_n^1(x_k)$ e (IV.34) por $\Theta_n^1(x_{k-1})$ e subtraímos as equações resultantes obtendo a equação em diferenças de segunda ordem (IV.32). ■

3. Equação matricial de Sylvester

O objectivo desta secção consiste em encontrar uma representação para as sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn discretos em termos de equações matriciais do tipo Sylvester.

Consideremos a função de Stieltjes que satisfaz a equação em diferenças do tipo Riccati (IV.1)

$$A(x)\mathfrak{D}(S)(x) = B(x)S(\eta_1(x))S(\eta_2(x)) + C(x)\mathfrak{M}(S)(x) + D(x).$$

Consideremos, também, a sucessão de matrizes $\{Y_n\}$ onde $Y_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n^{(1)} \\ P_n & P_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$ como foi definida no capítulo I, as sucessões de polinómios ortogonais mónicos de variável discreta $\{P_n\}$, polinómios ortogonais associados de primeira espécie $\{P_n^{(1)}\}$, funções de segunda espécie $\{q_n\}$ e ainda a sucessão de vectores $Q_n = [q_{n+1}\ q_n]^T$.

Começamos com uma reinterpretação das equações obtidas no Teorema IV.2, escrevendo estas equações na forma matricial:

Teorema IV.6. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes e $\{Y_n\}$ a sucessão de matrizes associada a u. As condições seguintes são equivalentes:*

(1) *S satisfaz a equação em diferenças do tipo Riccati* (IV.1).

(2) *A sucessão de matrizes $\{Y_n\}$ satisfaz, para $n \in \mathbb{N}$, a equação matricial do tipo Sylvester*

$$A(x)\mathfrak{D}(Y_n)(x) = \mathcal{B}_n(\eta_1(x))Y_n(\eta_1(x)) - Y_n(\eta_2(x))\mathcal{C}(x) \qquad \text{(IV.35)}$$

(3) *a sucessão de matrizes $\{Y_n\}$ satisfaz, também,*

$$A(x)\mathfrak{D}(Y_n)(x) = \mathcal{B}_n(\eta_2(x))Y_n(\eta_2(x)) - Y_n(\eta_1))\mathcal{C}(x) \qquad \text{(IV.36)}$$

(4) *As sucessões de vectores* $\{Q_n\}$ *satisfazem as equações*

$$A(x)\mathfrak{D}(Q_n)(x) = \mathcal{B}_n(\eta_1(x))Q_n(\eta_1(x)) + \frac{C(x)}{2}Q_n(\eta_2(x)) \tag{IV.37}$$

$$A(x)\mathfrak{D}(Q_n)(x) = \mathcal{B}_n(\eta_2(x))Q_n(\eta_2(x)) + \frac{C(x)}{2}Q_n(\eta_1(x)). \tag{IV.38}$$

onde, para $i = 1, 2$ *vem*

$$\mathcal{B}_n(\eta_i(x)) = \begin{bmatrix} l_{n+1}(x) & \Theta^1_{n+1}(x) \\ -\frac{\Theta^1_n(x)}{\gamma_n} & l_n(x) + \frac{\Theta^1_n}{\gamma_n}(\eta_i - \beta_n) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}(x) = \begin{bmatrix} \frac{C}{2} & -D \\ B & -\frac{C}{2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração: As equações de Sylvester (IV.35), (IV.36) resultam das relações de estrutura de primeira ordem para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos de variável discreta $\{P_n\}$ obtidas no Teorema IV.6 quando escritas na forma matricial. O mesmo acontece para as equações (IV.37) e (IV.38). ■

Observação IV.3.

(1) Consideremos as equações matriciais do tipo Sylvester (IV.35) e (IV.36). Somando estas equações obtemos

$$2A(x)\mathfrak{D}(Y_n)(x) = \mathcal{B}_n(\eta_1(x))Y_n(\eta_1(x)) + \mathcal{B}_n(\eta_2(x))Y_n(\eta_2(x)) + Y_n(\eta_2(x))\mathcal{C}(x) + Y_n(\eta_1(x))\mathcal{C}(x).$$

pela definição do operador $\mathfrak{M}$ resulta

$$A(x)\mathfrak{D}(Y_n)(x) = \mathcal{B}_n(\eta_1(x))\mathfrak{M}(Y_n)(x) + \mathcal{B}_n(\eta_2(x))\mathfrak{M}(Y_n)(x) + \mathfrak{M}(Y_n)(x)\mathcal{C}(x) - \frac{\mathcal{B}_n(\eta_1(x))Y_n(\eta_2(x)) + \mathcal{B}_n(\eta_2(x))Y_n(\eta_1(x))}{2}.$$

