ORTOGONALIDADE MÚLTIPLA PARA SISTEMAS DE MULTI-ÍNDICES QUASE-DIAGONAIS

Luís Manuel da Silva Cotrim

Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, 2008

Dissertação para obtenção do grau
de Doutor em Matemática, especialidade
em Matemática Pura, na Universidade
de Coimbra.

Resumo

Neste trabalho vamos estudar sistemas de polinómios ortogonais relativamente a sistemas de funcionais lineares e famílias de multi-índices quase-diagonais. O objectivo principal é a relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais, ou o operador linear cuja matriz que o representa é tridiagonal por blocos. Vamos reencontrar os problemas de aproximação de Hermite-Padé para funções matriciais, que mostramos coincidir com o resolvente do operador definido pela matriz tridiagonal por blocos. Iremos obter caracterizações para sucessões de polinómios ortogonais tipo I e II, em termos de relações de recorrência a três termos, fórmulas de Darboux-Christoffel, problemas de aproximação de Hermite-Padé e biortogonalidade relativamente à função resolvente. Por fim damos ainda caracterizações de polinómios ortogonais múltiplos de tipo I e II, clássicos segundo Hahn.

Palavras chave: Polinómios ortogonais múltiplos, Problemas de Hermite-Padé, multi-índice diagonal, multi-índice quase-diagonal, funcionais lineares, relação de recorrência, matriz tridiagonal por blocos, Teorema de Favard, fórmulas de Darboux--Christoffel, polinómios matriciais, polinómios ortogonais clássicos.

Abstract

Throughout this work, we will study systems of orthogonal polynomials with respect to the systems of linear functionals and families of quasi-diagonal multi--indices. Our main goal is the three term recurrence relation with matrix coeficients or the linear operator, whose matrix it represents is the tridiagonal operator. We will find the problems of approximation of Hermite-Padé for matrix functions, that we will show coincide with the resolvent of the tridiagonal operator. We will obtain characterizations for sequences of multiple orthogonal polynomials of type I and II in terms of three term recurrence relations, Christoffel-Darboux formulas, problems of approximation of Hermite-Padé and the biorthogonality with respect to the resolvent function. Finally, we will still present characterizations for sequences of multiple orthogonal polynomials of type I and II, type Hahn.

Key words: Multiple orthogonal polynomials, Problems of Hermite-Padé, diagonal multi-index, quasi-diagonal multi-index, linear functional, recurrence relation, tridiagonal operator, Favard Theorem, Christoffel-Darboux formulas, classical orthogonal polynomials.

Agradecimentos

As minhas primeiras palavras são dirigidas ao meu orientador, Professor Doutor Amílcar Branquinho. Estou-lhe muito grato pelo que me ensinou e pelo o apoio que sempre me deu. Ao longo da elaboração deste trabalho, tive o privilégio de beneficiar da sua competência científica, da sua grande capacidade de trabalho, e da amizade que senti sempre da sua parte. A ele devo este trabalho. De igual modo, quero agradecer à Professora Doutora Ana Foulquié por toda a sua paciência e disponibilidade prestada no sentido de me ajudar a compreender melhor todos os temas abordados neste trabalho. A ambos o meu muito obrigado.

Um grande agradecimento à minha família que, apesar da minha falta de disponibilidade em muitas das fases deste percurso, nunca me deixou de apoiar. Deste modo, quero deixar aqui bem expresso, o meu sincero agradecimento.

Um agradecimento aos Professores que tive na parte lectiva do programa do Doutoramento pelo que me ensinaram e apoio concedido.

Ao Professor Doutor Paulo de Almeida um especial agradecimento por me ter entusiasmado a estudar sempre mais.

Aos Amigos:
Alexandra Baptista, Ana Isabel, Carlos, Diogo, Nelson, Nuno Bernardino, Rui e Susana, o meu agradecimento pela forma como me ajudaram.

Ao amigo Pedro Matos que sabia viver com alegria mesmo na adversidade, estou--lhe muito grato pelo que me ensinou, pelo incentivo que sempre me deu, e também pela sua amizade.

Este trabalho foi realizado no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, devido a uma bolsa do Prodep (1. 065.009/2003) e ao apoio concedido pelo Instituto Politécnico de Leiria.

Índice

Introdução

Nota Histórica

A teoria dos polinómios ortogonais constitui uma área da Matemática possuidora de uma história rica e cujo interesse ao longo dos tempos tem sido muito significativo. A sua aplicação encontra-se em várias áreas da Matemática, como por exemplo em Física-Matemática, Análise Numérica, Análise Funcional, Equações Diferenciais, Probabilidades e Estatística, etc. As sucessões de polinómios mais utilizadas são as dos polinómios ditos clássicos, que são habitualmente enumerados como os polinómios de Hermite, de Laguerre, de Jacobi e de Bessel. Como referências bibliográficas, referimos por exemplo [**1, 17, 36, 42**]. As sucessões de polinómios clássicos têm as seguintes propriedades em comum:

a) Satisfazem uma equação diferencial linear do tipo Sturm-Liouville

$$\phi(x)y''(x) + \psi(x)y' + \lambda_n y = 0,$$

onde ϕ é um polinómio de grau menor ou igual a 2 e ψ é um polinómio de grau 1, ambos independentes de n e λ_n independente de x. Ver [**8, 33**].

b) As suas derivadas formam uma sucessão de polinómios ortogonais. Ver [**34**].

c) Podem ser definidas por uma *fórmula do tipo de Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{k(x)w(x)} D^n(w(x)\phi^n(x)), \quad n = 0, 1, \ldots$$

onde ϕ é um polinómio em x independentes de n, e w é uma função não negativa num determinado intervalo. Ver [**32**].

d) Os polinómios são ortogonais relativamente a uma função peso que satisfaz uma equação de Pearson do tipo

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{N(x)}{\phi(x)} \quad \text{com} \quad N(x) = \psi(x) - \phi'(x).$$

Ver [**42**].

e) Satisfazem uma relação de diferencial de diferenças do tipo

$$\pi(x)p_n'(x) = (a_n x + b_n)p_n(x) + c_n p_{n-1}(x).$$

Ver [**2**].

f) Satisfazem uma equação não linear da forma

$$\phi(x)\frac{d}{dx}(p_n(x)p_{n-1}(x)) = (a_n x + b_n)p_n(x)p_{n-1}(x) + c_n p_n^2(x) + d_n p_{n-1}^2(x)$$

onde a_n, b_n, c_n e d_n são independentes de x. Ver [**45**].

Todas as propriedades referidas são condições necessárias e suficientes, ou seja, qualquer sucessão de polinómios ortogonais que satisfaça cada uma das propriedades anteriores é uma das sucessões de polinómios ortogonais clássicos.

Estas sucessões de polinómios ortogonais clássicos fazem parte da teoria de funções hiper-geométricas. Por este motivo, muitos trabalhos escritos ao longo dos tempos têm como ponto de partida o carácter hiper-geométrico destas sucessões. Acontece que a evolução da teoria Matemática tem sido feita no sentido de progressivamente ir perdendo esta tendência. Como marco importante desta evolução temos o livro de T.S. Chihara [**17**]. Neste trabalho o autor introduz o conceito de funcional de momentos e o de polinómios ortogonais que lhe está associado, dando uma demonstração algébrica do Teorema de Favard. A patir daí vários autores têm desenvolvido esta teoria. Ver por exemplo os trabalhos [**9, 10, 11, 41**].

Em teoria construtiva da aproximação muitas vezes necessitamos de aproximar uma dada função f por outra função g. Esta aproximação deve ser feita de modo a que o erro na aproximação seja minímo e que a função g seja de algum modo mais simples do que a função f. Contudo, referimos que ao considerar uma nova função g poderá perder-se alguma informação sobre a função f.

Vamos começar por considerar uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cujo desenvolvimento formal numa vizinhança de $a \in \mathbb{C}$, é dado por

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Uma aproximação para a função f dada por uma função polinomial pode ser facilmente obtida considerando uma truncatura do desenvolvimento formal de f, i.e., truncando a soma infinita após n termos. Considerando assim,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z-a)^k, \quad n = 0, 1, \ldots$$

temos,

$$f(z) - f_n(z) = \mathcal{O}((z-a)^n).$$

Acontece que as funções polinomiais não são uma boa classe quando pretendemos aproximar funções que possuem singularidades. A classe de funções mais simples que possuem elementos com singularidades é a classe das funções racionais. Este problema motiva o aparecimento do problema de Aproximação de Padé e os problemas de Aproximação de Hermite-Padé.

Os problemas de aproximação de Hermite-Padé permitem a aproximação racional de várias funções de Markov em simultâneo, os quais apresentamos a seguir.

Seja $\{f_1, \ldots, f_d\}$ um conjunto de funções cujos desenvolvimentos formais são dados por

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{k,j}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \ldots, d \quad , \quad c_{k,j} \in \mathbb{C}.$$

Fixemos o multi-índice $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ e seja $|\vec{n}| = n_1 + \cdots + n_d$.

Tipo I: Pretendemos aproximar o conjunto de funções $\{f_1, \ldots, f_d\}$ encontrando para tal um vector de polinómios $(A_{\vec{n},1}, \ldots, A_{\vec{n},d})$ com graus quando muito $n_j - 1$ e um polinómio $B_{\vec{n}}$, tais que:

$$\sum_{j=1}^{d} A_{\vec{n},j}(z) f_j(z) - B_{\vec{n}}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{|\vec{n}|}}\right), \quad z \to \infty.$$

Tipo II: Pretendemos aproximar o conjunto de funções $\{f_1, \ldots, f_d\}$ encontrando para tal um polinómio $P_{\vec{n}}$ com grau quanto muito $|\vec{n}|$ e polinómios $Q_{\vec{n},j}$, $j = 1, \ldots, d$, tais que:

$$\begin{aligned} P_{\vec{n}}(z) f_1(z) - Q_{\vec{n},1}(z) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_1+1}}\right), \quad z \to \infty \\ &\vdots \\ P_{\vec{n}}(z) f_d(z) - Q_{\vec{n},d}(z) &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_d+1}}\right), \quad z \to \infty. \end{aligned}$$

Na resolução dos problemas de aproximação de Hermite-Padé anteriormente apresentados surgem as noções de *ortogonalidade múltipla de polinómios de tipo I e II*, respectivamente, como ilustramos a seguir.

Tipo I: Seja μ_j uma medida de Borel positiva sobre o intervalo $[a_j, b_j]$ onde $j = 1, \ldots, d$ e f_j uma *função de Markov* associada a μ_j i.e., $f_j(z) = \int_{a_j}^{b_j} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}$. Então, as soluções do problema de aproximação de Hermite-Padé de tipo I, são definidas pelas condições de *ortogonalidade múltipla de tipo I*:

$$\sum_{j=1}^{d} \int_{a_j}^{b_j} x^k A_{\vec{n},j}(x) d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, |\vec{n}| - 2$$

e $B_{\vec{n}}$ é dado por $B_{\vec{n}}(z) = \sum_{j=1}^{d} \int_{a_j}^{b_j} \frac{A_{\vec{n},j}(z) - A_{\vec{n},j}(x)}{z-x} d\mu_j(x)$, $j = 1, \ldots, d$. Ver [**50**].

Tipo II: Seja μ_j uma medida de Borel positiva sobre o intervalo $[a_j, b_j]$ onde $j = 1, \ldots, d$ e f_j uma função de Markov associada a μ_j, i.e., $f_j(z) = \int_{a_j}^{b_j} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}$. Então, as soluções do problema de aproximação de Hermite-Padé de tipo II, são definidas pelas condições de *ortogonalidade múltipla de tipo II*:

$$\int P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, d$$

e $Q_{\vec{n},j}$, $j = 1, \ldots, d$, são dados por $Q_{\vec{n},j}(z) = \int_{a_j}^{b_j} \frac{P_{\vec{n}}(z) - P_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\mu_j(x)$. Ver [**50**].

Os polinómios ortogonais múltiplos são uma generalização dos polinómios ortogonais no sentido em que verificam condições de ortogonalidade relativamente a d medidas, mas não verificam, em geral, relações de recorrência a um número finito de termos. Como referências ao estudo dos problemas de aproximação de Hermite-Padé referimos por exemplo o livro de E.M. Nikishin e V.N. Sorokin [**46**] e os trabalhos de W. Van Asshe [**50, 51**]. Referimos que os problemas de aproximação de Hermite--Padé foram introduzidos por Hermite na demonstração da transcendência do número e. Diversos autores têm desenvolvido a teoria dos polinómios ortogonais múltiplos nestes últimos anos, sendo de destacar entre outros, A.I. Aptekarev, W. Van Assche, P. Maroni, J. Van Iseghem, etc. O trabalho que nos propomos a elaborar é em Teoria da Aproximação dentro do tema da ortogonalidade múltipla de polinómios.

Motivação

Este processo começou com o estudo de vários temas nos livros [**38, 47**]. Posteriormente estudámos vários trabalhos recomendados pelo orientador científico, Professor A. Branquinho, relacionados com a teoria dos polinómios ortogonais. Entre estes trabalhos que estudámos, comecemos por referir o livro de D. Jackson [**36**], onde fundamentalmente se estudou os polinómios de Legendre, funções de Bessel, polinómios de Jacobi, polinómios de Hermite e polinómios de Laguerre. Foi neste livro que tivemos o primeiro contacto com os polinómios ortogonais e com alguma teoria que lhes está subjacente. É também nesta fase que começamos a verificar que a teoria dos polinómios ortogonais é de grande interesse em diferentes áreas da Matemática. Numa segunda fase estudámos algumas partes do livro de T.S. Chihara [**17**]. Este livro é de uma enorme importância, pois foi nele que adquirimos noções muito importantes sobre a teoria dos polinómios ortogonais, nomeadamente nos primeiros dois capítulos. Após termos adquirido conhecimentos sobre a teoria geral dos polinómios ortogonais, debruçámo-nos no estudo dos trabalhos de A. Branquinho, [**9, 10**]. Estes trabalhos ajudaram por um lado a consolidar temas já vistos, e por outro a aprender vários assuntos de grande importância relacionados com a teoria dos polinómios ortogonais. Posteriormente estudámos assuntos de grande importância no livro de E.M. Nikishin e V.N. Sorokin [**46**]. Neste livro referimos a importância dos capítulos 2 e 4, visto ser nestes que começámos a adquirir conhecimentos relacionados com a Teoria Construtiva da Aproximação, nomeadamente o problema de aproximação de Padé e os problemas de aproximação de Hermite-Padé. Para uma melhor consolidação dos temas que estudámos no livro atrás referido, frequentámos dois cursos leccionados pelo Professor W. Van Assche no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, e a disciplina de Teoria Analítica dos Números na parte lectiva do programa do Doutoramento. Estes cursos e disciplina, ajudaram a perceber melhor que a noção de ortogonalidade de polinómios surge de forma natural na resolução do problema de aproximação de Padé, e a noção de ortogonalidade múltipla de polinómios surge também de forma natural na resolução dos problemas de aproximação de Hermite-Padé. Assim, além de verificármos que a noção de ortogonalidade múltipla de polinómios surge na resolução dos problemas de aproximação de Hermite-Padé, verificámos ainda que existe uma ligação entre estes problemas de aproximação e a Teoria dos Números [**6, 46, 51**]. Como sabemos, os problemas de aproximação de Hermite-Padé foram introduzidos por Hermite na demonstração da transcendência do número e. Mas várias demonstrações de transcendência de constantes foram feitas recorrendo aos problemas de aproximação de Padé. Também a irracionalidade de algumas constantes pode ser feita recorrendo aos aproximantes de Hermite-Padé. Um exemplo disso, é na demonstração da irracionalidade de π^2 feita por Legendre em 1974. Um outro exemplo, é na demonstração da irracionalidade de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ feita por Apéry em 1977. A demonstração da irracionalidade destas constantes pode ser consultada na referência bibliográfica [**51**]. Uma outra outra aplicação dos problemas de aproximação de Hermite-Padé é na obtenção de fórmulas de quadratura para integrais. Em determinadas aplicações é necessário aproximar diferentes integrais com a mesma função, relativos a diferentes medidas. Problemas deste tipo podem também ser resolvidos recorrendo aos aproximantes de Hermite-Padé.

A partir deste momento, i.e., com vista à continuação do estudo necessário para a realização do trabalho a que nos propomos, ortogonalidade múltipla de polinómios, estudámos vários artigos, entre os quais destacamos [**22, 23, 43, 44, 54**]. Foi nestes artigos que tivemos conhecimento da noção de *d-ortogonalidade* de uma sucessão de polinómios mónicos, coeficiente do termo de maior ordem igual a um, onde d é um número inteiro positivo. Após o estudo destes artigos onde os assuntos principais são a noção de *d-ortogonalidade* de uma sucessão de polinómios mónicos e a apresentação de alguns resultados respeitantes a caracterizações destas sucessões de polinómios mónicos d-ortogonais, damos início à elaboração do nosso trabalho.

Apresentamos a seguir de uma forma geral o que vamos tratar em cada um dos capítulos deste trabalho.

Organização do trabalho

No Capítulo I apresentamos a noção de ortogonalidade múltipla de polinómios dos tipos I e II de uma sucessão de polinómios relativamente a um sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in I \subset \mathbb{Z}_+^d$, onde $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros. Na literatura podemos encontrar vários exemplos de polinómios ortogonais múltiplos [**3, 4, 5, 7, 18, 20, 35, 40, 52**]. Em 1935 J. Favard [**30**] enunciou um teorema onde mostra que qualquer sucessão de polinómios que verifique uma relação de recorrência a três termos é uma sucessão de polinómios ortogonal relativamente a uma função peso. No livro de T.S. Chihara [**17**] podemos encontrar o resultado geral para funcionais lineares.