Pela definição de $\mathfrak{M}(fg)$ temos

$$(A(x) - \mathrm{q}\,\mathcal{D}(\mathcal{B}_n))\mathfrak{D}(Y_n)(x) = \mathfrak{M}(\mathcal{B}_n)\mathfrak{M}(Y_n)(x) + \mathfrak{M}(Y_n)(x)\mathcal{C}(x).$$

(2) Consideremos as equações (IV.37) e (IV.38). De modo análogo ao anterior temos que

$$(A(x) - \mathrm{q}\,\mathcal{D}(\mathcal{B}_n))\mathfrak{D}(Q_n)(x) = \mathfrak{M}(\mathcal{B}_n)\mathfrak{M}(Q_n)(x) + \frac{C(x)}{2}\mathfrak{M}(Q_n).$$

Teorema IV.7. *Dada uma funcional u linear e regular, S a função de Stieltjes associada a u e $\{Y_n\}$, $\{P_n\}$, $P_n^{(1)}$ sucessões de matrizes, de polinómios ortogonais mónicos de variável discreta e polinómios associados de primeira espécie, respectivamente.*

(1) *S satisfaz a equação em diferenças do tipo Riccati* (IV.1).

$$A(x)(\mathfrak{D}S)(x) = B(x)S(\eta_1(x))S(\eta_2(x)) + C(x)(\mathfrak{M}f)(x) + D(x)$$

(2) *As sucessões matriciais $\{\mathcal{A}_n\}$ satisfazem as equações*

$$A\mathfrak{D}(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_1)\mathcal{A}_n(\eta_1) - \mathcal{A}_n(\eta_2)\mathcal{B}_{n-1}(\eta_1) \tag{IV.39}$$

(3) *e, também,*

$$A\mathfrak{D}(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_2)\mathcal{A}_n(\eta_2) - \mathcal{A}_n(\eta_1)\mathcal{B}_{n-1}(\eta_2). \tag{IV.40}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathcal{B}_n) &= 0, \\ \det(\mathcal{B}_n(\eta_1(x))) &= \det(\mathcal{B}_0)(\eta_2(x)) - \sum_{k=1}^{n}(A(x)\Theta_k^1(x)) \end{aligned}$$

e

$$\det(\mathcal{B}_n(\eta_2(x))) = \det(\mathcal{B}_0)(\eta_1(x)) - \sum_{k=1}^{n}(A(x)\Theta_k^1(x))$$

Demonstração: Para estabelecer a equação (IV.39) começamos por considerar as relações de recorrência a três termos para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ e para as sucessões de polinómios associados de primeira ordem $\{P_n^{(1)}\}$ obtendo a relação $Y_n(x) = \mathcal{A}_n(x)Y_{n-1}(x)$. Substituindo esta relação na equação (IV.35) vem

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{A}_nY_{n-1})(x) = \mathcal{B}_n(\eta_1(x))\mathcal{A}_n(\eta_1(x))Y_{n-1}(\eta_1(x)) + \mathcal{A}_n(\eta_2(x))Y_{n-1}(\eta_2(x))\mathcal{C}(x)$$

Voltando a usar a relação (IV.35) e como

$$\mathfrak{D}(Y_n) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}_n Y_{n-1}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}_n) Y_{n-1}(\eta_1) + (A)_n(\eta_2)\mathfrak{D}(Y_{n-1})$$

temos

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{A}_n)Y_{n-1}(\eta_1(x)) + \mathcal{A}_n(\eta_2(x))\mathcal{B}_{n-1}(\eta_1(x))Y_{n-1}(\eta_1(x))$$
$$= \mathcal{B}_n(\eta_1(x))\mathcal{A}_n(\eta_1(x))Y_{n-1}(\eta_1(x)).$$