Constatamos que uma sucessão de polinómios ortogonais múltiplos não verifica necessariamente uma relação de recorrência com um número finito de termos como no caso das sucessões de polinómios ortogonais, isto depende do conjunto de multi--índices associado.

Na literatura encontramos resultados relacionados com a caracterização de sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo II relativamente a um sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathcal{I}$, onde

$$\mathcal{I} = \{(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),\ldots,(1,1,\ldots,1),(2,1,\ldots,1),\ldots,(2,2,\ldots,2),\ldots\},$$

que designamos por *multi-índices diagonais*. Uma das caracterizações das sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo II para famílias de multi-índices diagonais, $\mathcal{I}$, é que estas verificam relações de recorrência a $(d+2)$-termos, do tipo

$$xB_n = B_{n+1} + \sum_{k=0}^{d} a_{n-k}^{n} B_{n-k}.$$

Ao longo deste trabalho vamos considerar sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo I e tipo II relativamente a um sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ representa um conjunto de multi-índices mais geral, que vamos designar por multi-índices *quase-diagonais*. O nosso objectivo principal neste capítulo consiste em mostrar que as sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo II para famílias de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, verificam uma relação de recorrência a $(s\,(d+1)+1)$-termos do tipo

$$x^s B_n = B_{n+s} + \sum_{k=0}^{s(d+1)-1} a_{n+s-1-k}^{n+s-1} B_{n+s-1-k}.$$

Notemos que para $s = d = 1$, temos uma relação de recorrência a três termos, i.e., sucessões de polinómios ortogonais. Ver por exemplo o livro de T.S. Chihara [**17**]. Para $s = 1$ e $d = 2, 3, \cdots$, temos uma relação de recorrência a $(d+2)$-termos, i.e., estamos no caso diagonal. Ver por exemplo os trabalhos [**22, 44, 54**]. Terminamos o capítulo, reescrevendo na forma matricial a relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos, obtendo-se uma relação de recorrência a três termos, com coeficientes matriciais, satisfeita por vectores de polinómios.

No Capítulo II começamos por apresentar algumas notações e noções algébricas que vão ser úteis ao longo do trabalho. Posteriormente, o nosso objectivo principal consiste em apresentar uma reinterpretação matricial das condições de ortogonalidade múltipla de tipo II de uma sucessão de polinómios mónicos relativamente a um sistema regular de funcionais lineares e família de multi-índices quase-diagonais. De forma análoga, damos uma reinterpretação matricial das condições de ortogonalidade múltipla de tipo I de um vector de polinómios relativamente a um sistema regular de funcionais lineares e família de multi-índices quase-diagonais. A seguir, estabelecemos um resultado de existência e unicidade de uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a um vector de funcionais lineares e um resultado de existência e unicidade de uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente a um vector de funcionais lineares.

No Capítulo III vamos estabelecer resultados respeitantes à caracterização de sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo I e II em termos de relações de recorrência a três termos, ou seja, estabelecemos um teorema tipo Favard. Nas referências bibliográficas [**27, 28, 29, 37**] podemos encontrar resultados relativos à caracterização de sucessões de polinómios ortogonais em termos de relações de recorrência. Provamos uma fórmula de Darboux-Cristoffel satisfeita por sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo I e II, tendo como referências [**19, 21, 49**]. Reencontramos os problemas de aproximação de Hermite-Padé para funções matriciais que mostramos coincidir com o resolvente do operador definido pela matriz tridiagonal por blocos. Encerramos o capítulo estabelecendo um resultado de caracterização para sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo I e II, em termos da biortogonalidade relativamente à função resolvente.

No Capítulo IV estabelecemos um resultado de caracterização de uma sucessão de polinómios mónicos ortogonais múltiplos de tipo II clássicos segundo Hahn, usando a equação funcional vectorial tipo Pearson. Este resultado permite obter outras caracterizações de uma sucessão de polinómios mónicos ortogonais múltiplos de tipo II clássicos segundo Hahn, e ainda resultados relacionados com a caracterização de polinómios ortogonais múltiplos de tipo I. Deste modo, estabelecemos alguns resultados que têm como casos particulares resultados que podemos encontrar nos trabalhos dos autores, J. Van Iseghem em [**54**], K. Douak e P. Maroni em [**22**], P. Maroni em [**43, 44**] e A.I. Aptekarev, A. Branquinho e W. Van Assche em [**4**].

CAPÍTULO I

Teoria geral da ortogonalidade múltipla

Como referimos na introdução, os polinómios ortogonais múltiplos surgem na resolução dos problemas de aproximação de Hermite-Padé. Os polinómios ortogonais múltiplos são uma generalização dos polinómios ortogonais no sentido em que verificam condições de ortogonalidade relativamente $d \in \mathbb{Z}^+$ medidas. Existem assim dois tipos de sucessões de polinómios ortogonais múltiplos, tipos I e II. Vamos iniciar o capítulo pela apresentação das noções de polinómios ortogonais múltiplos de tipos I e II. Nos trabalhos [**21, 39, 43, 54**], encontramos alguns resultados relacionados com a caracterização de sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo II para multi-índices diagonais. Constatamos que as sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo II para multi-índices diagonais verificam uma relação de recorrência a $(d+2)$-termos, do tipo

$$xB_n = B_{n+1} + \sum_{k=0}^{d} a_{n-k}^{n} B_{n-k}\,.$$

Como já referimos, neste trabalho vamos considerar sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipos I e II para multi-índices mais gerais que vamos designar por multi-índices quase-diagonais. Vamos mostrar que as sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo II para multi-índices quase-diagonais verificam uma relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos, do tipo

$$x^s B_n = B_{n+s} + \sum_{k=0}^{s(d+1)-1} a_{n+s-1-k}^{n+s-1} B_{n+s-1-k}\,.$$

Assim, é dada uma interpretação da relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos em termos da ortogonalidade múltipla de polinómios. Posteriormente reescrevemos na forma matricial a relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos obtendo-se uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais satisfeita por vectores de polinómios.

1. Ortogonalidade múltipla sobre $\mathbb{R}$

Seja $\{u^1, \dots, u^d\}$ um sistema de funcionais lineares $u^j : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ com $j = 1, \dots, d$. Fixemos o *multi-índice* $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ e seja $|\vec{n}| = n_1 + \cdots + n_d$.

Definição I.1. Seja $(A_{\vec{n},1}, \dots, A_{\vec{n},d})$ um vector de polinómios onde grau de $A_{\vec{n},j}$ é quando muito $n_j - 1$. Dizemos que o vector de polinómios $(A_{\vec{n},1}, \dots, A_{\vec{n},d})$ *é ortogonal de tipo I relativamente ao sistema de funcionais lineares* $\{u^1, \dots, u^d\}$ *e multi-índice* $\vec{n}$, se

$$\sum_{j=1}^{d} u^j(x^m A_{\vec{n},j}(x)) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, |\vec{n}| - 2. \tag{I.1}$$

No caso particular em que o sistema de funcionais lineares seja um sistema de medidas positivas de Borel, μ_j, $j = 1, \dots, d$, temos que,

$$u^j(x^k) = \int_I x^k d\mu_j, \quad k \in \mathbb{N} \text{ e } j = 1, \dots, d,$$

e as condições de ortogonalidade (I.1) podem ser reescritas como

$$\sum_{j=1}^{d} \int_I x^k A_{\vec{n},j}(x) d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\vec{n}| - 2.$$

Definição I.2. Um *multi-índice* $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ é dito *normal* para o sistema de funcionais lineares $\{u^1, \dots, u^d\}$ se para toda a solução $(A_{\vec{n},1}, \dots, A_{\vec{n},d})$ não trivial de (I.1) os polinómios $A_{\vec{n},j}$ têm grau igual a $n_j - 1$. Quando todos os multi-índices de uma dada família são normais dizemos que o *sistema de funcionais lineares* $\{u^1, \dots, u^d\}$ é *regular* para esta dada família.

Definição I.3. Seja $\{P_{\vec{n}}\}$ uma sucessão de polinómios onde grau de $P_{\vec{n}}$ é quando muito $|\vec{n}|$. Dizemos que $\{P_{\vec{n}}\}$ *é ortogonal de tipo II relativamente ao sistema de funcionais* lineares $\{u^1, \dots, u^d\}$ *e multi-índice* $\vec{n}$, se

$$u^j(x^m P_{\vec{n}}) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, d. \tag{I.2}$$

Analogamente se o sistema de funcionais lineares é um sistema de medidas positivas de Borel, μ_j, $j = 1, \dots, d$, as condições de ortogonalidade (I.2) podem ser reescritas como

$$\int P_{\vec{n}}(x) x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, d.$$

Definição I.4. Um *multi-índice* $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ é dito *normal* para o sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ se para toda a solução $P_{\vec{n}}$ não trivial de (I.2), grau de $P_{\vec{n}}$ é igual a $|\vec{n}|$. Quando todos os multi-índices de uma dada família são normais dizemos que *o sistema de funcionais lineares* $\{u^1, \ldots, u^d\}$ é *regular* para esta dada família.

1.1. Sistemas de Angelesco.

Definição I.5. Um *sistema de medidas positivas de Borel,* $\{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$, onde suporte de μ_j é $[a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, d$, é dito de *Angelesco* se $]a_i, b_i[\cap]a_j, b_j[\neq \varnothing$, sempre que $i \neq j$.

Para um sistema de Angelesco todos os multi-índices são normais. De facto, como podemos constatar no resultado seguinte os polinómios ortogonais múltiplos $P_{\vec{n}}$ têm grau exactamente igual a $|\vec{n}|$.

Teorema I.1. *Seja $\{\mu_1, \ldots, \mu_d\}$ um sistema de Angelesco. O polinómio $P_{\vec{n}}$ ortogonal múltiplo tipo II relativamente a este sistema tem n_j zeros simples em cada intervalo $[a_j, b_j]$ onde $j = 1, \ldots, d$.*

Demonstração. Ver por exemplo [**50**]. ∎

1.2. Sistemas algébricos de Tchebychev. Um *sistema de Tchebychev*, sobre o intervalo $[a, b]$, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, é um sistema de n de funções linearmente independentes tais que qualquer combinação linear $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ tem quando muito $n-1$ zeros em $[a, b]$. Isto tem-se quando, e só quando,

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \neq 0,$$

para quaisquer pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$.

Definição I.6. O sistema de funções $\{f_1, \ldots, f_d\}$ é um *sistema algébrico de Tchebychev* (*sistema AT*) para o multi-índice $\vec{n}$ se cada função f_j, $j = 1, \ldots, d$, é uma função de Markov sobre o mesmo intervalo $[a,b]$ com a medida $d\mu_j(x) = w_j(x)d\mu(x)$, onde μ é uma medida de Borel com suporte infinito, e as funções w_j são tais que

$$\{w_1, xw_1, \ldots, x^{n_1-1}w_1, \ldots, w_d, xw_d, \ldots, x^{n_d-1}w_d\},$$

é um sistema de Tchebychev sobre o intervalo $[a,b]$.

TEOREMA I.2. *Suponhamos que $\vec{n}$ é um multi-índice tal que $\{f_1, \ldots, f_d\}$ é um sistema AT sobre o intervalo $[a,b]$ e também para todo multi-índice $\vec{m}$ tal que $m_j \leq n_j$, $j = 1, \ldots, d$. Então $P_{\vec{n}}$ tem $|\vec{n}|$ zeros sobre o intervalo $[a,b]$ e assim $\vec{n}$ é um multi-índice normal para o problema de aproximação de tipo II.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver por exemplo [**50**]. ■

Temos um resultado semelhante para o problema de aproximação de tipo I.

TEOREMA I.3. *Suponhamos que $\vec{n}$ é um multi-índice tal que $\{f_1, \ldots, f_d\}$ é um sistema AT sobre o intervalo $[a,b]$ e também para todo multi-índice $\vec{m}$ tal que $m_j \leq n_j$, $j = 1, \ldots, d$. Então $\sum_{j=1}^{d} A_{\vec{n},j}w_j$ tem $|\vec{n}|\ -1$ zeros sobre o intervalo $[a,b]$ e $\vec{n}$ é um multi-índice normal para o problema de aproximação de tipo I.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver por exemplo [**50**]. ■

1.3. Sistemas de Nikishin. Seja μ_1 uma medida positiva de Borel sobre o intervalo $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ e $f_{1,1}$ uma função de Markov associada a μ_1, i.e., $f_{1,1}(z) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\mu_1(x)}{z-x}$. A função de Markov $f_{1,1}$ é dita um *sistema de Nikishin de ordem* 1.

Um *sistema de Nikishin de ordem* 2 é um vector de funções de Markov $\{f_{1,2}, f_{2,2}\}$ sobre o intervalo $[a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$, tal que:

$$f_{1,2}(z) = \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\mu_2(x)}{z-x}, \quad f_{2,2}(z) = \int_{a_2}^{b_2} f_{1,1}(x)\frac{d\mu_2(x)}{z-x},$$

onde $f_{1,1}$ é um sistema de Nikishin de ordem 1 sobre o intervalo $[a_1, b_1]$ e $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \varnothing$.

DEFINIÇÃO I.7. Um *sistema de Nikishin de ordem d* é um vector de funções de Markov $\{f_{1,d}, \ldots, f_{d,d}\}$ sobre o intervalo $[a_d, b_d] \subset \mathbb{R}$, tal que:

$$f_{1,d}(z) = \int_{a_d}^{b_d} \frac{d\mu_d(x)}{z-x}, \quad f_{j,d}(z) = \int_{a_d}^{b_d} f_{j-1,d-1}(x)\frac{d\mu_d(x)}{z-x}, \quad j = 2, \ldots, d,$$

onde $\{f_{1,d-1}, \ldots, f_{d-1,d-1}\}$ é um sistema de Nikishin de ordem $d-1$ sobre o intervalo $[a_{d-1}, b_{d-1}] \subset \mathbb{R}$ e $[a_d, b_d] \cap [a_{d-1}, b_{d-1}] = \varnothing$.

Para um sistema de Nikishin de ordem d todos os multi-índices $\vec{n}$ tais que

$$1 \leq j < k \leq m \Rightarrow n_k \leq n_j + 1\,,$$

são normais. Ver [**12, 16, 26, 31**].

2. Multi-índices diagonais

Nesta secção apresentamos alguns resultados conhecidos na literatura relacionados com a caracterização de sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipo II para multi-índices diagonais, tais como, relação de recorrência a $(d+2)$-termos, interpretação em termos de teoria de operadores e ainda alguns resultados respeitantes à caracterização de uma sucessão de polinómios ortogonal clássica segundo Hahn. Para um melhor conhecimento destes temas poderão ser consultadas por exemplo as referências bibliográficas [**19, 21, 39, 43, 54**].

2.1. Ortogonalidade múltipla de tipo II. Consideremos o seguinte conjunto de multi-índices, $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}_+^d$, dado por

$$\mathcal{I} = \{(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),\ldots,(1,1,\ldots,1),(2,1,\ldots,1),\ldots,(2,2,\ldots,2),\ldots\},$$

que na literatura são conhecidos por multi-índices diagonais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n = rd+k$, onde $k = 0,1,\ldots,d-1$ fazemos corresponder o multi-índice diagonal

$$\vec{n} = (\underbrace{r+1,\ldots,r+1}_{k}, r,\ldots,r),$$

pelo que existe uma correspondência biunívoca, $\mathbf{i}$, entre os conjuntos $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z}_+^d$ e $\mathbb{Z}_0^+$ dada por, $\mathbf{i}(\vec{n}) = |\vec{n}| = n$.

Consideremos $B_{\vec{n}}$ polinómio ortogonal de tipo II relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1,\ldots,u^d\}$ e multi-índice $\vec{n}$. Vamos identificar, a partir de agora, $B_{\vec{n}} \equiv B_{|\vec{n}|} = B_n$.

Lema I.1. *A sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$ onde $n = rd+k$, $k = 0,1,\ldots,d-1$ e $r = 0,1,\ldots$, é ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1,\ldots,u^d\}$ e família de multi-índices diagonais $\mathcal{I}$ se, e somente se,*

$$\begin{cases} u^j(x^i B_{rd+k}) = 0, \quad i = 0,1,\ldots,r-1, \quad j = 1,\ldots,d \\ u^\alpha(x^r B_{rd+k}) = 0, \quad \alpha = 1,\ldots,k \\ u^{k+1}(x^r B_{rd+k}) \neq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Sendo a sucessão de polinómios mónicos, $\{B_n\}$, onde $n = rd+k$, $k = 0,1,\ldots,d-1$ e $r = 0,1,\ldots$, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices diagonais, $\mathcal{I}$, i.e.,

$$\vec{n} = (\underbrace{r+1, \ldots, r+1}_{k}, r, \ldots, r),$$

temos que,

$$\begin{cases} u^j(x^i B_{rd+k}) = 0, & i = 0, 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, , \ldots, d \\ u^\alpha(x^r B_{rd+k}) = 0, & \alpha = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Resta mostrar que $u^{k+1}(x^r B_{rd+k}) \neq 0$. Suponhamos que,

$$\begin{cases} u^j(x^i B_{rd+k}) = 0, & i = 0, 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, \ldots, d \\ u^\alpha(x^r B_{rd+k}) = 0, & \alpha = 1, \ldots, k \\ u^{k+1}(x^r B_{rd+k}) = 0. \end{cases}$$

Então o polinómio B_n verifica as condições de ortogonalidade do polinómio B_{n+1}, o que entra em contradição com a normalidade dos multi-índices. Deste modo, $u^{k+1}(x^r B_{rd+k}) \neq 0$.

Reciprocamente, se

$$\begin{cases} u^j(x^i B_{rd+k}) = 0, & i = 0, 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, \ldots, d \\ u^\alpha(x^r B_{rd+k}) = 0, & \alpha = 1, \ldots, k, \end{cases}$$

e considerando que grau de B_n é igual a n, pela normalidade de cada um dos multi-índices podemos concluir que B_n é ortogonal de tipo II relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice diagonal n. ∎

2.2. Relação de recorrência a $(d+2)$-termos. Uma das caracterizações das sucessões de polinómios múltiplos ortogonais de tipo II, relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice diagonal, $\mathcal{I}$, é que estas verificam uma relação de recorrência a $(d+2)$-termos.

TEOREMA I.4. *Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice diagonal $\mathcal{I}$. Então existem sucessões $(a_{n-k}^n) \subset \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, d$, tais que,*

$$xB_n(x) = B_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{d} a_{n-k}^n B_{n-k}(x), \quad n = d, d+1, \ldots$$

onde $a_{n-d}^n \neq 0$ e $B_0, B_1, \ldots, B_{d-1}$ dados.

DEMONSTRAÇÃO. Ver por exemplo [**54**]. ∎

Vamos apresentar a noção de uma sucessão vectorial de polinómios associada a uma família livre de polinómios mónicos.

DEFINIÇÃO I.8. Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos. A sucessão $\{\mathcal{B}_n\}$ dada por

$$\mathcal{B}_n = [\ B_{nd} \quad \cdots \quad B_{(n+1)d-1}\ ]^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

é dita a *sucessão vectorial de polinómios associada* a $\{B_n\}$.

TEOREMA I.5. *Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A sucessão de polinómios $\{B_n\}$ verifica a relação de recorrência a $(d+2)$--termos dada por,

$$xB_n(x) = B_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{d} a_{n-k}^{n} B_{n-k}(x), \quad n = d, d+1, \ldots$$

onde $a_{n-d}^{n} \neq 0$ e $B_0, B_1, \ldots, B_{d-1}$ dados.

b) A sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ associada à sucessão de polinómios $\{B_m\}$ verifica a relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $d \times d$ dada por,

$$x\mathcal{B}_m = \alpha\,\mathcal{B}_{m+1} + \beta_m\,\mathcal{B}_m + \gamma_m\,\mathcal{B}_{m-1}, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{I.3}$$

com $\mathcal{B}_{-1} = 0_{d\times 1}$ e $\mathcal{B}_0$ dado, onde

$$\beta_m = \begin{bmatrix} a_{md}^{md} & 1 & & & \\ a_{md}^{md+1} & a_{md+1}^{md+1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{md}^{d(m+1)-2} & a_{md+1}^{d(m+1)-2} & \cdots & a_{d(m+1)-2}^{d(m+1)-2} & 1 \\ a_{md}^{d(m+1)-1} & a_{md+1}^{d(m+1)-1} & \cdots & a_{d(m+1)-2}^{d(m+1)-1} & a_{d(m+1)-1}^{d(m+1)-1} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_m = \begin{bmatrix} a_{d(m-1)}^{md} & \cdots & a_{md-1}^{md} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{md-1}^{d(m+1)-1} \end{bmatrix}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em conta a fórmula de recorrência a $(d+2)$-termos obtemos a igualdade matricial dada por,

$$x\begin{bmatrix} B_n \\ \vdots \\ B_{n+d-1} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} B_{n+d} \\ \vdots \\ B_{n+2d-1} \end{bmatrix} + \underline{\beta}_n \begin{bmatrix} B_n \\ \vdots \\ B_{n+d-1} \end{bmatrix} + \underline{\gamma}_n \begin{bmatrix} B_{n-d} \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{bmatrix},$$

onde os coeficientes matriciais α, $\underline{\beta}_n$ e $\underline{\gamma}_n$ são dados por:

$$\underline{\beta}_n = \begin{bmatrix} a_n^n & 1 & & & \\ a_n^{n+1} & a_{n+1}^{n+1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_n^{n+d-2} & a_{n+1}^{n+d-2} & \dots & a_{n+d-2}^{n+d-2} & 1 \\ a_n^{n+d-1} & a_{n+1}^{n+d-1} & \dots & a_{n+d-2}^{n+d-1} & a_{n+d-1}^{n+d-1} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\gamma}_n = \begin{bmatrix} a_{n-d}^n & \cdots & a_{n-1}^n \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1}^{n+d-1} \end{bmatrix}.$$

Fazendo $n = md$ obtemos a relação de recorrência a três termos para os vectores de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ onde $\mathcal{B}_m = [\ B_{md} \ \cdots \ B_{(m+1)d-1}\ ]^T$, $m \in \mathbb{N}$, dada por,

$$x\mathcal{B}_m = \alpha\,\mathcal{B}_{m+1} + \beta_m\,\mathcal{B}_m + \gamma_m\,\mathcal{B}_{m-1}, \quad m = 0, 1, \dots$$

com $\mathcal{B}_{-1} = 0_{d\times 1}$ e $\mathcal{B}_0$ dado onde os coeficientes matriciais são dados por, $\beta_m = \underline{\beta}_{md}$ e $\gamma_m = \underline{\gamma}_{md}$.
O recíproco é imediato. ■

2.3. Interpretação em termos de teoria de operadores. A interpretação que apresentamos pode ser consultada na referência bibliográfica [**19**]. Reescrevendo a relação de recorrência (I.3) na forma matricial, temos

$$J_m \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{m-1} \\ \mathcal{B}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{d\times 1} \\ \vdots \\ 0_{d\times 1} \\ \alpha\mathcal{B}_{m+1} \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{m-1} \\ \mathcal{B}_m \end{bmatrix},$$

onde,

$$J_m = \begin{bmatrix} \beta_0 & \alpha & & & \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{m-1} & \beta_{m-1} & \alpha \\ & & & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}.$$

Notemos agora que,

$$\begin{aligned} \alpha\,\mathcal{B}_{m+1} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{(m+1)d} \\ \vdots \\ B_{d(m+2)-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_{(m+1)d} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Sejam $x_{j,(m+1)d}$, $j = 1, \ldots, (m+1)d$, *tais que* $B_{(m+1)d}(x_{j,(m+1)d}) = 0$. *Então* $x_{j,(m+1)d}$, $j = 1, \ldots, (m+1)d$, *é um valor próprio da matriz* J_m, $m \in \mathbb{N}$, *de ordem* $(m+1)d \times (m+1)d$.

2.4. Polinómios ortogonais múltiplos clássicos segundo Hahn. Os polinómios ortogonais clássicos são habitualmente enumerados como os polinómios, de Hermite, de Laguerre, de Jacobi e de Bessel. A sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices diagonais, $\mathcal{I}$, diz-se *clássica segundo Hahn* se a sucessão de polinómios $\{B'_{n+1}/(n+1)\}$ é ortogonal de tipo II relativamente a um sistema regular de funcionais lineares e família de multi-índices diagonais, $\mathcal{I}$, [**43**]. Nesta secção apresentamos alguns resultados conhecidos na literatura relacionados com a caracterização de sucessões de polinómios ortogonais clássicos segundo Hahn para multi-índices diagonais. De acordo com o Teorema I.4 uma sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$ ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, u^2\}$ e multi-índice diagonal verifica uma relação de recorrência do tipo,

$$B_{n+3}(x) = (x - a_{n+2}^{n+2})B_{n+2}(x) - a_{n+1}^{n+2}B_{n+1}(x) - a_n^{n+2}B_n(x),$$

onde,

$$B_0(x) = 1 \;\;,\;\; B_1(x) = x - a_0^0 \;\text{ e }\; B_2(x) = (x - a_1^1)B_1(x) - a_0^1.$$

O resultado que apresentamos estabelecido pelo autor P. Maroni em [**43**] será generalizado no Capítulo IV, para multi-índices quase-diagonais.

TEOREMA I.6. *Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, u^2\}$ e multi-índice diagonal, $\mathcal{I}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A sucessão de polinómios $\{B_n\}$ é clássica segundo Hahn.

b) Existem polinómios matriciais Φ e Ψ verificando a equação funcional vectorial tipo Pearson

$$(\Phi \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix})' + \Psi \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = 0_{2\times 1},$$

onde,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{00} & \phi_{01} \\ \phi_{10} & \phi_{11} \end{bmatrix} \quad , \; grau\; \phi_{ij} \leq 1 \quad , \quad (i,j) \neq (1,0) \quad , \; grau\; \phi_{10} \leq 2$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2(a_0^2)^{-1} B_1(x) & -2a_0^1 (a_0^2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Com $\phi_{ij}(x) = \sum_{v=0}^{2} c_{i,j}(v) x^v$, verificam-se as seguintes condições:

$$c_{01}(v)n \neq 1 \quad , \quad c_{1,0}(v)n \neq 2(a_0^2)^{-1} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots .$$

c) Existe um inteiro $0 \leq p \leq 3$, tal que,

$$\begin{aligned} & B_n(x) = \sum_{v=n-p}^{n+1} \xi_v^n B_v^{[1]}(x), \quad n = p, p+1, \ldots \\ & \exists\; r = p, p+1, \ldots \colon\; \xi_{r-p}^r \neq 0, \end{aligned} \tag{I.4}$$

onde $B_v^{[1]}(x) = (v+1)^{-1} B'_{v+1}(x)$, $v = 0, 1, \ldots$. Quando $p = 3$,

$$\xi_0^3 (a_1^3)^{-1} n \neq 1, \quad \xi_1^4 (a_2^4)^{-1} n \neq 2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**43**]. ■

O resultado estabelecido pelo autor de P. Maroni que apresentamos a seguir dá-nos uma fórmula de estrutura. Contudo, esta não nos dá uma caracterização como a fórmula de estrutura (I.4) do Teorema I.6. Podemos constatar este facto nos trabalhos [**24, 25**].

Teorema I.7. *Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, u^2\}$ e multi-índice diagonal, $\mathcal{I}$. Consideremos as seguintes afirmações:*

b') Existe um polinómio mónico ϕ e um polinómio matricial $\hat{\mathbf{\Psi}}$, tais que,

$$(\phi \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix})' + \hat{\mathbf{\Psi}} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = 0_{2\times 1},$$

com grau $\phi \leq 3$; grau $\hat{\Psi}_{i,j} \leq 2$, $(i,j) \neq (0,1)$, grau $\hat{\Psi}_{01} \leq 1$.

Quando grau $\phi = 3$:

$$\textit{grau } \overset{\wedge}{\Psi}_{00} = 2 \quad e \quad \textit{grau } \overset{\wedge}{\Psi}_{11} = 2.$$

d) Existe um inteiro $0 \leq p \leq 3$ e um polinómio mónico ϕ, grau $\phi = t \leq p$, tal que,

$$\begin{cases} \phi(x)B_n^{[1]}(x) = \displaystyle\sum_{v=n-p}^{n+t} \lambda_v^n B_v(x), \quad n = p, p+1, \ldots \\ \exists\ r = p, p+1, \ldots : \xi_{r-p}^r \neq 0. \end{cases}$$

Então, temos as seguintes implicações:

$$a) \Rightarrow d) \Leftrightarrow b' \Leftarrow b).$$

Demonstração. Ver [**43**]. ∎

No Capítulo IV vamos estabelecer dois resultados que generalizam a implicação $b) \Rightarrow b')$ do Teorema I.7.

3. Multi-índices quase-diagonais

Nesta secção começamos por mostrar como construir os conjuntos de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, a considerar neste trabalho. A seguir, estabelecemos um resultado que nos dá as condições de ortogonalidade de tipo II de uma sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$ relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$. Por fim, estabelecemos um resultado que nos dá as condições de ortogonalidade de tipo I de um vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$ onde o grau dos polinómios $A_{n,j}$ é igual a $n_j - 1$ relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$.

$n = \|\vec{n}\|$	$\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d)$
0	$(0, \ldots, 0)$
1	$(1, 0, \ldots, 0)$
$\vdots$	$\vdots$
i	$(k_i^1, \ldots, k_i^d)$
$\vdots$	$\vdots$
$sd-1$	$(s, \ldots, s, s-1)$

TABELA 1. Bloco Padrão

3.1. Ortogonalidade múltipla de tipo II. Vamos mostrar como construir os conjuntos de *multi-índices quase-diagonais*, $\mathcal{J}$, a considerar neste trabalho. Para tal comecemos por considerar blocos com sd elementos de $\mathbb{Z}_+^d$ na tabela 1. Consideremos os multi-índices $(k_i^1, \ldots, k_i^d)$ onde $i = 0, 1, \ldots, sd-1$ ordenados de acordo com as seguintes condições:

- $k_{i+1}^j \geq k_i^j, \quad i = 0, 1, \ldots, sd-2, \quad j = 1, \ldots, d;$
- $k_i^{j+1} \leq k_i^j, \quad i = 0, 1, \ldots, sd-1, \quad j = 1, \ldots, d-1;$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} k_i^j = i, \quad i = 0, 1, \ldots, sd-1, \quad j = 1, \ldots, d;$
- $k_{sd-1}^j = \begin{cases} s, & j = 1, 2, \ldots, d-1 \\ s-1, & j = d. \end{cases}$

Vamos identificar $\mathcal{J}_0$ como o conjunto cujos elementos são os de um qualquer dos blocos apresentados na TABELA 1, i.e.,

$$\mathcal{J}_0 = \{(0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (s, \ldots, s, s-1)\}.$$

Partindo de $\mathcal{J}_0$ obtemos sucessivos conjuntos mantendo o mesmo padrão que denotaremos por, $\mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, através da fórmula:

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_0 + n\{(s, \ldots, s)\}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{I.5}$$

Desta forma, definimos os *conjuntos de multi-índices quase-diagonais* a considerar neste trabalho:

$$\mathcal{J} = \{\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_n, \ldots\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

n	(n_1, n_2)
0	$(0,0)$
1	$(1,0)$

TABELA 2. Bloco Padrão

Para $s = 1$ temos $\mathcal{J}_0$ dado por,

$$\mathcal{J}_0 = \{(0,\dots,0),(1,0,\dots,0),(1,1,\dots,0),\dots,(1,\dots,1,0)\},$$

cujos multi-índices designamos por *diagonais*.

Em cada um dos exemplos que apresentamos a seguir, ilustramos a construção dos blocos padrão possíveis, $\mathcal{J}_0$, e os conjuntos de multi-índices quase-diagonais obtidos a partir de cada um deles.

EXEMPLO I.1. $s = 1$, $d = 2$. Vamos identificar por $\mathcal{J}_0$ o conjunto cujos elementos são os do bloco padrão da TABELA 2, i.e.,

$$\mathcal{J}_0 = \{(0,0),(1,0)\}.$$

Tendo em conta a fórmula (I.5) os conjuntos, $\mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, são dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n &= \mathcal{J}_0 + n\{(1,1)\} \\ &= \{(n,n),(n+1,n)\}. \end{aligned}$$

EXEMPLO I.2. $s = 2$, $d = 2$. Seguindo o mesmo processo vamos identificar por $\mathcal{J}_0$ os conjuntos cujos elementos são os dos blocos padrão da TABELA 3, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \{(0,0),(1,0),(1,1),(2,1)\} \\ \mathcal{J}_0 &= \{(0,0),(1,0),(2,0),(2,1)\}. \end{aligned}$$

n	(n_1, n_2)
0	$(0,0)$
1	$(1,0)$
2	$(1,1)$
3	$(2,1)$

n	(n_1, n_2)
0	$(0,0)$
1	$(1,0)$
2	$(2,0)$
3	$(2,1)$

TABELA 3. Blocos Padrão

n	(n_1, n_2)	n	(n_1, n_2)	n	(n_1, n_2)	n	(n_1, n_2)	n	(n_1, n_2)
0	$(0,0)$	0	$(0,0)$	0	$(0,0)$	0	$(0,0)$	0	$(0,0)$
1	$(1,0)$	1	$(1,0)$	1	$(1,0)$	1	$(1,0)$	1	$(1,0)$
2	$(1,1)$	2	$(2,0)$	2	$(2,0)$	2	$(1,1)$	2	$(2,0)$
3	$(2,1)$	3	$(2,1)$	3	$(2,1)$	3	$(2,1)$	3	$(3,0)$
4	$(2,2)$	4	$(3,1)$	4	$(2,2)$	4	$(3,1)$	4	$(3,1)$
5	$(3,2)$	5	$(3,2)$	5	$(3,2)$	5	$(3,2)$	5	$(3,2)$

Tabela 4. Blocos Padrão

Usando a fórmula (I.5) os conjuntos, $\mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, obtidos a partir dos conjuntos $\mathcal{J}_0$ são respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n &= \mathcal{J}_0 + 2n\{(1,1)\} \\ &= \{(2n,2n),(2n+1,2n),(2n+1,2n+1),(2n+2,2n+1)\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n &= \mathcal{J}_0 + 2n\{(1,1)\} \\ &= \{(2n,2n),(2n+1,2n),(2n+2,2n),(2n+2,2n+1)\}. \end{aligned}$$

Exemplo I.3. $s = 3$, $d = 2$.