Como a matriz $Y_n(\eta_1(x))$ é não singular obtemos a relação pretendida (IV.39)

$$(A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_1(x))\mathcal{A}_n(\eta_1(x))) - \mathcal{A}_n(\eta_2(x))\mathcal{B}_{n-1}(\eta_1(x)).$$

De modo análogo obtemos (IV.40) quando se considera a equação (IV.36). Para provar o recíproco, consideremos a equação de Sylvester (IV.39). Multiplicando ambos os membros, desta equação, por $Y_{n-1}(\eta_1(x))$ vem

$$A\mathfrak{D}(\mathcal{A}_n)Y_{n-1}(\eta_1(x)) = \mathcal{B}_n(\eta_1)\mathcal{A}_n(\eta_1)Y_{n-1}(\eta_1(x)) - \mathcal{A}_n(\eta_2)\mathcal{B}_n(\eta_2)Y_{n-1}(\eta_1(x)).$$

Como $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_n Y_{n-1}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}_n)Y_{n-1}(\eta_1(x)) + \mathcal{A}_n(\eta_2(x))\mathfrak{D}(Y_{n-1})$ temos

$$(A\mathfrak{D}(\mathcal{A}_n)Y_{n-1} + A\mathcal{A}_n(\eta_1(x))\mathfrak{D}(Y_{n-1})$$
$$= \mathcal{B}_n(\eta_1)\mathcal{A}_n(\eta_1)Y_{n-1}(\eta_1(x)) - \mathcal{A}_n(\eta_2)\mathcal{B}_n(\eta_2)Y_{n-1}(\eta_1(x)).$$

ou seja,

$$A\mathfrak{D}(Y_n) - \mathcal{B}_n(\eta_1)Y_n(\eta_1(x)) = \mathcal{A}_n(\eta_2)(A\mathfrak{D}(Y_{n-1}) - \mathcal{B}_{n-1}(\eta_2)Y_{n-1}(\eta_1(x))).$$

Iterando este processo resulta assim,

$$A\mathfrak{D}(Y_n) - \mathcal{B}_n(\eta_1)Y_n(\eta_1(x)) = \mathcal{A}_n(\eta_2)\cdots\mathcal{A}_0(\eta_2)(A\mathfrak{D}(Y_0) - \mathcal{B}_0(\eta_1)Y_0(\eta_1(x))).$$

Como $Y_n(\eta_2(x))Y_0^{-1}(\eta_2(x)) = \mathcal{A}_n(\eta_2)\cdots\mathcal{A}_0(\eta_2)$ obtemos a equação (IV.35) onde $\mathcal{C} = -Y_0^{-1}(\eta_2(x)(A\mathfrak{D}(Y_0) - \mathcal{B}_0(\eta_2)Y_0(\eta_1(x)))$ que se obtém pelas condições iniciais.

Para mostrar que $\mathrm{tr}(\mathcal{B}_n) = 0$ basta considerar as equações (IV.39) e (IV.40). Para se encontrar uma expressão para $\det(\mathcal{B}_n)$ começamos por considerar a equação do tipo Sylvester (IV.39),

$$\mathcal{B}_n(\eta_1(x))\mathcal{A}_n(\eta_1) = A(\mathfrak{D}\mathcal{A}_n) + \mathcal{A}_n(\eta_2)\mathcal{B}_{n-1}(\eta_2)$$

calculando o determinante vem

$$\det(\mathcal{B}_n(\eta_1(x))\gamma_n = -\Theta_n^1\gamma_n(((\eta_1(x)) - \beta_n)(l_n(x) + \Theta_n^1(x)(\eta_2(x) - \beta_n))$$
$$-\gamma_n\Theta_{n-1}^1(x) + A(x)) + ((\eta_1(x) - \beta_n)\Theta_n^1(x) - l_{n-1}(x))(l_n(x) + \Theta_n^1(x)(\eta_2(x) - \beta_n))\gamma_n$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{B}_n(\eta_1(x)) &= \gamma_n\Theta_n^1(x)\Theta_{n-1}^1(x) - A(x)\Theta_n^1(x) + l_{n-1}(x)(\Theta_n^1(x)(\eta_2(x) - \beta_n))) \\ &= \det(\mathcal{B}_n)(\eta_2(x)) - A(x)\Theta_n^1(x). \end{aligned}$$

Portanto, resulta

$$\det(\mathcal{B}_n(\eta_1(x)) = \det(\mathcal{B}_0)(\eta_2(x)) - \sum_{k=1}^{n}(A(x)\Theta_k^1(x)),$$

que é a representação procurada. De modo análogo obtemos, para η_2

$$\det(\mathcal{B}_n(\eta_2(x)) = \det(\mathcal{B}_0)(\eta_1(x)) - \sum_{k=1}^{n}(A(x)\Theta_k^1(x)).,$$

■

4. Teorema de caracterização para o caso semi-clássico

Consideremos a função de Stieltjes que satisfaz a equação em diferenças do tipo Riccati (IV.1)

$$A(x)\mathfrak{D}(S)(x) = B(x)S(\eta_1(x))S(\eta_2(x)) + C(x)\mathfrak{M}(S)(x) + D(x).$$

Se $B = 0$ temos as sucessões de polinómios ortogonais semi-clássicas, de variável discreta, onde para o peso w vem que $A\mathfrak{D}(w) = C\mathfrak{M}(w)$,[**42**], e a equação de Riccati, em diferenças, fica na forma

$$A(x)\mathfrak{D}(S)(x) = C(x)\mathfrak{M}(S)(x) + D(x). \tag{IV.41}$$

Consideremos, também, a sucessão de matrizes $\{\widetilde{Y}_n\}$ onde $\{\widetilde{Y}_n\} = \begin{bmatrix} P_{n+1} & \frac{q_{n+1}}{w} \\ P_n & \frac{q_n}{w} \end{bmatrix}$ a as sucessões de polinómios ortogonais ortogonais $\{P_n\}$, polinómios ortogonais associados de primeira espécie $\{P_n^{(1)}\}$, funções de segunda espécie $\{q_n\}$ e a sucessão de vectores $Q_n = [q_{n+1}\ q_n]^T$.

Como consequência das equações obtidas na secção anterior, estabelecemos a seguinte caracterização para sucessões de polinómios ortogonais de variável discreta pertencentes à classe semi-clássica temos o seguinte resultado:

Teorema IV.8. *Seja u uma funcional linear regular, S a correspondente função de Stieltjes e a representação integral em termos de w. Sejam $\{P_n\}$ e $\{q_n\}$ as sucessões de polinómios mónicos e funções próprias ortogonais a u. Sendo u semi-clássica e satisfazendo a equação* (IV.41) *então a sucessão $\{\widetilde{Y}_n\}$ satisfaz o sistema diferencial*

$$A(x)\mathfrak{D}(\widetilde{Y}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_1)\widetilde{Y}_n(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}\widetilde{Y}_n(\eta_2(x)) \tag{IV.42}$$

ou o sistema diferencial

$$A(x)\mathfrak{D}(\widetilde{Y}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_2)\widetilde{Y}_n(\eta_2(x)) - \frac{C(x)}{2}\widetilde{Y}_n(\eta_1(x)) \tag{IV.43}$$

onde $\mathcal{B}_n(\eta_i) = \begin{bmatrix} l_{n+1} & \Theta^1_{n+1} \\ -\frac{\Theta^1_n}{\gamma_n} & \frac{\Theta^1_n(\eta_i - \beta_n)}{\gamma_n} + l_n \end{bmatrix}$, $i = 1, 2$.

Demonstração: Como foi mostrado na secção um, deste capítulo, as funções de segunda espécie satisfazem a equação

$$A(x)\mathfrak{D}(q_{n+1}) = l_{n+1}q_{n+1}(\eta_1(x)) + \Theta^1_{n+1}q_n(\eta_1(x)) + \frac{C}{2}q_{n+1}(\eta_2(x)) \tag{IV.44}$$

dividindo ambos os membros por $w(\eta_1(x))$

$$A(x)\frac{\mathfrak{D}(q_{n+1})}{w(\eta_1(x))} = l_{n+1}\frac{q_{n+1}(\eta_1(x))}{w(\eta_1(x))} + \Theta^1_{n+1}\frac{q_n(\eta_1(x))}{w(\eta_1(x))} + \frac{C}{2}\frac{q_{n+1}(\eta_2(x))}{w(\eta_1(x))}. \tag{IV.45}$$