Seguindo o mesmo processo vamos identificar por $\mathcal{J}_0$ os conjuntos cujos elementos são os dos blocos padrão da Tabela 4, i.e.,

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_0 = \{(0,0),(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,2)\}, \\ &\mathcal{J}_0 = \{(0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(3,1),(3,2)\}, \\ &\mathcal{J}_0 = \{(0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(2,2),(3,2)\}, \\ &\mathcal{J}_0 = \{(0,0),(1,0),(1,1),(2,1),(3,1),(3,2)\} \text{ e} \\ &\mathcal{J}_0 = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(3,1),(3,2)\}. \end{aligned}$$

De forma idêntica os conjuntos, $\mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, obtidos a partir dos conjuntos $\mathcal{J}_0$ atrás apresentados são obtidos usando a fórmula:

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_0 + 3n\{(1,1)\},$$

obtendo-se em cada um dos casos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_n &= \{(3n,3n),(3n+1,3n),(3n+1,3n+1),\\
&\quad (3n+2,3n+1),(3n+2,3n+2),(3n+3,3n+2)\}\\
\mathcal{J}_n &= \{(3n,3n),(3n+1,3n),(3n+2,3n),\\
&\quad (3n+2,3n+1),(3n+3,3n+1),(3n+3,3n+2)\}\\
\mathcal{J}_n &= \{(3n,3n),(3n+1,3n),(3n+2,3n),\\
&\quad (3n+2,3n+1),(3n+2,3n+2),(3n+3,3n+2)\}\\
\mathcal{J}_n &= \{(3n,3n),(3n+1,3n),(3n+1,3n+1),\\
&\quad (3n+2,3n+1),(3n+3,3n+1),(3n+3,3n+2)\}.\\
\mathcal{J}_n &= \{(3n,3n),(3n+1,3n),(3n+2,3n),\\
&\quad (3n+3,3n),(3n+3,3n+1),(3n+3,3n+2)\}.
\end{aligned}$$

Vamos identificar os vectores $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ por $n \in \mathbb{Z}_0^+$ visto que para os conjuntos de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, existe uma correspondência biunívoca, $\mathbf{i}$, entre os conjuntos $\mathbb{Z}_+^d$ e $\mathbb{Z}_0^+$ dada por, $\mathbf{i}(\vec{n}) = |\vec{n}| = n$.

Consideremos, $B_{\vec{n}}$, polinómio ortogonal de tipo II relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice $\vec{n}$. Identificamos $B_{\vec{n}} \equiv B_{|\vec{n}|} = B_n$.

Exemplo I.4. Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, u^2\}$ e multi-índice quase-diagonal $\mathcal{J}$, onde

$$\mathcal{J}_0 = \{(0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(2,2),(3,2)\}.$$

Considerando a Definição I.3, vem

$u^1(B_1) = 0$

$u^1(B_2) = 0,\ u^1(xB_2) = 0$

$u^1(B_3) = 0,\ u^1(xB_3) = 0,\ u^2(B_3) = 0$

$u^1(B_4) = 0,\ u^1(xB_4) = 0,\ u^2(B_4) = 0,\ u^2(xB_4) = 0$

$u^1(B_5) = 0,\ u^1(xB_5) = 0,\ u^2(B_5) = 0,\ u^2(xB_5) = 0,\ u^1(x^2B_5) = 0$

$u^1(B_6) = 0,\ u^1(xB_6) = 0,\ u^2(B_6) = 0,\ u^2(xB_6) = 0,\ u^1(x^2B_6) = 0,\ u^2(x^2B_6) = 0.$

Os polinómios mónicos $B_1, \ldots, B_6$ estão definidos pelas condições de ortogonalidade em termos de

$$\{u^1, xu^1, x^2u^1, u^2, xu^2, x^2u^2\},$$

ainda que estas condições de ortogonalidade aparecem com a ordenação sugerida pelo bloco padrão $\mathcal{J}_0$

$$\{u^1, xu^1, u^2, xu^2, x^2u^1, x^2u^2\}.$$

Definindo as funcionais lineares

$$v^1 := u^1,\ \ v^2 := xu^1,\ \ v^3 := u^2,\ \ v^4 := xu^2,\ \ v^5 := x^2u^1,\ \ v^6 := x^2u^2,$$

vem

$$\begin{aligned}
&v^1(B_1) = 0\\
&v^1(B_2) = 0,\ \ v^2(B_2) = 0\\
&v^1(B_3) = 0,\ \ v^2(B_3) = 0,\ \ v^3(B_3) = 0\\
&v^1(B_4) = 0,\ \ v^2(B_4) = 0,\ \ v^3(B_4) = 0,\ \ v^4(B_4) = 0\\
&v^1(B_5) = 0,\ \ v^2(B_5) = 0,\ \ v^3(B_5) = 0,\ \ v^4(B_5) = 0,\ \ v^5(B_5) = 0\\
&v^1(B_6) = 0,\ \ v^2(B_6) = 0,\ \ v^3(B_6) = 0,\ \ v^4(B_6) = 0,\ \ v^5(B_6) = 0, v^6(B_6) = 0.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo os polinómios mónicos $B_7, \ldots, B_{12}$ estão definidos pelas condições de ortogonalidade em termos de

$$\{u^1, xu^1, x^2u^1, u^2, xu^2, x^2u^2, x^3u^1, x^4u^1, x^5u^1, x^3u^2, x^4u^2, x^5u^2\},$$

ainda que estas condições de ortogonalidade aparecem com a ordenação sugerida pelo bloco padrão $\mathcal{J}_0$

$$\{u^1, xu^1, u^2, xu^2, x^2u^1, x^2u^2, x^3u^1, x^4u^1, x^3u^2, x^4u^2, x^5u^1, x^5u^2\},$$

que podem ser escritas em termos das funcionais $v^1, \ldots, v^6$ como

$$\{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6, x^3v^1, x^3v^2, x^3v^3, x^3v^4, x^3v^5, x^3v^6\}.$$

Mais concretamente

$$\begin{aligned}
&v^1(B_{6\times1+1}) = 0, \ldots, v^6(B_{6\times1+1}) = 0,\ v^1(x^3B_{6\times1+1}) = 0\\
&v^1(B_{6\times1+2}) = 0, \ldots, v^6(B_{6\times1+2}) = 0,\ v^\alpha(x^3B_{6\times1+2}) = 0,\ \alpha = 1, 2\\
&v^1(B_{6\times1+3}) = 0, \ldots, v^6(B_{6\times1+3}) = 0,\ v^\alpha(x^3B_{6\times1+3}) = 0,\ \alpha = 1, 2, 3\\
&v^1(B_{6\times1+4}) = 0, \ldots, v^6(B_{6\times1+4}) = 0,\ v^\alpha(x^3B_{6\times1+4}) = 0,\ \alpha = 1, 2, 3, 4\\
&v^1(B_{6\times1+5}) = 0, \ldots, v^6(B_{6\times1+5}) = 0,\ v^\alpha(x^3B_{6\times1+5}) = 0,\ \alpha = 1, 2, 3, 4, 5\\
&v^1((x^3)^iB_{6\times2+0}) = 0, \ldots, v^6((x^3)^iB_{6\times2+0}) = 0,\ i = 0, 1.
\end{aligned}$$

Em geral podemos considerar $n = 6r + k$ onde $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e $r = 0, 1, \ldots,$ e obtemos as seguintes condições de ortogonalidade de tipo II dadas por

$$\begin{cases} v^j((x^3)^i B_{6r+k}) = 0, & i = 0, 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ v^\alpha((x^3)^r B_{6r+k}) = 0, & \alpha = 1, \ldots, k. \end{cases} \tag{I.6}$$

Seja Γ uma funcional linear definida em $\mathbb{P}$ e tomando valores em $\mathbb{C}^6$, i.e., $\Gamma : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C}^6$, por

$$\Gamma(P(x)) := \left[v^1(P(x)), v^2(P(x)), v^3(P(x)), v^4(P(x)), v^5(P(x)), v^6(P(x))\right]^T.$$

As condições de ortogonalidade (I.6) podem ser escritas de forma equivalente por

$$\begin{cases} \Gamma((x^3)^i B_{6r+k}) = 0_{6\times 1}, & i = 0, 1, \ldots, r-1 \\ v^\alpha((x^3)^r B_{6r+k}) = 0, & \alpha = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Seguindo a mesma técnica para cada um dos conjuntos $\mathcal{J}_0$ associados aos restantes blocos da TABELA 4 obtemos um novo conjunto de funcionais lineares $\{v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6\}$, do tipo

$$\{x^j u^k : j = 0, 1, 2, \ k = 1, 2\},$$

tais que,

$$\mathcal{J}_0 \longleftrightarrow \{(0,0,0,0,0,0), (1,0,0,0,0,0), \ldots, (1,1,1,1,1,0)\}.$$

Facilmente verificamos que os conjuntos de funcionais lineares a considerar são:

$$\begin{aligned} &\{u^1, u^2, xu^1, xu^2, x^2u^1, x^2u^2\}, \\ &\{u^1, xu^1, u^2, x^2u^1, xu^2, x^2u^2\}, \\ &\{u^1, u^2, xu^1, x^2u^1, xu^2, x^2u^2\} \text{ e} \\ &\{u^1, xu^1, x^2u^1, u^2, xu^2, x^2u^2\}. \end{aligned}$$

3.2. Algoritmo de construção de funcionais. Consideremos a sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais dadas na Tabela 1.

$$\mathcal{J} = \{\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_n, \ldots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Seja $v^1 = u^1$, $v^i = x^{k^j_{i-1}} u^j$, $i = 2, \ldots, sd-1$ onde j, para cada i, é definido univocamente pela condição $k^j_i = k^j_{i-1} + 1$ e $v^{sd} = x^{s-1}u^d$. Portanto:

$$v^i \in \{x^k u^j : k = 0, 1, \ldots, s-1, \ j = 1, 2, \ldots, d\}, \ i = 1, 2, \ldots, sd.$$

TEOREMA I.8. *A sucessão de polinómios mónicos* $\{B_n\}$ *onde* $n = (sd)r + k$, $k = 0, 1, \ldots, sd-1$ *e* $r = 0, 1, \ldots,$ *é ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares* $\{u^1, \ldots, u^d\}$ *e família de multi-índices quase-diagonais* $\mathcal{J}$ *se, e somente se,*

$$\begin{cases} v^j((x^s)^m B_{(sd)r+i}) = 0, \ m = 0, 1, \ldots, r-1, \ j = 1, \ldots, sd \\ v^\alpha((x^s)^r B_{(sd)r+i}) = 0, \ \alpha = 1, \ldots, i \\ v^{i+1}((x^s)^r B_{(sd)r+i}) \neq 0, \end{cases} \tag{I.7}$$

onde as funcionais lineares v^j, $j = 1, \ldots, sd$ *são definidos na Subsecção 3.2.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos o conjunto de multi-índices

$$\mathcal{J}_0 = \{(0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0), \ldots, (k_i^1, \ldots, k_i^d), \ldots, (s, \ldots, s, s-1)\}.$$

As funcionais lineares $v^1, \ldots, v^{sd}$ são dados na Subsecção 3.2. Verificamos que $v^1, \ldots, v^i \in \{x^k u^j, \ 0 \leq k \leq k_i^j - 1, \ j = 1, \ldots, d\}$, para $i = 1, \ldots, sd$. Usando as condições de ortogonalidade do polinómio B_i e multi-índice $(k_i^1, \ldots, k_i^d)$ temos que $v^j(B_i) = 0$, $j = 1, \ldots, i$, para $i = 1, \ldots, sd$.

Vamos obter as condições de ortogonalidade dos polinómios B_{sd+i}, $i = 1, \ldots, sd$. Consideremos o multi-índice $(k_i^1, \ldots, k_i^d) + s(1, \ldots, 1)$ e seja $j \in \{1, \ldots, d\}$ definido univocamente pela condição $k_i^j = k_{i-1}^j + 1$. Temos que,

$$u^j(x^{k_{i-1}^j + s} B_{sd+i}) = 0 \Leftrightarrow x^{k_{i-1}^j} u^j(x^s B_{sd+i}) = 0 \Leftrightarrow v^i(x^s B_{sd+i}) = 0.$$

Pela estrutura crescente dos multi-índices, B_{sd+i} cumpre as condições de ortogonalidade de $B_1, \ldots, B_{sd+i-1}$, ou seja, isto é suficiente para identificar que,

$$\begin{cases} v^j(B_{(sd)+i}) = 0, \quad j = 1, \ldots, sd \\ v^\alpha(x^s B_{(sd)+i}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, i. \end{cases}$$

Fazendo o mesmo tipo de raciocínio temos que B_{sdr+i} verifica

$$v^i(x^{sr} B_{(sd)r+i}) = 0,$$

e portanto,

$$\begin{cases} v^j((x^s)^m B_{(sd)r+i}) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, \ldots, sd \\ v^\alpha((x^s)^r B_{(sd)r+i}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, i. \end{cases}$$

Resta mostrar que $v^{i+1}((x^s)^r B_{(sd)r+i}) \neq 0$. Suponhamos que,

$$\begin{cases} v^j((x^s)^m B_{(sd)r+i}) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, \ldots, sd \\ v^\alpha((x^s)^r B_{(sd)r+i}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, i \\ v^{i+1}((x^s)^r B_{(sd)r+i}) = 0. \end{cases}$$

Então o polinómio B_n verifica as condições de ortogonalidade do polinómio B_{n+1} o que entra em contradição com a normalidade dos multi-índices. Assim,

$$v^{i+1}((x^s)^r B_{(sd)r+i}) \neq 0.$$

Reciprocamente, se

$$\begin{cases} v^j((x^s)^m B_{(sd)r+i}) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, r-1, \quad j = 1, \ldots, sd \\ v^\alpha((x^s)^r B_{(sd)r+i}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, i, \end{cases}$$

e considerando que grau de B_n é igual a n pela normalidade de cada um dos multi--índices que implica a unicidade do polinómio mónico, B_n é ortogonal de tipo II relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice quase--diagonal n. ■

Seja Γ uma funcional linear definida em $\mathbb{P}$ e tomando valores em $\mathbb{C}^{sd}$, i.e., $\Gamma : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C}^{sd}$, por

$$\Gamma(P(x)) := [\ v^1(P(x)) \quad \ldots \quad v^{sd}(P(x))\ ]^T, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

As condições de ortogonalidade (I.7) podem ser escritas de forma equivalente, por

$$\begin{cases} \Gamma((x^s)^m B_{(sd)r+i}) = 0_{sd\times 1}, \quad m = 0, 1, \ldots, r-1 \\ v^\alpha((x^s)^r B_{(sd)r+i}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, i \\ v^{i+1}((x^s)^r B_{(sd)r+i}) \neq 0. \end{cases} \tag{I.8}$$

3.3. Ortogonalidade múltipla de tipo I.

TEOREMA I.9. *O vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$ onde o grau dos polinómios $A_{n,j}$ é igual a $n_j - 1$ é ortogonal de tipo I relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais $\mathcal{J}$ se, e somente se,*

$$(\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=0}^{s-1}(A_{n,j}^k(x^s)x^k u^j))(x^m) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, |\vec{n}| - 2,$$

$$(\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=0}^{s-1}(A_{n,j}^k(x^s)x^k u^j))(x^{|\vec{n}|-1}) \neq 0.$$

Demonstração. Sendo o vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$ onde o grau dos polinómios $A_{n,j}$ é igual a $n_j - 1$ ortogonal de tipo I relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índice quase-diagonais, $\mathcal{J}$, pela Definição I.1 vem

$$\sum_{j=1}^{d} u^j(x^m A_{n,j}(x)) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, |\vec{n}| - 2.$$

Considerando a representação para os polinómios $A_{n,j}$ dada por,

$$A_{n,j}(x) = \sum_{k=0}^{s-1} x^k A_{n,j}^k(x^s),$$

vem,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d} u^j(x^m A_{n,j}(x)) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{d} u^j(x^m \sum_{k=0}^{s-1} x^k A_{n,j}^k(x^s)) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=0}^{s-1} u^j(A_{n,j}^k(x^s) x^k x^m) \\
&\qquad = (\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=0}^{s-1} (A_{n,j}^k(x^s) x^k u^j))(x^m), \quad m = 0, 1, \ldots, |\vec{n}| - 2.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que,

$$(\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=0}^{s-1} (A_{n,j}^k(x^s) x^k u^j))(x^{|\vec{n}|-1}) \neq 0.$$

Suponhamos que,

$$\begin{aligned}
&(\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=0}^{s-1} (A_{n,j}^k(x^s) x^k u^j))(x^m) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, |\vec{n}| - 2 \\
&(\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=0}^{s-1} (A_{n,j}^k(x^s) x^k u^j))(x^{|\vec{n}|-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Então o vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$ verifica as condições de ortogonalidade do vector de polinómios $(A_{n+1,1}, \ldots, A_{n+1,d})$ e tendo em conta que $n_j \leq (n+1)_j$, $j = 1, \ldots, d$. Assim, entramos em contradição com a normalidade dos multi-índices. Reciprocamente, se

$$(\sum_{j=1}^{d} \sum_{k=0}^{s-1} (A_{n,j}^k(x^s) x^k u^j))(x^m) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, |\vec{n}| - 2,$$

e sendo grau de $A_{n,j}$ igual a $n_j - 1$ pela normalidade dos multi-índices concluímos que o vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$ é ortogonal de tipo I relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice quase-diagonal n. ∎

4. Relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos

Uma das caracterizações das sucessões de polinómios múltiplos ortogonais de tipo II relativamente ao sistema de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice diagonal $\mathcal{I}$, é que estas verificam uma relação de recorrência a $(d+2)$-termos.