Como

$$\mathfrak{D}\left(\frac{q_{n+1}}{w}\right) = \mathfrak{D}(q_{n+1})\frac{1}{w(\eta_1)} + q_{n+1}(\eta_2)\mathfrak{D}\left(\frac{1}{w}\right)$$

simplificando esta equação obtemos

$$\frac{\mathfrak{D}(q_{n+1})}{w(\eta_1)} = A(x)\mathfrak{D}\left(\frac{q_{n+1}}{w}\right) + \frac{q_{n+1}(\eta_2)}{w(\eta_2)}\frac{C(x)}{2}\frac{w(\eta_1)+w(\eta_2)}{w(\eta_1)}.$$

Substituindo na equação (IV.45) vem

$$A(x)\mathfrak{D}\left(\frac{q_{n+1}}{w}\right) = l_{n+1}\frac{q_{n+1}(\eta_1(x))}{w(\eta_1(x))} + \Theta^1_{n+1}\frac{q_n(\eta_1(x))}{w(\eta_1(x))} + \frac{C}{2}\frac{q_{n+1}(\eta_2(x))}{w(\eta_2(x))}.$$

Considerando a equação (IV.44) em n e usando a relação de recorrência a três termos resulta

$$A(x)\mathfrak{D}\left(\frac{q_n}{w}\right) = \{l_n + \Theta^1_n(\eta_1 - \beta_n)\}\frac{q_n(\eta_1(x))}{w(\eta_1(x))} - \frac{\Theta^1_n}{\gamma_n}\frac{q_{n+1}(\eta_1(x))}{w(\eta_1(x))} - \frac{C(x)}{2}\frac{q_n(\eta_2(x))}{w(\eta_2(x))}.$$

De modo análogo obtemos a equação (IV.43) considerando a rede η_2 no lugar de η_1.

■

Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma medida associada a um peso w, estabelecemos uma condição necessária para que $\{P_n\}$ seja semi-clássica quando a sucessão matricial $\{\widetilde{Y}_n\}$ satisfaça sistemas do tipo $A\widetilde{Y}_n' = B_n\widetilde{Y}_n$ com $B_n \in M^{2\times 2}(\mathbb{P})$.

O próximo Teorema permite obter uma caracterização para as sucessões de polinómios semi-clássicas, de variável discreta, em termos de sistemas diferenciais. Obtemos uma extensão dos resultados obtidos no capítulo III para as sucessões de polinómios ortogonais na recta real.

Teorema IV.9. *Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos a equação em diferenças do tipo Sylvester* (IV.35). *Se as matrizes $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{L}$ com $\mathcal{L}$ invertível satisfizerem*

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_1)\mathcal{P}_n(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathcal{P}_n(\eta_2(x))$$

e

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_2)\mathcal{P}_n(\eta_2(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathcal{P}_n(\eta_1(x)).$$

e, também,

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{L}_n) = \mathcal{C}_n\mathcal{L}_n(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathcal{L}_n(\eta_2(x))$$

e

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{L}_n) = \mathcal{C}_n\mathcal{L}_n(\eta_2(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathcal{L}_n(\eta_1(x))$$

então as soluções de (IV.35) *têm a seguinte representação,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1}.$$

Demonstração: Para se obter uma solução da equação (IV.35)

$$A\mathfrak{D}(Y_n) = \mathcal{B}_n(\eta_j(x)) - Y_n(\eta_k(x))\mathcal{C}(x), \quad j \neq k \in \{1,2\}$$

começamos por considerar (IV.42). A solução da equação (IV.35) é dada pela matriz $Y_n = \mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ onde a matriz $\mathcal{P}_n$ satisfaz

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_1)\mathcal{P}_n(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathcal{P}_n(\eta_2(x))$$

e

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n) = \mathcal{B}_n(\eta_2)\mathcal{P}_n(\eta_2(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathcal{P}_n(\eta_1(x)).$$

Pretendemos determinar $\mathcal{L}$ tal que $Y_n = \mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1}$. Começamos por determinar $A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1})$ de (I.24) temos

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1}) = A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n)\mathcal{L}^{-1}(\eta_1(x)) + \mathcal{P}_n(\eta_2(x))A\mathfrak{D}(\mathcal{L}^{-1}). \tag{IV.46}$$

Para encontrar a expressão de $\mathfrak{D}(\mathcal{L}^{-1})$ fazemos

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}) = \mathfrak{D}(\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}(\eta_1(x)) + \mathcal{L}(\eta_2(x))\mathfrak{D}(\mathcal{L}^{-1}).$$

Temos então que

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}^{-1}) = -\mathcal{L}^{-1}(\eta_2(x))\mathfrak{D}(\mathcal{L})\mathcal{L}^{-1}(\eta_1(x)) \tag{IV.47}$$

Substituindo em (IV.46) a equação (IV.35) resulta

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathcal{P}_n\mathcal{L}^{-1}) = (\mathcal{B}_n(\eta_1)\mathcal{P}_n(\eta_1(x))\mathcal{L}^{-1}(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathcal{P}_n(\eta_2(x))\mathcal{L}^{-1}(\eta_2)(x).$$

Pela equação (IV.47) e comparando com a equação (IV.35) resulta que existe a matriz $\mathfrak{L}_n$ tal que

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathfrak{L}^{-1}) = \mathfrak{C}(x)\mathfrak{L}(\eta_1(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathfrak{L}(\eta_2(x)).$$

O mesmo vai acontecer se consideramos a rede η_2 no lugar de η_1 obtendo

$$A(x)\mathfrak{D}(\mathfrak{L}^{-1}) = \mathfrak{C}(x)\mathfrak{L}(\eta_2(x)) - \frac{C(x)}{2}\mathfrak{L}(\eta_1(x)).$$

Deste modo encontramos uma solução para as equações de Sylvester (IV.35) e (IV.36). ■

Para trabalho futuro temos de mostrar o recíproco do Teorema IV.8 e para determinar $\mathfrak{L}$ temos de resolver resolver o sistema linear $A\mathfrak{D}(\mathfrak{L}) = (\mathfrak{C} - C/2I_2)\mathfrak{M}(\mathfrak{L})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. AL-Salam, T.S. Chihara, *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. 3, n° 1 (1972), pp. 65-70.

[2] R. Álvarez-Nodarse, *On characterizations of classical polynomials*, Journal of computational and applied Mathematics, 196, (2006), pp. 320-337.

[3] G. Andrews, R. Askey, *Classical orthogonal polynomials*, Lectures Notes in Mathematics, New York, Berlin: Springer-Verlag, vol. 1171 (1985), pp. 36-62.

[4] A. Branquinho, *Polinómios Ortogonais e Funcionais de Momentos: Problemas Inversos*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1993.

[5] A. Branquinho, *Problemas Inversos na Teoria dos Polinómios Ortogonais*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1996.

[6] A. Branquinho, F. Marcellán e J. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: a functional approach*, Acta Apll. Math. 34 (1994), n°3, pp. 283-303.

[7] A.Branquinho, A. Foulquié Moreno, *A non-homogeneous linear differencial equations that as orthogonal polynomial solutions*, Pré-Publicações. Dep. de Matemática da Universidade de Coimbra n°95-22 (1995), 17.

[8] A. Branquinho, *A note on semi-classical orthogonal polynomials*, Bull. Belg. Math. Soc. 3 (1996), pp. 1-12.

[9] A. Branquinho, M.N. Rebocho, *On Differential equations for orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Math. Anal. Appl. 356, 2009, 242-256.

[10] A. Branquinho, M.N. Rebocho *Matrix sylvester equations in the theory of orthogonal polynomialson the unit circle*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 17 (2010), 355-376.

[11] A. Branquinho, F. Marcellán e J. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: a functional approach*, Acta Apll. Math. 34 (1994), n°3, pp. 283-303.

[12] N.M. Atakishiyev, A. Ronveaux and K.B. Wolf, *Difference equation for the associated polynomials on the linear lattice*, Zt. Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika, 106, (1996), pp. 76-83.

[13] N.M. Atakishiev, M. Rahman and S.K. Suslov, *On classical orthogonal polynomials*, Construtive Approximation, 11, (1995), pp. 181-226.

[14] G. Bangerezako, *The four order difference equation for the Laguerre-Hahn polynomials orthogonal on special non-uniform lattices*, The Ramanujan Journal, 5, 2001, pp. 167-181.