Nesta secção estabelecemos um resultado que mostra que uma sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$, ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, verifica uma relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos do tipo,

$$x^s B_n = B_{n+s} + \sum_{k=0}^{s(d+1)-1} a_{n+s-1-k}^{n+s-1} B_{n+s-1-k}.$$

Reescrevendo matricialmente a relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos obtemos uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais satisfeita por vectores de polinómios.

O processo que vamos usar na demonstração do próximo resultado foi o utilizado pela autora J. Van Iseghem no trabalho [**54**] para famílias de multi-índices diagonais $\mathcal{I}$, i.e., $s = 1$. O trabalho da autora J. Van Iseghem [**53**] foi também útil para a demonstração do resultado que vamos estabelecer.

TEOREMA I.10. *Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos, ortogonal de tipo II relativamente a um sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e multi-índice quase-diagonal $\mathcal{J}$. Então existem sucessões $(a_{n+s-1-k}^{n+s-1}) \subset \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, s(d+1)-1$, tais que,*

$$x^s B_n(x) = B_{n+s}(x) + \sum_{k=0}^{s(d+1)-1} a_{n+s-1-k}^{n+s-1} B_{n+s-1-k}(x), \ n = sd, sd+1, \ldots$$

onde $a_{n-sd}^{n+s-1} \neq 0$ e $B_0, B_1, \ldots, B_{sd-1}$ são dados.

DEMONSTRAÇÃO. Como a sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$ é uma base do espaço vectorial $\mathbb{P}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma única sucessão $(a_j^{n+s-1}) \subset \mathbb{C}$, tal que:

$$x^s B_n = B_{n+s} + \sum_{j=0}^{n+s-1} a_j^{n+s-1} B_j.$$

Substituindo n por $sdr + k$ onde $k = 0, 1, \ldots, sd - 1$ e $r = 0, 1, \ldots,$ na igualdade anterior, vem

$$x^s B_{sdr+k} - B_{sdr+k+s} = \sum_{j=0}^{sdr+k+s-1} a_j^{sdr+k+s-1} B_j. \tag{I.9}$$

Seja, $i = 0, 1, \ldots$. Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $(x^s)^i$ e aplicando a funcional linear Γ, vem

$$\Gamma[(x^s)^{i+1} B_{sdr+k}] - \Gamma[(x^s)^i B_{sdr+k+s}] = \sum_{j=0}^{sdr+k+s-1} a_j^{sdr+k+s-1} \Gamma[(x^s)^i B_j].$$

Pelas condições de ortogonalidade (I.8), temos que,

$$0_{sd\times 1} = \sum_{j=0}^{sd(i+1)-1} a_j^{sdr+k+s-1} \Gamma[(x^s)^i B_j] \ \text{ para } \ i = 0, \ldots, r-2.$$

Seja $i = 0$, temos que,

$$0_{sd\times 1} = \sum_{j=0}^{sd-1} a_j^{sdr+k+s-1} \Gamma(B_j),$$

que nos conduz ao sistema de equações lineares na forma matricial:

$$[a_0^{sdr+k+s-1} \quad \cdots \quad a_{sd-1}^{sdr+k+s-1}] \begin{bmatrix} v^1(B_0) & v^2(B_0) & \cdots & v^{sd}(B_0) \\ & v^2(B_1) & \cdots & v^{sd}(B_1) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & v^{sd}(B_{sd-1}) \end{bmatrix} = 0_{sd\times 1}.$$

Usando,

$$v^1(B_0) \neq 0, \ldots, v^{sd}(B_{sd-1}) \neq 0,$$

temos que,

$$a_0^{sdr+k+s-1} = 0, \ldots, a_{sd-1}^{sdr+k+s-1} = 0.$$

Seja $i = 1$, temos que,

$$0_{sd\times 1} = \sum_{j=sd}^{2sd-1} a_j^{sdr+k+s-1} \Gamma(x^s B_j),$$

que nos conduz ao sistema de equações lineares na forma matricial:

$$[a_{sd}^{sdr+k+s-1} \quad \cdots \quad a_{2sd-1}^{sdr+k+s-1}] \begin{bmatrix} v^1(x^s B_{sd}) & \cdots & v^{sd}(x^s B_{sd}) \\ & \ddots & \vdots \\ & & v^{sd}(x^s B_{2sd-1}) \end{bmatrix} = 0_{sd\times 1.}$$

Usando,

$$v^1(x^s B_{sd}) \neq 0, \ldots, v^{sd}(x^s B_{2sd-1}) \neq 0,$$

temos que,

$$a_{sd}^{sdr+k+s-1} = 0, \ldots, a_{2sd-1}^{sdr+k+s-1} = 0.$$

Continuando o mesmo processo obtemos:

$$a_{jsd}^{sdr+k+s-1} = 0, \ldots, a_{(j+1)sd-1}^{sdr+k+s-1} = 0, \ j = 2, \ldots, r-1.$$

Para $i = r-2$, temos que,

$$0_{sd\times 1} = \sum_{j=(r-2)sd}^{(r-1)sd-1} a_j^{sdr+k+s-1} \Gamma((x^s)^{r-2} B_j),$$

que nos conduz ao sistema de equações lineares na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{(r-2)sd}^{sdr+k+s-1} & \ldots & a_{(r-1)sd-1}^{sdr+k+s-1} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} v^1((x^s)^{r-2} B_{(r-2)sd}) & \cdots & v^{sd}((x^s)^{r-2} B_{(r-2)sd}) \\ & \ddots & \vdots \\ & & v^{sd}((x^s)^{r-2} B_{(r-1)sd-1}) \end{bmatrix} = 0_{sd\times 1}\,.$$

Usando,

$$v^1(x^s B_{(r-2)sd}) \neq 0, \ldots, v^{sd}((x^s)^{r-2} B_{(r-1)sd-1}) \neq 0,$$

temos que,

$$a_{(r-2)sd}^{sdr+k+s-1} = 0, \ldots, a_{(r-1)sd-1}^{sdr+k+s-1} = 0.$$

Considerando agora as condições de ortogonalidade escritas em (I.8) dadas por:

$$v^\alpha((x^s)^r B_{(sd)r+k}) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k,$$

e tendo em conta a igualdade (I.9), verificamos que,

$$v^\alpha\left[(x^s)^{i+1} B_{sdr+k}\right] - v^\alpha\left[(x^s)^i B_{sdr+k+s}\right] = 0,$$

para $i = r-1$ e $\alpha = 1, \ldots, k$ que nos conduz ao sistema equações lineares na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{(r-1)sd}^{sdr+k+s-1} & \ldots & a_{(r-1)sd+k-1}^{sdr+k+s-1} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} v^1((x^s)^{r-1}B_{(r-1)sd}) & \cdots & v^k((x^s)^{r-1}B_{(r-1)sd}) \\ & \ddots & \vdots \\ & & v^k((x^s)^{r-1}B_{(r-1)sd+k-1}) \end{bmatrix} = 0_{sd\times 1}.$$

Usando,

$$v^1((x^s)^{r-1}B_{(r-1)sd}) \neq 0, \ldots, v^k((x^s)^{r-1}B_{(r-1)sd+k-1}) \neq 0,$$

temos que,

$$a_{(r-1)sd}^{sdr+k+s-1} = 0, \ldots, a_{(r-1)sd+k-1}^{sdr+k+s-1} = 0.$$

Temos assim:

$$a_0^{sdr+k+s-1} = \cdots = a_{(r-1)sd+k-1}^{sdr+k+s-1} = 0.$$

Então,

$$x^s B_{sdr+k} = B_{sdr+k+s} + \sum_{j=(r-1)sd+k}^{sdr+k+s-1} a_j^{sdr+k+s-1} B_j,$$

i.e.,

$$x^s B_n = B_{n+s} + \sum_{k=0}^{s(d+1)-1} a_{n+s-1-k}^{n+s-1} B_{n+s-1-k},$$

o que termina a demonstração deste resultado. ∎

Teorema I.11. *Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polimómios mónicos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A sucessão de polinómios $\{B_n\}$ verifica a relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$--termos dada por,

$$x^s B_n(x) = B_{n+s}(x) + \sum_{k=0}^{s(d+1)-1} a_{n+s-1-k}^{n+s-1} B_{n+s-1-k}(x), \quad n = sd, sd+1, \ldots$$

onde $a_{n-sd}^{n+s-1} \neq 0$ e B_0, $B_1, \ldots, B_{sd-1}$ são dados.

b) A sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ associada à sucessão de polinómios $\{B_m\}$ verifica a relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dada por,

$$x^s \mathcal{B}_m(x) = \alpha_m^{s,d}\, \mathcal{B}_{m+1}(x) + \beta_m^{s,d}\, \mathcal{B}_m(x) + \gamma_m^{s,d}\, \mathcal{B}_{m-1}(x), \quad m = 0, 1, \ldots$$

com $\mathcal{B}_{-1} = 0_{sd\times 1}$ *e* $\mathcal{B}_0$ *dado, onde os coeficientes matriciais* $\alpha_m^{s,d}$*,* $\beta_m^{s,d}$ *e* $\gamma_m^{s,d}$ *são dados respetivamente por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{sd(m+1)}^{sd(m+1)} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ a_{sd(m+1)}^{sdm+s(d+1)-2} & \dots & a_{sdm+s(d+1)-2}^{sdm+s(d+1)-2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{sdm}^{sdm+s-1} & \cdots & a_{sdm+s-1}^{sdm+s-1} & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{sdm}^{sd(m+1)-2} & \cdots & a_{sdm+s-1}^{sd(m+1)-2} & & \cdots & a_{sd(m+1)-2}^{sd(m+1)-2} & 1 \\ a_{sdm}^{sd(m+1)-1} & \cdots & a_{sdm+s-1}^{sd(m+1)-1} & & \cdots & a_{sd(m+1)-2}^{sd(m+1)-1} & a_{sd(m+1)-1}^{sd(m+1)-1} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{sdm}^{sdm+s(d+1)-2} & \cdots & a_{sdm+s-1}^{sdm+s(d+1)-2} & & \cdots & a_{sd(m+1)-2}^{sdm+s(d+1)-2} & a_{sd(m+1)-1}^{sdm+s(d+1)-2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{sd(m-1)}^{sdm+s-1} & \cdots & a_{sdm-1}^{sdm+s-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{sdm-1}^{sdm+s(d+1)-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Tendo em conta a fórmula de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos obtemos a igualdade matricial dada por,

$$x^s \begin{bmatrix} B_n \\ \vdots \\ B_{n+sd-1} \end{bmatrix} = \underline{\alpha}_n^{s,d} \begin{bmatrix} B_{n+sd} \\ \vdots \\ B_{n+2sd-1} \end{bmatrix} + \underline{\beta}_n^{s,d} \begin{bmatrix} B_n \\ \vdots \\ B_{n+sd-1} \end{bmatrix} + \underline{\gamma}_n^{s,d} \begin{bmatrix} B_{n-sd} \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{bmatrix},$$

onde os coeficientes matriciais $\underline{\alpha}_n^{s,d}$, $\underline{\beta}_n^{s,d}$ e $\underline{\gamma}_n^{s,d}$ são dados respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n+sd}^{n+sd} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ a_{n+sd}^{n+s(d+1)-2} & \cdots & a_{n+s(d+1)-2}^{n+s(d+1)-2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_n^{n+s-1} & \cdots & a_{n+s-1}^{n+s-1} & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_n^{n+sd-2} & \cdots & a_{n+s-1}^{n+sd-2} & & \cdots & a_{n+sd-2}^{n+sd-2} & 1 \\ a_n^{n+sd-1} & \cdots & a_{n+s-1}^{n+sd-1} & & \cdots & a_{n+sd-2}^{n+sd-1} & a_{n+sd-1}^{n+sd-1} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n+s(d+1)-2} & \cdots & a_{n+s-1}^{n+s(d+1)-2} & & \cdots & a_{n+sd-2}^{n+s(d+1)-2} & a_{n+sd-1}^{n+s(d+1)-2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{n-sd}^{n+s-1} & \cdots & a_{n-1}^{n+s-1} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1}^{n+s(1+d)-2} \end{bmatrix}.$$

Fazendo $n = msd$ obtemos a relação de recorrência a três termos para os vectores de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ onde

$$\mathcal{B}_m = [\ B_{msd} \quad \cdots \quad B_{(m+1)sd-1}\ ]^T,\ m \in \mathbb{N},$$

dada por,

$$x^s \mathcal{B}_m = \alpha_m^{s,d}\, \mathcal{B}_{m+1} + \beta_m^{s,d}\, \mathcal{B}_m + \gamma_m^{s,d}\, \mathcal{B}_{m-1},\ m = 0, 1, \ldots$$

com as condições iniciais $\mathcal{B}_{-1} = 0_{sd\times 1}$ e $\mathcal{B}_0$ dado onde os coeficientes matriciais são dados respectivamente por $\alpha_m^{s,d} = \underline{\alpha}_{md}^{s,d}$, $\beta_m^{s,d} = \underline{\beta}_{md}^{s,d}$ e $\gamma_m^{s,d} = \underline{\gamma}_n^{s,d}$.

O recíproco é imediato. $\blacksquare$

CAPÍTULO II

Interpretação matricial da ortogonalidade múltipla

Vamos iniciar este capítulo apresentando algumas noções algébricas que vão permitir operar com os novos objectos apresentados no capítulo anterior. Posteriormente, damos uma reinterpretação matricial das condições de ortogonalidade múltipla de tipo II de uma sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$, relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, dadas no Teorema I.8. Analogamente, damos uma reinterpretação matricial das condições de ortogonalidade múltipla de tipo I de um vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$ onde o grau dos polinómios $A_{n,j}$ é igual a $n_j - 1$ relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, dadas no Teorema I.9.

Os resultados aqui descritos encontram-se em fase de preparação para submissão (cf. [**13**]).

1. Teoria algébrica

1.1. Vectores de polinómios e polinómios matriciais. Consideremos a família de vectores de polinómios que denotamos por $\mathbb{P}^{sd}$ dada por:

$$\mathbb{P}^{sd} = \{[\ P_1 \quad \cdots \quad P_{sd}\ ]^T : P_j \in \mathbb{P}\},$$

que é um espaço vectorial para adição de vectores de polinómios e multiplicação de um escalar em $\mathbb{C}$ por um vector de polinómios.

Denotemos por $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, o conjunto das matrizes quadradas de ordem $sd \times sd$ com coeficientes em $\mathbb{C}$. Seja $\{\mathcal{P}_j\}$ a família de vectores de polinómios dada por

$$\mathcal{P}_j = [\ x^{jsd} \quad \cdots \quad x^{(j+1)sd-1}\ ]^T, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{II.1}$$

Seja $\{B_n\}$ uma sucessão livre de polinómios e $\{\mathcal{B}_n\}$ onde

$$\mathcal{B}_n = [\ B_{nsd} \quad \cdots \quad B_{(n+1)sd-1}\ ]^T, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{II.2}$$

a sua sucessão vectorial de polinómios associada. Considerando a base canónica de $\mathbb{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma única sucessão $(b_i^n) \subset \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, tal que, $B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i^n x^i$. Assim,

$$\mathcal{B}_n(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{nsd} b_i^{nsd} x^i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{(n+1)sd-1} b_i^{(n+1)sd-1} x^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^{nsd} & \cdots & b_{sd-1}^{nsd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_0^{(n+1)sd-1} & \cdots & b_{sd-1}^{(n+1)sd-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ x^{sd-1} \end{bmatrix}$$
$$+ \cdots + \begin{bmatrix} b_{(n-1)sd}^{nsd} & \cdots & b_{nsd-1}^{nsd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(n-1)sd}^{(n+1)sd-1} & \cdots & b_{nsd-1}^{(n+1)sd-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(n-1)sd} \\ \vdots \\ x^{nsd-1} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} b_{nsd}^{nsd} & & \\ \vdots & \ddots & \\ b_{nsd}^{(n+1)sd-1} & \cdots & b_{(n+1)sd-1}^{(n+1)sd-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{nsd} \\ \vdots \\ x^{(n+1)sd-1} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\mathcal{B}_n = \sum_{j=0}^{n} B_j^n \, \mathcal{P}_j, \quad B_j^n \in \mathcal{M}_{sd \times sd}, \tag{II.3}$$

onde os coeficientes B_j^n, $j = 0, 1, \ldots, n$ estão univocamente determinados.

Observação . Constatamos que para uma sucessão livre de polinómios $\{B_n\}$, a matriz B_n^n em (II.3) é triangular inferior e regular.

Definição II.1. O *polinómio matricial* P_n *de grau igual a* n *e de ordem* N é uma matriz cujas entradas são polinómios de variável complexa, dado por

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \begin{bmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1N}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1}(t) & \cdots & p_{NN}(t) \end{bmatrix} \\ &= A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \ldots + A_0, \end{aligned} \tag{II.4}$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}^{N \times N}$ e A_n é uma matriz regular.

Definição II.2. A sucessão de polinómios matriciais $\{P_n\}$ onde P_n é para cada $n \in \mathbb{N}$ um polinómio matricial de grau n, é dita *uma sucessão livre de polinómios matriciais.*

Tendo em conta (II.1) temos que $\mathcal{P}_j = (x^{sd})^j \mathcal{P}_0$, $j \in \mathbb{N}$. Deste modo,

$$\mathcal{B}_n = V_n(x^{sd})\mathcal{P}_0,$$

onde V_n é o polinómio matricial de grau n e ordem sd, dado por

$$V_n(x) = \sum_{j=0}^{n} B_j^n x^j, \quad B_j^n \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

1.2. Vector de funcionais.

Definição II.3. Sejam $v^j : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ com $j = 1, \ldots, sd$, funcionais lineares. Definimos o *vector de funcionais* $\mathcal{U} = [\ v^1 \ \ \cdots \ \ v^{sd}\ ]^T$, actuando em $\mathbb{P}^{sd}$ e tomando valores em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, por:

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) := (\mathcal{U}.\mathcal{P}^T)^T = \begin{bmatrix} v^1(P_1) & \cdots & v^{sd}(P_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1(P_{sd}) & \cdots & v^{sd}(P_{sd}) \end{bmatrix},$$

onde "." significa o produto simbólico dos vectores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{P}^T$.