[15] S. Belmehdi, *A study of class one of semiclassical orthogonal polynomials* in Actas V Simposium Polinomios Ortogononales(Vigo) (A. Cachafeiro and E. Godoy, eds.), 1988, pp. 57-70.

[16] S. Bonan and P. Nevai, *Orthogonal polynomials and their derivatives*, J. Aprox. Theory 40 (1984), pp. 134-137.

[17] S. Bonan, D. Lubinsky and P. Nevai, *Orthogonal polynomials and their derivatives II*, SIAM Journal Math. Anal. 18 (1987), pp. 1163-1176.

[18] H. Bouakkaz and P. Maroni, *Description des polynomes orthogonaux de Laguerre-Hahn de classe zero*,in "Orthogonal Plynomials and their applications", (C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux Eds.) J.C. Baltzer A.G. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, (1991), pp. 189-194.

[19] C. Brezinski, *A direct proof of the Christoffel-Darboux identity and its equivalence to the recurrence relationship* Journal of Computational and Applied Mathematics, 32 (1-2), 1990, pp. 1-75.

[20] T.S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.

[21] R. S. Costa-Santos, J.F. Sánchez-Lara, *Extensions of discrete classical orthogonal polynomials beyond the orthogonality* cf. 2494714 pdf.

[22] Dueñas, H., F. Marcellán and E. Preanes, *Perturbations of Laguerre- Hehn funtional: modification by the derivative of a Dirac delta*,Integral Transforms and Special Functions, Vol. 20, N^{o} 1, 2009, pp. 59-77.

[23] J. Dini, *Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn* These de douctorat de lúniversite Paris 6, 1988.

[24] J. Dini, P. Maroni, *The product of a linear form by a rational fraction: Application to Laguerre-Hahn forms*, (English), Orthogonal polynomials and their applications, Proc. Int. Congr., Laredo/Spain 1987, Lect. Notes Pure Appl. Math. 117, 1989, pp. 131-138 .

[25] J.Favard, Cours D'Analyse de L'Ecole Plytechnique, Tome III, Théorie des Equations, Fascicule I, Equations différentielles, Paris, Gauthier-Villars, 1962.

[26] M. Foupouagnigni, F. Marcellán *Characterization of the D_w-Laguerre-Hahn funtionals*, Journal of difference equations and Applications, vol. 8 (8), 2002, pp.689-717.

[27] M. Foupougnigni, A. Ronveaux, *Difference equations for the co-recursive r-th associated orthogonal polynomials of the D_q-Laguerre-Hahn class*, 2003.

[28] M. Foupouagnigni, *On difference equations for orthogonal polynomials on nonuniform lattices*, Journal of Difference Equations and Applications, vol. 14 (2), 2008, pp. 127-174.

[29] A.G. Garcia, F. Marcellán, L. Salto, *A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 57, (1995), pp. 147-162.

[30] E. Godoy, A. Ronveaux, A. Zarzo, I. Area, *On the limit relations between classical continuous and discrete orthogonal polynomials*, J. of Computational and Applied Mathematics 91, (1998), pp. 97-105.

[31] W. Hahn, *Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen genügen*, Math. Nachr. 2 (1949), pp. 4-34.

[32] W. Hahn, *On Differencial Equations for Orthogonal Plynomials*, Funkcialaj Ekvacioj, 21, (1978), pp. 1-9.

[33] W. Hahn, *Über Orthogonalpolynome mit besonderen Eigenshaften*, E.B. Christoffel, P.L. Butzer and F. Feher eds., Birkhauser Verlag, Basel, (1981), pp. 182-189.

[34] W. Hahn, *Über differentialgleichungen für orthogonalpolynome*, Monat. Math. 95 (1983), 269-274.

[35] M: Ismail e N. S. Witte, *Discriminants and functional equations for polynomials orthogonal on the unit circle*, J. Approx. Theory 110 (2001), pp. 200-228.

[36] G.Jank, *Matrix Riccati Differential Equations*, (A.P.Santana, J.S. Neves e M.P.Oliveira eds.), Textos de Matemática, no.36, DMUC, 2005.

[37] R. Koekoek, R.F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analog, Reports of the faculty of Technical Mathematics and Informatics, vol. 98-17. Delft University of Tecnology, Delft, 1998.

[38] D. Karlin, G. Szegö, *On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials*, jornal d'Analise Mathematique 8 (1961), pp. 1-157.

[39] A. M. Krall, *Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edimb 87 A, 1981, pp. 271-288.

[40] E. Laguerre, *Sur la reduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation differentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels*, J. Math. Monthly 95 (1988) pp. 905-9011.

[41] A.P. Magnus, *Riccati acceleration of the Jacobi continued fractions and Laguerre-Hahn polynomials*, in 'Padé Approximation and its Applications, Proc., Bad Honnef 1883', Lect. Notes in Math. 1071 (H. Werner e H.T. Bunger, eds.), Springer Verlag, Berlin, (1984), pp. 213-230.

[42] A. Magnus, *Associated Askey-Wilson polynomials as Laguerre-Hahn orthogonal polynomials*, pp.261-278 in M. Alfaro et al.,editors: Orthogonal Polynomials and their Applications, Procedings, Segovia 1986. Springer Lecture Notes Math. 1329, Spriger, Berlin, 1988.

[43] A. Magnus, *Special non uniform lattice(snul) orthogonal polynomials on descrete dense sets of points* cf. 1379135.pdf.

[44] A. Magnus, *Painlevé-type differencial equations for the recurrence coefficients of semi--classical orthogonal polynomials*,Journal of Computacional and Applied Mathematics 57 (1995), pp. 215-237.

[45] A. Magnus, *Special topics in approximation theory.* MAPA 3011A 1997-1998: new difference calculus and orthogonal polynomials.

[46] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales semiclassicos : Una aproximacion construtiva*, Actas V Simposium Polinomios Ortogonales (Vigo)(A.Cachafeiro e E.Godoy, eds), 1988, pp. 110-123.

[47] F. Marcellán, I.A. Rocha, *Om semiclassical linear functionals: integral representation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 57, 1995, pp. 239-249.

[48] F. Marcellán, E. Prianes, *Perturbations of Laguerre-Hahn linear funtionals*, Journal of Computational and applied Mathematics 105 (1999), pp.109-128

[49] F. Márcellán and A. Ronveaux, *Co-recursive orthogonal polynomials and fourth order differential equation*, J. Comp. Appl. Math. **25** (1) (1989), 105-109.

[50] P. Maroni, *Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques*, Ann.Pura Appl.149 (1987), 165-184.

[51] P. Maroni, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classique*, in "Orthogonal Plynomials and their applications", (C. Brezinski, L. gori and A. Ronveaux Eds.) J.C. Baltzer A.G. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, 9 (1-4)(1991), 95-130.

[52] P.Maroni, *semi-classical character and finite-type relations between polynomial sequences*, Applied Numerical Mathematics, 31 (1999), pp. 295-330.

[53] J.C. Medem, R. Álvarez-Nodarse e F. Marcellán, *On the q-polynomials: A distributional study*, J. Computat. appl. Math. 135(2001) 157-196.

[54] P. Nevai, *Orthogonal Polynomials*, Memoirs Amer.Math. Soc., vol 213, Providence, Rothe Island, 1979.

[55] A.F. Nikiforov, S.K. Suslov, *Classical Orthogonal Polynomials of a discrete variable on non uniform lattices*, Letters in Math. Phys. 11 (1986) 27-34.

[56] E. Preanes, F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and Stieltjes function: the Laguerre-Hahn case*, Rendi. di Mat.16 (1996), 117-141.

[57] M. N. Rebocho, *Polinómios ortogonais do tipo Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária*, Dissertação de Doutoramento Universidade de Coimbra, 2008.

[58] A. Ronveaux, *Fourth-order Differential equations for numerator polynomials*, J. Phiys. A. Math.Gen. 21, 1988, 749-753.

[59] J.A. Shohat, *A differential equation for orthogonal polynomials*, Duke Math. J. 5, (1939) 401-417.

[60] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, Colloquium Publlications, vol.23, Providence, Rhode Island, 1975 (Quarta edição).

[61] W. Van Assche, *Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions od second kind*, J. of Comp. and Appl. Math. 37 (1991) 237-249.

[62] E. T. Wittaker, G. N. Watson, A Course Of Modern Analysis, Cambridge Mathematical Library, 1996, Fourth edition.

ÍNDICE REMISSIVO