O vector de funcionais $\mathcal{U}$ anteriormente definido é linear. De facto:

• Sejam $\mathcal{P},\ \mathcal{Q} \in \mathbb{P}^{sd}$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathcal{P}+\mathcal{Q}) &= \begin{bmatrix} v^1(P_1+Q_1) & \cdots & v^{sd}(P_1+Q_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1(P_{sd}+Q_{sd}) & \cdots & v^{sd}(P_{sd}+Q_{sd}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v^1(P_1) & \cdots & v^{sd}(P_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1(P_{sd}) & \cdots & v^{sd}(P_{sd}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v^1(Q_1) & \cdots & v^{sd}(Q_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1(Q_{sd}) & \cdots & v^{sd}(Q_{sd}) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathcal{U}(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}+\mathcal{Q}) = \mathcal{U}(\mathcal{P}) + \mathcal{U}(\mathcal{Q}), \quad \forall\ \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{P}^{sd}.$$

• Seja $A \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$ e $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^{sd}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(A\,\mathcal{P}) &= \mathcal{U}(\begin{bmatrix} a_{11}P_1 + \cdots + a_{1sd}P_{sd} \\ \vdots \\ a_{sd1}P_1 + \cdots + a_{sdsd}P_{sd} \end{bmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} v^1(a_{11}P_1 + \cdots + a_{1sd}P_{sd}) & \cdots & v^{sd}(a_{11}P_1 + \cdots + a_{1sd}P_{sd}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1(a_{sd1}P_1 + \cdots + a_{sdsd}P_{sd}) & \cdots & v^{sd}(a_{sd1}P_1 + \cdots + a_{sdsd}P_{sd}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1sd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{sd1} & \cdots & a_{sdsd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1(P_1) & \cdots & v^{sd}(P_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1(P_{sd}) & \cdots & v^{sd}(P_{sd}) \end{bmatrix} \\
&= A\,\mathcal{U}(\mathcal{P})\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{U}(A\,\mathcal{P}) = A\,\mathcal{U}(\mathcal{P}),\ \ \forall\ A \in \mathcal{M}_{sd\times sd}\ \text{ e }\ \forall\ P \in \mathbb{P}^{sd}.$$

1.3. Operações com vectores de funcionais lineares.

Definição II.4. Seja $\widehat{A} = \sum_{k=0}^{l} A_k\, x^k$ um polinómio matricial de grau l onde $A_k \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$ e $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares. Definimos o vector de funcionais lineares, produto à esquerda de $\mathcal{U}$ por um polinómio $\widehat{A}$, e denotamo-lo por $\widehat{A}\mathcal{U}$, à aplicação de $\mathbb{P}^{sd}$ em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, definida por:

$$(\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{P}) := (\widehat{A}\mathcal{U}.\mathcal{P}^T)^T = \sum_{k=0}^{l}(x^k\,\mathcal{U})(\mathcal{P}).(A_k)^T.$$

O vector de funcionais $\widehat{A}\mathcal{U}$ anteriormente definido é linear. De facto:

• Sejam $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{P}^{sd}$. Temos:

$$\begin{aligned}
(\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{P}+\mathcal{Q}) &= \sum_{k=0}^{l}(x^k\mathcal{U})(\mathcal{P}+\mathcal{Q}).(A_k)^T \\
&= \sum_{k=0}^{l}((x^k\mathcal{U}).(\mathcal{P}+\mathcal{Q})^T)^T.(A_k)^T
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{l} (\mathcal{P}+\mathcal{Q}).(x^k\mathcal{U})^T.(A_k)^T \\
&= \sum_{k=0}^{l} \mathcal{P}.(x^k\mathcal{U})^T.(A_k)^T + \sum_{k=0}^{l} \mathcal{Q}.(x^k\mathcal{U})^T.(A_k)^T \\
&= \sum_{k=0}^{l} (x^k\mathcal{U})(\mathcal{P}).(A_k)^T + \sum_{k=0}^{l} (x^k\mathcal{U})(\mathcal{Q}).(A_k)^T \\
&= (\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{P}) + (\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{Q}) \,.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$(\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{P}+\mathcal{Q}) = (\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{P}) + (\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{Q}), \ \ \forall \ \mathcal{P},\mathcal{Q} \in \mathbb{P}^{sd}.$$

- Seja $B \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$ e $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^{sd}$. Temos:

$$
\begin{aligned}
(\widehat{A}\mathcal{U})(B\mathcal{P}) &= \sum_{k=0}^{l} (x^k\,\mathcal{U})(B\,\mathcal{P}).(A_k)^T \\
&= \sum_{k=0}^{l} ((x^k\,\mathcal{U}).(B\,\mathcal{P})^T)^T.(A_k)^T \\
&= \sum_{k=0}^{l} (B\,\mathcal{P}).(x^k\,\mathcal{U})^T.(A_k)^T \\
&= B\sum_{k=0}^{l} ((x^k\mathcal{U}).\mathcal{P}^T)^T.(A_k)^T \\
&= B\,(\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{P})
\end{aligned}
$$

Assim,

$$(\widehat{A}\mathcal{U})(B\mathcal{P}) = B(\widehat{A}\mathcal{U})(\mathcal{P}), \ \ \forall \ B \in \mathcal{M}_{sd\times sd} \ \text{ e } \ \mathcal{P} \in \mathbb{P}^{sd}.$$

Definição II.5. Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^{sd}$. Definimos a *derivada*, $\mathbf{D}$, do vector de funcionais lineares, $\mathcal{U}$, que denotaremos por $\mathbf{D}\mathcal{U}$, actuando em $\mathbb{P}^{sd}$ e tomando valores em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, por:

$$\mathbf{D}\mathcal{U}(\mathcal{P}) = \begin{bmatrix} Dv^1(P_1) & \cdots & Dv^{sd}(P_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Dv^1(P_{sd}) & \cdots & Dv^{sd}(P_{sd}) \end{bmatrix} = -\mathcal{U}(\mathcal{P}').$$

O vector de funcionais lineares $\mathbf{D}\mathcal{U}$ anteriormente definido é linear. De facto:

• Sejam $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{P}^{sd}$. Temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathcal{U}(\mathcal{P}+\mathcal{Q}) &= -\mathcal{U}((\mathcal{P}+\mathcal{Q})') \\ &= -(\mathcal{U}(\mathcal{P}')+\mathcal{U}(\mathcal{Q}')) \\ &= -\mathcal{U}(\mathcal{P}')-\mathcal{U}(\mathcal{Q}') \\ &= \mathbf{D}\mathcal{U}(\mathcal{P})+\mathbf{D}\mathcal{U}(\mathcal{Q}).\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{D}\mathcal{U}(\mathcal{P}+\mathcal{Q}) = \mathbf{D}\,\mathcal{U}(\mathcal{P})+\mathbf{D}\mathcal{U}(\mathcal{Q}), \;\; \forall\, \mathcal{P},\mathcal{Q} \in \mathbb{P}^{sd}.$$

• Seja $A \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$ e $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^{sd}$. Temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathcal{U}\,(A\mathcal{P}) &= -\mathcal{U}(A\mathcal{P})' \\ &= -A\,\mathcal{U}(\mathcal{P}') \\ &= A(-\mathcal{U}(\mathcal{P}')) \\ &= A\,\mathbf{D}\mathcal{U}(\mathcal{P}).\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{D}\mathcal{U}(A\,\mathcal{P}) = A\,\mathbf{D}\,\mathcal{U}(\mathcal{P}), \;\; \forall\, A \in \mathcal{M}_{sd\times sd} \;\text{ e }\; \mathcal{P} \in \mathbb{P}^{sd}.$$

1.4. Noções sobre teoria da dualidade. Denotaremos por $\mathbb{P}^*$ o espaço dual de $\mathbb{P}$, i.e., o espaço vectorial das aplicações lineares definidas em $\mathbb{P}$ e tomando valores em $\mathbb{C}$. Recordamos a funcional linear de *Dirac* no ponto $c \in \mathbb{C}$, denotada por δ_c, definida por $\delta_c(p(x)) = p(c), \;\forall\, p \in \mathbb{P}$.

Definição II.6. Seja $\{B_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos. Dizemos que a *sucessão de funcionais lineares* $\{L_m\}$, *onde* $L_m \in \mathbb{P}^*$ é a *sucessão dual* de $\{B_n\}$, se $L_m(B_n) = \delta_{m,m}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Se $v \in \mathbb{P}^*$ temos que $v = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i L_i$ onde $\alpha_i = v(B_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Deste modo se $v \in \mathbb{P}^*$ satisfaz $v(B_i) = 0$ para $i \geq l$ então $v = \displaystyle\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i L_i$.

Definição II.7. Seja $\{L_m\}$ uma sucessão de funcionais lineares onde $L_m \in \mathbb{P}^*$. A sucessão $\{\mathcal{L}_m\}$ dada por

$$\mathcal{L}_m = [\ L_{msd} \quad \cdots \quad L_{(m+1)sd-1}\ ]^T, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{II.5}$$

é dita a *sucessão de vectores de funcionais lineares* associada a $\{L_m\}$.

Tendo em conta a Definição II.3 vem:

$$\mathcal{L}_m(\mathcal{B}_n) = \begin{bmatrix} L_{msd}(B_{nsd}) & \cdots & L_{(m+1)sd-1}(B_{nsd}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{msd}(B_{(n+1)sd-1}) & \cdots & L_{(m+1)sd-1}(B_{(n+1)sd-1}) \end{bmatrix}.$$

Definição II.8. Seja $\{L_m\}$ a sucessão de funcionais lineares duais com respeito à sucessão de polinómios $\{B_n\}$. Seja $\{\mathcal{B}_n\}$ uma sucessão vectorial de polinómios. Dizemos que a *sucessão de vectores de funcionais lineares* $\{\mathcal{L}_m\}$ definida por (II.5) é a *sucessão dual* de $\{\mathcal{B}_n\}$, se

$$\mathcal{L}_m(\mathcal{B}_n) = I_{sd\times sd}\,\delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Se $\mathcal{V}$ é um vector de funcionais lineares existe uma única sucessão $(\lambda_n) \subset \mathcal{M}_{sd\times sd}$, tal que:

$$\mathcal{V} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mathcal{L}_n, \quad \text{onde } (\lambda_n)^T = \mathcal{V}(\mathcal{B}_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo se $\mathcal{V}(\mathcal{B}_n) = 0_{sd\times sd}$ para $n = l, l+1, \ldots$, então

$$\mathcal{V} = \sum_{n=0}^{l-1} \lambda_n \mathcal{L}_n.$$

Exemplo II.1. Seja $\{\boldsymbol{\delta}_m\}$ uma sucessão de vectores de funcionais lineares, onde

$$\boldsymbol{\delta}_m = \left[\ (-1)^{smd}\frac{\delta_0^{(smd)}}{(smd)!} \quad \cdots \quad (-1)^{sd(m+1)-1}\frac{\delta_0^{(sd(m+1)-1)}}{(sd(m+1)-1)!}\ \right]^T, \quad m \in \mathbb{N},$$

em que $\{\delta_0^{(k)}\}$ é a sucessão *delta de Dirac.* Tendo em conta a noção de derivada de uma funcional, vem

$$\delta_0^{(n)}(x^m) = (-1)^m m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\delta_0(x^{m-n}).$$

Sendo $\delta_0(x^{m-n})$ o valor da função no ponto zero, i.e, $\delta_0(p) = p(0)$, vem

$$\delta_0^{(n)}(x^m) = \begin{cases} 0, & \text{se } n > m \\ (-1)^n n!, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Assim,

$$(-1)^n \frac{\delta_0^{(n)}}{n!}(x^m) = \delta_{m,n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Pela Definição II.3 vem

$$\boldsymbol{\delta}_m(\mathcal{P}_j) = \begin{cases} I_{sd\times sd}, & m = j \\ 0_{sd\times sd}, & m \neq j \end{cases}, \quad j, m \in \mathbb{N},$$

i.e.,

$$\boldsymbol{\delta}_m(\mathcal{P}_j) = I_{sd\times sd}\, \delta_{m,j}, \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Então a sucessão de funcionais lineares vectoriais $\{\boldsymbol{\delta}_m\}$ é a sucessão dual de $\{\mathcal{P}_j\}$.

2. Interpretação matricial da ortogonalidade múltipla de tipo II

O objectivo principal desta secção consiste em apresentar uma reinterpretação matricial das condições de ortogonalidade múltipla de tipo II de uma sucessão de polinómios mónicos $\{B_n\}$ relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, dadas no Teorema I.8.

2.1. Multi-índices diagonais.

Teorema II.1. *Uma sucessão de polinómios mónicos $\{B_m\}$, é ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices diagonais $\mathcal{I}$ se, e somente se, a sucessão vectorial de polinómios associada $\{\mathcal{B}_m\}$ dada por* (II.2) *verifica:*

$$\begin{aligned} &i)\ \ (x^k\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = 0_{sd\times sd}, \ \ k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ &ii)\ \ (x^m\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m, \end{aligned} \tag{II.6}$$

onde $\mathcal{U} = \left[\ u^1 \ \ \cdots \ \ u^d\ \right]^T$ e Δ_m é uma matriz triangular superior regular de ordem $d \times d$.

Demonstração. Pela Definição II.3, vem

$$\begin{aligned}(x^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) &= \left(\begin{bmatrix} x^k u^1 \\ \vdots \\ x^k u^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{md} & \cdots & B_{(m+1)d-1} \end{bmatrix}\right)^T \\ &= \begin{bmatrix} u^1(x^k B_{md}) & \cdots & u^d(x^k B_{md}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^1(x^k B_{(m+1)d-1}) & \cdots & u^d(x^k B_{(m+1)d-1}) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Usando as condições de ortogonalidade do Lema I.1, temos as condições (II.6), e reciprocamente. ∎

2.2. Multi-índices quase-diagonais.

Teorema II.2. *Uma sucessão de polinómios mónicos $\{B_m\}$, é ortogonal de tipo II relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais $\mathcal{J}$ se, e somente se, a sucessão vectorial de polinómios associada $\{\mathcal{B}_m\}$ dada por* (II.2) *verifica:*

$$\begin{aligned} &i)\ \ ((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = 0_{sd\times sd}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ &ii)\ \ ((x^s)^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m, \end{aligned} \tag{II.7}$$

onde $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} v^1 & \cdots & v^{sd} \end{bmatrix}^T$, v^j, $j = 1, \ldots, sd$ são definidos na Subsecção 3.2 do Capítulo I, e Δ_m é uma matriz triangular superior regular de ordem $sd \times sd$.

Demonstração. Pela Definição II.3, vem

$$\begin{aligned}((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) &= \left(\begin{bmatrix} (x^s)^k v^1 \\ \vdots \\ (x^s)^k v^{sd} \end{bmatrix} [\ B_{msd} \ \cdots \ B_{(m+1)sd-1}\ ]\right)^T \\ &= \begin{bmatrix} v^1((x^s)^k B_{msd}) & \cdots & v^{sd}((x^s)^k B_{msd}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1((x^s)^k B_{(m+1)sd-1}) & \cdots & v^{sd}((x^s)^k B_{(m+1)sd-1}) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Usando as condições de ortogonalidade do Teorema I.8 temos as condições (II.7), e reciprocamente. ∎

Definição II.9. Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios onde cada $\mathcal{B}_m = [B_{m,1} \ldots B_{m,sd}]^T$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j$ onde $B_j^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$ e o vector de funcionais lineares $\mathcal{U} = [\ v^1 \ \cdots \ v^{sd}\ ]^T$. Dizemos que $\{\mathcal{B}_m\}$ *é ortogonal de tipo II* relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ se

$$\begin{aligned} &i)\ \ ((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = 0_{sd\times sd}, \quad k = 0,1,\ldots,m-1 \\ &ii)\ \ ((x^s)^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m, \end{aligned} \tag{II.8}$$

onde Δ_m é uma matriz de ordem $sd \times sd$ e regular.

Lema II.1. *Seja* $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j$ *onde* $B_j^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$. *Se a matriz* B_m^m *é regular então o conjunto de polinómios* $\{B_{m,1},\ldots,B_{m,sd}\}$ *é linearmente independente.*

Demonstração. Pretendemos mostrar que o conjunto de polinómios $\{B_{m,1},\ldots, B_{m,sd}\}$ é linearmente independente para B_m^m matriz regular. Sejam $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,sd$, tais que

$$\alpha_1 B_{m,1} + \cdots + \alpha_{sd} B_{m,sd} = 0,$$

i.e.,

$$[\ \alpha_1 \ \ \cdots \ \ \alpha_{sd}\ ] \begin{bmatrix} B_{m,1} \\ \vdots \\ B_{m,sd} \end{bmatrix} = 0.$$

Ou seja, $\alpha\mathcal{B}_m = 0$, com

$$\alpha = [\alpha_1 \ldots \alpha_{sd}].$$

Assim,

$$\alpha \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j = 0,$$

i.e.,

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha B_j^m \mathcal{P}_j = 0.$$

Usando a independência linear do conjunto $\{1,\ldots,x^{(m+1)sd-1}\}$, vem

$$\alpha B_j^m = 0, \quad j = 0,1,\ldots,m.$$

Se B_m^m é uma matriz regular então $\alpha = 0_{1\times sd}$, como queríamos mostrar. ∎

LEMA II.2. *Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios onde cada* $\mathcal{B}_m = \begin{bmatrix} B_{m,1} & \cdots & B_{m,sd} \end{bmatrix}^T$, $m \in \mathbb{N}$, *tal que* $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j$ *onde* $B_j^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$. *Se* B_m^m *é uma matriz regular, para todo* $m \in \mathbb{N}$, *então o conjunto de polinómios* $\{B_{m,j}, j = 1, \ldots, sd, m \in \mathbb{N}\}$ *é linearmente independente.*

DEMONSTRAÇÃO. Para mostrar que o conjunto de polinómios $\{B_{m,j}, j = 1, \ldots, sd, m \in \mathbb{N}\}$, é linearmente independente para B_m^m matriz regular, $m \in \mathbb{N}$, é suficiente provar para cada $m \in \mathbb{N}$ que o conjunto de polinómios $\{B_{k,j}\}$, $j = 1, \ldots, sd$, $k = 0, 1, \ldots, m$ é linearmente independente. Sejam

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{sd} \end{bmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \\ &\vdots \\ \beta &= \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_{sd} \end{bmatrix}, \quad \beta_i \in \mathbb{R} \\ \gamma &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_{sd} \end{bmatrix}, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Temos

$$\sum_{i=1}^{sd} \alpha_i B_{0,i} + \cdots + \sum_{i=1}^{sd} \beta_i B_{m-1,i} + \sum_{i=1}^{sd} \gamma_i B_{m,i} = 0,$$

$$\alpha \mathcal{B}_0 + \cdots + \beta \mathcal{B}_{m-1} + \gamma \mathcal{B}_m = 0,$$

$$\alpha(B_0^0 \mathcal{P}_0) + \cdots + \beta(B_0^{m-1}\mathcal{P}_0 + \cdots + B_{m-1}^{m-1}\mathcal{P}_{m-1}) + \gamma(B_0^m \mathcal{P}_0 + \cdots + B_m^m \mathcal{P}_m) = 0,$$

$$(\alpha B_0^0 + \cdots + \beta B_0^{m-1} + \gamma B_0^m)\mathcal{P}_0 + \cdots + (\beta B_{m-1}^{m-1} + \gamma B_{m-1}^m)\mathcal{P}_{m-1} + \gamma B_m^m \mathcal{P}_m = 0.$$

Usando a independência linear do conjunto $\{1, x, \ldots, x^{(m+1)sd-1}\}$, vem

$$\begin{cases} \alpha B_0^0 + \cdots + \beta B_0^{m-1} + \gamma B_0^m = 0 \\ \quad \vdots \\ \beta B_{m-1}^{m-1} + \gamma B_{m-1}^m = 0 \\ \gamma B_m^m = 0. \end{cases}$$

Usando a regularidade das matrizes $B_0^0, \ldots, B_m^m$ obtemos que $\gamma = 0_{1\times sd}$, $\beta = 0_{1\times sd}, \ldots, \alpha = 0_{1\times sd}$ e portanto o conjunto polinómios $\{B_{k,j}, j = 1, \ldots, sd, k = 0, 1, \ldots, m\}$, é linearmente independente. ■

DEFINIÇÃO II.10. Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios onde $\mathcal{B}_m = [B_{m,1} \cdots B_{m,sd}]^T$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j$ onde $B_j^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$. Dizemos que $\{\mathcal{B}_m\}$ *é uma sucessão livre* se B_m^m é uma matriz regular para $m \in \mathbb{N}$.

LEMA II.3. *Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. Consideremos $\mathcal{Q}_m = \mathcal{C}_m\mathcal{B}_m$, $m \in \mathbb{N}$ onde $\mathcal{C}_m$ são matrizes regulares de ordem $sd \times sd$. Então $\{\mathcal{Q}_m\}$ é também ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, i.e.,

$$((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde Δ_m é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$. De

$$\begin{aligned} ((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) &= ((x^s)^k\mathcal{U})((\mathcal{C}_m)^{-1}\mathcal{C}_m\mathcal{B}_m) \\ &= (\mathcal{C}_m)^{-1}((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{C}_m\mathcal{B}_m) \\ &= (\mathcal{C}_m)^{-1}((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{Q}_m), \end{aligned}$$

vem

$$(\mathcal{C}_m)^{-1}((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{Q}_m) = \Delta_m\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N},$$

logo

$$((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{Q}_m) = \mathcal{C}_m\Delta_m\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde $\mathcal{C}_m\Delta_m$ é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$. Assim, a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{Q}_m\}$ é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. ∎

EXEMPLO II.2. Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ e $\{\widehat{\mathcal{B}}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios com $\widehat{\mathcal{B}}_m = (B_0^0)^{-1}\mathcal{B}_m$, $m \in \mathbb{N}$, onde a matriz B_0^0 é tal que $\mathcal{B}_0 = B_0^0\,\mathcal{P}_0$. A sucessão vectorial de polinómios $\{\widehat{\mathcal{B}}_m\}$ é também ortogonal de tipo II relativamente a $\mathcal{U}$. De facto, sendo $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, temos que,

$$((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde Δ_m é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$, i.e.,

$$((x^s)^k\mathcal{U})(\widehat{\mathcal{B}}_m) = (B_0^0)^{-1}\Delta_m\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde $(B_0^0)^{-1}\Delta_m$ é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$. Assim, a sucessão vectorial de polinómios $\{\widehat{\mathcal{B}}_m\}$ é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

Exemplo II.3. Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ e $\{\breve{\mathcal{B}}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios com $\breve{\mathcal{B}}_m = \Delta_m^{-1}\mathcal{B}_m$, $m \in \mathbb{N}$. A sucessão vectorial de polinómios $\{\breve{\mathcal{B}}_m\}$ é também ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. De facto, sendo $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, vem

$$((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m \delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \quad m \in \mathbb{N},$$

onde Δ_m é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$, i.e.,

$$((x^s)^k\mathcal{U})(\breve{\mathcal{B}}_m) = I_{sd\times sd}\, \delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \quad m \in \mathbb{N},$$

logo a sucessão vectorial de polinómios, $\{\breve{\mathcal{B}}_m\}$, é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

3. Interpretação matricial da ortogonalidade múltipla de tipo I

O objectivo principal desta secção consiste em, apresentar uma reinterpretação matricial das condições de ortogonalidade múltipla de tipo I, de um vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$, onde o grau dos polinómios $A_{n,j}$ é igual a $n_j - 1$ relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais, $\mathcal{J}$, dadas no Teorema I.9.

3.1. Multi-índices diagonais.

Teorema II.3. *O vector de polinómios $(A_{n,1}, \ldots, A_{n,d})$, onde o grau dos polinómios $A_{n,j}$ é igual a $n_j - 1$, é ortogonal de tipo I relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1, \ldots, u^d\}$ e família de multi-índices diagonais $\mathcal{I}$ se, e somente se,*

$$\begin{array}{l} i)\ \ (G_n^T(x)\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{d\times d}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ ii)\ \ (G_n^T(x)\mathcal{U})(\mathcal{P}_n) = S_n, \end{array} \tag{II.9}$$

onde $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u^1 & \cdots & u^d \end{bmatrix}^T$, S_n é uma matriz triangular inferior de ordem $d \times d$ regular e

$$G_n(x) = \begin{bmatrix} A_{nd+1,1}(x) & \cdots & A_{(n+1)d,1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{nd+1,d}(x) & \cdots & A_{(n+1)d,d}(x) \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos que,

$$\begin{aligned}(G_n^T(x)\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) &= ((G_n^T(x)\mathcal{U})\mathcal{P}_j^T)^T \\ &= \mathcal{P}_j\,\mathcal{U}^T\,G_n(x) \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d1} & \cdots & A_{dd} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} A_{11} &= (\sum_{k=1}^{d} A_{nd+1,k}(x)u^k)(x^{jd}) \\ &\vdots \\ A_{d1} &= (\sum_{k=1}^{d} A_{nd+1,k}(x)u^k)(x^{(j+1)d-1}) \\ &\vdots \\ A_{1d} &= (\sum_{k=1}^{d} A_{(n+1)d,k}(x)u^k)(x^{jd}) \\ &\vdots \\ A_{dd} &= (\sum_{k=1}^{d} A_{(n+1)d,k}(x)u^k)(x^{(j+1)d-1}). \end{aligned}$$

Usando as condições de ortogonalidade do Teorema I.9 temos as condições (II.9), e reciprocamente. ∎

3.2. Multi-índices quase-diagonais.

TEOREMA II.4. *O vector de polinómios $(A_{n,1},\ldots,A_{n,d})$ onde o grau dos polinómios $A_{n,j}$ é igual a n_j-1, é ortogonal de tipo I relativamente ao sistema regular de funcionais lineares $\{u^1,\ldots,u^d\}$ e família de multi-índices quase-diagonais $\mathcal{J}$ se, e somente se,*

$$\begin{aligned} &i)\ \ ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{sd\times sd}, \quad j=0,1,\ldots,n-1 \\ &ii)\ \ ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_n) = S_n, \end{aligned} \tag{II.10}$$

onde $\mathcal{U} = [\ v^1 \ \ \cdots \ \ v^{sd}\ ]^T$ *com*

$$v^1 = u^1,\ldots,v^s = x^{s-1}u^1,\ldots,v^{sd+s-1} = u^d,\ldots,v^{sd} = x^{s-1}u^d,$$

S_n *é uma matriz triangular inferior de ordem* $sd \times sd$ *regular e*

$$G_n(x^s) = \begin{bmatrix} A^0_{nsd+1,1}(x^s) & \cdots & A^0_{sd(n+1),1}(x^s) \\ \vdots & & \vdots \\ A^{s-1}_{nsd+1,1}(x^s) & \cdots & A^{s-1}_{sd(n+1),1}(x^s) \\ \vdots & & \vdots \\ A^0_{nsd+1,d}(x^s) & \cdots & A^0_{sd(n+1),d}(x^s) \\ \vdots & & \vdots \\ A^{s-1}_{nsd+1,d}(x^s) & \cdots & A^{s-1}_{sd(n+1),d}(x^s) \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Temos que,

$$\begin{aligned} ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_j) &= ((G_n^T(x^s)\,\mathcal{U})\mathcal{P}_j^T)^T \\ &= \mathcal{P}_j\,\mathcal{U}^T\,G_n(x^s) \\ &= \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1sd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{sd1} & \cdots & B_{sdsd} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} B_{11} &= (\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=0}^{s-1}(A^k_{sdn+1,j}(x^s)x^k u^j))(x^{jsd}) \\ &\vdots \\ B_{sd1} &= (\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=0}^{s-1}(A^k_{sdn+1,j}(x^s)x^k u^j))(x^{(j+1)sd-1}) \\ &\vdots \\ B_{1sd} &= (\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=0}^{s-1}(A^k_{sd(n+1),j}(x^s)x^k u^j))(x^{jsd}) \\ &\vdots \\ B_{sdsd} &= (\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=0}^{s-1}(A^k_{sd(n+1),j}(x^s)x^k u^j))(x^{(j+1)sd-1}). \end{aligned}$$

Usando as condições de ortogonalidade do Teorema I.9 temos as condições (II.10), e reciprocamente. ∎

Observação . No Teorema II.4 podemos considerar o vector de funcionais lineares $\mathcal{U} = \widehat{\mathcal{U}} = [\begin{array}{ccc} v^1 & \cdots & v^{sd} \end{array}]^T$, v^j, $j = 1, \ldots, sd$ são definidos na Secção 3.2 do Capítulo I. Nesse caso, estaríamos a realizar uma reordenação por filas do vector de funcionais $\mathcal{U}$ considerado no teorema, e para obter o correspondente G_n, $\widehat{G}_n$, devemos realizar a mesma reordenação por colunas do polinómio matricial G_n considerado no teorema.

Definição II.11. Seja $\{G_n\}$ uma sucessão de polinómios matriciais onde G_n é para cada $n \in \mathbb{N}$ um polinómio matricial com $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} G_k^n x^k$, $G_k^n \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$ e o vector de funcionais lineares $\mathcal{U} = [\begin{array}{ccc} v^1 & \cdots & v^{sd} \end{array}]^T$. Dizemos que $\{G_n\}$ é *ortogonal de tipo I* relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ se

$$\begin{array}{l} i)\ \ ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{sd\times sd}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ ii)\ \ ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_n) = S_n, \end{array} \tag{II.11}$$

onde S_n é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$.

Lema II.4. *Seja $\{G_n\}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. Consideremos $\mathcal{E}_n(x) = G_n(x)\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$ onde $\mathcal{F}_n$ são matrizes regulares de ordem $sd \times sd$. Então a sucessão de polinómios matriciais $\{\mathcal{E}_n\}$ é também ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.*

Demonstração. Seja $\{G_n\}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, i.e.,

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = S_n\delta_{k,n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde S_n é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$.

De

$$\begin{aligned} ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) &= ((G_n^T(x^s)\mathcal{U})\mathcal{P}_j^T)^T \\ &= \mathcal{P}_j\,\mathcal{U}^T\,G_n(x^s) \\ &= \mathcal{P}_j\,\mathcal{U}^T\,G_n(x^s)\mathcal{F}_n(\mathcal{F}_n)^{-1} \\ &= \mathcal{P}_j\,\mathcal{U}^T(G_n(x^s)\mathcal{F}_n)(\mathcal{F}_n)^{-1} \\ &= ((G_n(x^s)\mathcal{F}_n)^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)(\mathcal{F}_n)^{-1} \\ &= (\mathcal{E}_n^T(x^s)\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)(\mathcal{F}_n)^{-1}, \end{aligned}$$

vem

$$(\mathcal{E}_n^T(x^s)\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)(\mathcal{F}_n)^{-1} = S_n\,\delta_{k,n}, \quad k = 0,1,\ldots,n, \quad n \in \mathbb{N},$$

logo,

$$(\mathcal{E}_n^T(x^s)\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = S_n\,\mathcal{F}_n\,\delta_{k,n}, \quad k = 0,1,\ldots,n, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $S_n\,\mathcal{F}_n$ é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$. Assim, a sucessão de polinómios matriciais $\{\mathcal{E}_n\}$ é também ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. ■

4. Regularidade de um vector de funcionais lineares

Apresentamos um resultado de *existência e unicidade* de uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a um vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. Introduzimos as noções de *momentos e matrizes de Hankel por blocos* associadas ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

DEFINIÇÃO II.12. Definimos *os momentos de ordem j* associados ao vector de funcionais lineares $(x^s)^k\mathcal{U}$, por:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_j^k &:= ((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)\\ &= \begin{bmatrix} v^1\big(x^{jsd+ks}\big) & \cdots & v^{sd}\big(x^{jsd+ks}\big) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1\big(x^{(j+1)sd+ks-1}\big) & \cdots & v^{sd}\big(x^{(j+1)sd+ks-1}\big) \end{bmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{II.12}$$

DEFINIÇÃO II.13. Definimos *matrizes de Hankel* por

$$\mathcal{H}_m = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^0 & \cdots & \mathcal{U}_0^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_m^0 & \cdots & \mathcal{U}_m^m \end{bmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{II.13}$$

onde $\mathcal{U}_j^k$ são momentos de ordem j associados ao vector de funcionais lineares $(x^s)^k\mathcal{U}$ dados por (II.12).

DEFINIÇÃO II.14. O vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ é dito *regular* se $\det \mathcal{H}_m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{H}_m$ é dado por (II.13).

TEOREMA II.5. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares. Então $\mathcal{U}$ é regular se, e somente se, dada Δ_m, $m \in \mathbb{N}$, sucessão de matrizes regulares existe uma única sucessão vectorial de polinómios livre $\{\mathcal{B}_m\}$ onde $\mathcal{B}_m = \begin{bmatrix} B_{m,1} & \cdots & B_{m,sd} \end{bmatrix}^T$, $m \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\begin{array}{l} i) \ \ ((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = 0_{sd\times sd}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ ii) \ \ ((x^s)^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m, \end{array}$$

ou seja, $\{\mathcal{B}_m\}$ é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios onde $\mathcal{B}_m = \begin{bmatrix} B_{m,1} & \cdots & B_{m,sd} \end{bmatrix}^T$, $m \in \mathbb{N}$, tal que $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j$ onde $B_j^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$. Pelas condições de ortogonalidade (II.8) a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ se para $k = 0, \ldots, m-1$

$$\begin{aligned} ((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) &= ((x^s)^k\mathcal{U})(\sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j) \\ &= \sum_{j=0}^{m} B_j^m ((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{sd\times sd}, \end{aligned}$$

e para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ((x^s)^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) &= ((x^s)^m\mathcal{U})(\sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j) \\ &= \sum_{j=0}^{m} B_j^m ((x^s)^m\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = \Delta_m. \end{aligned} \tag{II.14}$$

Matricialmente temos,

$$\begin{bmatrix} B_0^m & \cdots & B_m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^0 & \cdots & \mathcal{U}_0^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_m^0 & \cdots & \mathcal{U}_m^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{sd\times sd} & \cdots & 0_{sd\times sd} & \Delta_m \end{bmatrix}.$$

Supondo a regularidade do vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, vem

$$\begin{bmatrix} B_0^m & \cdots & B_m^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{sd\times sd} & \cdots & 0_{sd\times sd} & \Delta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^0 & \cdots & \mathcal{U}_0^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_m^0 & \cdots & \mathcal{U}_m^m \end{bmatrix}^{-1}.$$

Portanto,

$$\mathcal{B}_m = \begin{bmatrix} 0_{sd\times sd} & \cdots & 0_{sd\times sd} & \Delta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^0 & \cdots & \mathcal{U}_0^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_m^0 & \cdots & \mathcal{U}_m^m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{P}_m \end{bmatrix}, \tag{II.15}$$

definido de maneira unívoca. Tomando $m = 0$ em (II.14), temos

$$B_0^0 \mathcal{U}_0^0 = \Delta_0.$$

Usando a regularidade das matrizes $\mathcal{U}_0^0$ e Δ_0 temos que B_0^0 é uma matriz regular. Analogamente, tomando $m = 1$ em (II.14), temos

$$\begin{cases} B_0^1 \mathcal{U}_0^0 + B_1^1 \mathcal{U}_1^0 = 0_{sd\times sd} \\ B_0^1 \mathcal{U}_0^1 + B_1^1 \mathcal{U}_1^1 = \Delta_1, \end{cases}$$

i.e.,

$$B_1^1(\mathcal{U}_1^1 - \mathcal{U}_1^0(\mathcal{U}_0^0)^{-1}\mathcal{U}_0^1) = \Delta_1.$$

Usando a regularidade de $\mathcal{U}$ e a estrutura triangular por blocos, temos

$$\det(\mathcal{U}_1^1 - \mathcal{U}_1^0(\mathcal{U}_0^0)^{-1}\mathcal{U}_0^1) \neq 0,$$

e portanto B_1^1 é uma matriz regular. Usando o mesmo argumento podemos concluir que B_m^m é uma matriz regular e portanto $\{\mathcal{B}_m\}$ é uma sucessão livre. Reciprocamente e de maneira análoga se B_m^m, $m \in \mathbb{N}$, é regular obtemos a regularidade de $\mathcal{U}$. ∎

Apresentamos a seguir um resultado de *existência e unicidade* de uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente a um vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

TEOREMA II.6. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares. Então $\mathcal{U}$ é regular se, e somente se, dada S_n, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de matrizes regulares existe uma única sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$ com $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} G_k^n x^k$, $G_k^n \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$ onde G_n^n é regular tal que*

$$\begin{aligned} &i)\ \ ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{sd\times sd}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1 \\ &ii)\ \ ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_n) = S_n, \end{aligned}$$

ou seja, a sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$, é ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

Demonstração. Seja $\{G_n\}$ uma sucessão de polinómios matriciais onde G_n é para cada $n \in \mathbb{N}$ um polinómio matricial do tipo $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} G_k^n x^k$, $G_k^n \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$. Assim,

$$(G_n(x^s))^T = \sum_{k=0}^{n} (G_k^n)^T (x^s)^k, \quad G_k^n \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Fazendo actuar $\mathcal{U}(\mathcal{P}_r)$ onde $r = 0, 1, \ldots, n$ a ambos os membros, vem

$$((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_r) = (\sum_{k=0}^{n} (G_k^n)^T (x^s)^k \mathcal{U})(\mathcal{P}_r),$$

i.e.,

$$((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_r) = \sum_{k=0}^{n} ((x^s)^k \mathcal{U})(\mathcal{P}_r) G_k^n = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}_r^k G_k^n.$$

Matricialmente temos,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^0 & \cdots & \mathcal{U}_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_n^0 & \cdots & \mathcal{U}_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0^n \\ \vdots \\ G_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((G_n(x^s))^t \mathcal{U})(\mathcal{P}_0) \\ \vdots \\ ((G_n(x^s))^t \mathcal{U})(\mathcal{P}_n) \end{bmatrix}.$$

Pelas condições de ortogonalidade (II.11) a sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$, é ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^0 & \cdots & \mathcal{U}_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_{n-1}^0 & \cdots & \mathcal{U}_{n-1}^n \\ \mathcal{U}_n^0 & \cdots & \mathcal{U}_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0^n \\ \vdots \\ G_{n-1}^n \\ G_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{sd\times sd} \\ \vdots \\ 0_{sd\times sd} \\ S_n \end{bmatrix}, \tag{II.16}$$

onde S_n é uma matriz regular de ordem $sd \times sd$. Usando a regularidade do vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, vem

$$\begin{bmatrix} G_0^n \\ \vdots \\ G_{n-1}^n \\ G_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0^0 & \cdots & \mathcal{U}_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_{n-1}^0 & \cdots & \mathcal{U}_{n-1}^n \\ \mathcal{U}_n^0 & \cdots & \mathcal{U}_n^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{sd\times sd} \\ \vdots \\ 0_{sd\times sd} \\ S_n \end{bmatrix}, \tag{II.17}$$

e portanto obtemos os polinómios G_n de maneira unívoca.

Tomando $m = 0$ em (II.16), temos

$$\mathcal{U}_0^0 \, G_0^0 = S_0.$$

Usando a regularidade das matrizes $\mathcal{U}_0^0$ e S_0 temos que G_0^0 é uma matriz regular. Analogamente, tomando $m = 1$ em (II.16), temos

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0^0\, G_0^1 + \mathcal{U}_0^1\, G_1^1 = 0_{sd\times sd} \\ \mathcal{U}_1^0\, G_0^1 + \mathcal{U}_1^1\, G_1^1 = S_1, \end{cases}$$

i.e.,

$$(\mathcal{U}_1^1 - \mathcal{U}_1^0(\mathcal{U}_0^0)^{-1}\mathcal{U}_0^1)G_1^1 = S_1.$$

Usando a regularidade de $\mathcal{U}$ e a estrutura triangular por blocos, temos

$$\det(\mathcal{U}_1^1 - \mathcal{U}_1^0(\mathcal{U}_0^0)^{-1}\mathcal{U}_0^1) \neq 0,$$

e portanto G_1^1 é uma matriz regular. Usando o mesmo argumento podemos concluir que G_n^n é uma matriz regular. Reciprocamente, e de maneira análoga, se G_n^n, $n \in \mathbb{N}$, é regular obtemos a regularidade do vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. ■

TEOREMA II.7. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares regular, $\{\mathcal{B}_m\}$, uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a $\mathcal{U}$, onde $\mathcal{B}_m$, $m \in \mathbb{N}$ é definido por* (II.15) *e a sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$, ortogonal de tipo I relativamente a $\mathcal{U}$, onde G_n, $n \in \mathbb{N}$, é definido por* (II.17)*. Então:*

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = I_{sd\times sd}\delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

se, e somente se,

$$S_m = (B_m^m)^{-1} \;\; e \;\; \Delta_m = (G_m^m)^{-1},$$

e portanto, a sucessão dual $\{\mathcal{L}_n\}$ associada a $\{\mathcal{B}_m\}$ é dada por:

$$\mathcal{L}_n = (G_n(x^s))^T\mathcal{U}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em conta que $\{\mathcal{P}_m\}$ é uma base de $\mathbb{P}^{sd}$, existe uma única sucessão de matrizes $(B_j^m) \subset \mathcal{M}_{sd\times sd}$, tal que, $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j$. Assim,

$$\begin{aligned} ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) &= ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j) \\ &= \sum_{j=0}^{m} B_j^m((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular, temos que,

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \begin{cases} B_m^m((G_m(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_m), & m = n \\ 0_{sd\times sd}, & m < n \end{cases}$$

i.e.,

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \begin{cases} B_m^m S_m, & m = n \\ 0_{sd\times sd}, & m < n. \end{cases}$$

Assim, $((G_m(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = I_{sd\times sd}$ se, e somente se, $B_m^m S_m = I_{sd\times sd}$, i.e., $S_m = (B_m^m)^{-1}$. Consideremos agora:

$$\begin{aligned} ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) &= ((\sum_{j=0}^{n} G_j^n(x^s)^j)^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) \\ &= ((\sum_{j=0}^{n}(G_j^n)^T(x^s)^j)\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) \\ &= \sum_{j=0}^{n}((x^s)^j\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)G_j^n. \end{aligned}$$

Como anteriormente, sendo $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular, temos que,

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \begin{cases} ((x^s)^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)G_m^m, & m = n \\ 0_{sd\times sd}, & n < m \end{cases}$$

i.e.,

$$((G_n(x^s))^t\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \begin{cases} \Delta_m G_m^m, & m = n \\ 0_{sd\times sd}, & m > n. \end{cases}$$

Assim, $((G_m(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = I_{sd\times sd}$ se, e somente se, $\Delta_m G_m^m = I_{sd\times sd}$, i.e., $\Delta_m = (G_m^m)^{-1}$, mostrando-se o pretendido. ■

CAPÍTULO III

Teoremas de caracterização

Neste capítulo vamos estabelecer resultados relacionados com a caracterização de sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipos I e II. Essas caracterizações são dadas em termos de relações de recorrência a três termos por elas satisfeitas, isto é, estabelecemos um teorema de Favard. Para além disso, provamos uma fórmula de Darboux-Cristoffel satisfeita por estas sucessões de polinómios.

Reencontramos ainda, os problemas de Hermite-Padé para funções matriciais, que mostramos coincidir com o resolvente do operador definido pela matriz de Jacobi por blocos. Terminamos, estabelecendo um resultado de caracterização para sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipos I e II, em termos dos problemas de Hermite-Padé e biortogonalidade relativamente à função resolvente.

Os resultados aqui descritos encontram-se em fase de preparação para submissão (cf. [**14**]).

1. Relações de recorrência

Teorema III.1. *Seja* $\{B_m\}$ *uma sucessão de polinómios mónicos, ortogonal de tipo II relativamente a um sistema regular de funcionais lineares* $\{u^1,\ldots,u^d\}$ *e multi-índice quase-diagonal* $\mathcal{J}$, *o vector de funcionais lineares* $\mathcal{U} = [v^1 \ldots v^{sd}]^T$ *onde* v^j, $j=1,\ldots,sd$ *são definidos na Secção 3.2 do Capítulo I, a sucessão vectorial de polinómios associada* $\{\mathcal{B}_m\}$ *dada por* (II.2), *e ainda a sucessão de vectores de funcionais lineares* $\{\mathcal{L}_n\}$, *dual de* $\{\mathcal{B}_m\}$. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ *é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares* $\mathcal{U}$, *i.e.,*

$$((x^s)^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m\,\delta_{k,m},\quad k=0,1,\ldots,m,\quad m\in\mathbb{N}, \tag{III.1}$$

onde Δ_m é uma matriz triangular superior de ordem $sd \times sd$ e regular dada por

$$\Delta_m = \gamma_m^{s,d} \cdots \gamma_1^{s,d} \Delta_0, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

onde Δ_0 é uma matriz triangular superior de ordem $sd \times sd$.

b) Existem sucessões de matrizes em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, $(\alpha_m^{s,d})$, $(\beta_m^{s,d})$ e $(\gamma_m^{s,d})$, $m \in \mathbb{N}$, com $\gamma_m^{s,d}$ matriz triangular superior e regular tais que $\mathcal{B}_m$ é definida pela relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dada por

$$x^s \mathcal{B}_m(x) = \alpha_m^{s,d} \mathcal{B}_{m+1}(x) + \beta_m^{s,d} \mathcal{B}_m(x) + \gamma_m^{s,d} \mathcal{B}_{m-1}(x), \quad m = 0, 1, \ldots \tag{III.2}$$

com $\mathcal{B}_{-1} = 0_{d\times 1}$ e $\mathcal{B}_0$ dado.

c) Existem sucessões de matrizes em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, $(\gamma_{n+1}^{s,d})$, $(\beta_n^{s,d})$ e $(\alpha_{n-1}^{s,d})$, $n \in \mathbb{N}$, com $\gamma_{n+1}^{s,d}$ matriz triangular superior e regular tais que $\mathcal{L}_n$ é definida pela relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dada por

$$x^s \mathcal{L}_n = (\gamma_{n+1}^{s,d})^T \mathcal{L}_{n+1} + (\beta_n^{s,d})^T \mathcal{L}_n + (\alpha_{n-1}^{s,d})^T \mathcal{L}_{n-1}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{III.3}$$

com

$$\mathcal{L}_1 = (\gamma_1^{s,d})^{-T} (x^s I_{sd\times sd} - (\beta_0^{s,d})^T)(\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T}\mathcal{U} \;\; , \;\; \mathcal{L}_0 = (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T}\mathcal{U},$$

e ainda, $\mathcal{L}_n = (G_n(x^s))^T \mathcal{U}$ onde G_n é para cada $n \in \mathbb{N}$ um polinómio matricial com $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} G_k^n x^k$, $G_k^n \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$.

d) A sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$ é ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

e) Existem sucessões de matrizes em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, (l_{n+1}^n), (l_n^n) e (l_{n-1}^n), $n \in \mathbb{N}$, tais que $G_n(x^s)$ é definida pela relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dada por

$$x^s G_n(x^s) = G_{n+1}(x^s)(l_{n+1}^n)^T + G_n(x^s)(l_n^n)^T + G_{n-1}(x^s)(l_{n-1}^n)^T, \tag{III.4}$$

para $n = 1, 2, \ldots$, com

$$\begin{aligned} G_0(x^s) &= (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1}, \\ G_1(x^s) &= (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1}(x^s I_{sd\times sd} - (l_0^0)^T)((l_1^0)^{-1})^T. \end{aligned}$$

Esquema da demonstração:

$$a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow c)$$

Demonstração. Provemos que $a) \Leftrightarrow b)$. Comecemos por mostrar que $a) \Rightarrow b)$. Consideremos a seguinte representação

$$x^s \mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m+1} \alpha_j^m \mathcal{B}_j, \;\; \alpha_j^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Aplicando o vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ a ambos os membros da representação anterior, e tendo em conta que é ortogonal relativamente à sucessão vectorial de polinómios, $\{\mathcal{B}_m\}$, vem

$$\alpha_0^m \mathcal{U}\left(\mathcal{B}_0\right) = \left(x^s\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_m\right) = 0_{sd\times sd}, \quad m = 2, 3, \cdots$$

Assim,

$$x^s \mathcal{B}_m = \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j^m \mathcal{B}_j.$$

Multiplicando de seguida ambos os membros da representação obtida atrás por x^s e utilizando a mesma técnica que no caso anterior, vem

$$\alpha_1^m \left(x^s\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_1\right) = \left(x^{2s}\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_m\right) = 0_{sd\times sd}, \quad m = 3, 4, \cdots$$

Assim,

$$x^s \mathcal{B}_m = \sum_{j=2}^{m+1} \alpha_j^m \mathcal{B}_j.$$

Multiplicando agora ambos os membros da representação anterior por x^{2s} e utilizando a mesma técnica que nos casos anteriores, vem

$$\alpha_2^m \left(x^{2s}\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_2\right) = \left(x^{3s}\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_m\right) = 0_{sd\times sd}, \quad m = 4, 5, \cdots$$

Assim,

$$x^s \mathcal{B}_m = \sum_{j=3}^{m+1} \alpha_j^m \mathcal{B}_j.$$

Continuando o nosso processo verificamos que:

$$\alpha_{m-2}^m \left(x^{s(m-2)}\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_{m-2}\right) = \left(x^{s(m-1)}\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_{m-2}\right),$$

i.e., $\alpha_{m-2}^m = 0_{sd\times sd}$. Assim, $\alpha_j^m = 0_{sd\times sd}$ para $j = 0, 1, \cdots, m-2$. Temos assim:

$$x^s \mathcal{B}_m = \alpha_{m+1}^m \mathcal{B}_{m+1} + \alpha_m^m \mathcal{B}_m + \alpha_{m-1}^m \mathcal{B}_{m-1}.$$

Fazendo:

$$\alpha_{m+1}^m = \alpha_m^{s,d}, \;\; \alpha_m^m = \beta_m^{s,d} \text{ e } \alpha_{m-1}^m = \gamma_m^{s,d},$$

temos a relação de recorrência a três termos pretendida.

Para mostrar que $b) \Rightarrow a)$ vamos construir um vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ que verifique (III.1) definido de forma única à custa dos seus momentos $\mathcal{U}_m^k$ a partir das condições:

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}(\mathcal{B}_0) = \Delta_0 \\ &\mathcal{U}(\mathcal{B}_j) = 0_{sd\times sd}, \quad j = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{III.5}$$

Como $\{\mathcal{P}_m\}$ é uma base de $\mathbb{P}^{sd}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma única sucessão $(B_j^m) \subset \mathcal{M}_{sd\times sd}$, tal que, $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} B_j^m \mathcal{P}_j$.

- Seja $k = 0$. Temos que,

$$\begin{aligned} m = 0: \quad &\mathcal{U}(\mathcal{B}_0) = B_0^0 \mathcal{U}(\mathcal{P}_0), \text{ i.e., } \mathcal{U}_0^0 = (B_0^0)^{-1}\mathcal{U}(\mathcal{B}_0) \\ m = 1: \quad &\mathcal{U}(\mathcal{B}_1) = \sum_{j=0}^{1} B_j^1 \mathcal{U}(\mathcal{P}_j), \text{ i.e., } \mathcal{U}_1^0 = -(B_1^1)^{-1}B_0^1\mathcal{U}_0^0 \\ m = 2: \quad &\mathcal{U}(\mathcal{B}_2) = \sum_{j=0}^{2} B_j^2 \mathcal{U}(\mathcal{P}_j), \text{ i.e., } \mathcal{U}_2^0 = -\sum_{j=0}^{1}(B_2^2)^{-1}B_j^2\mathcal{U}_j^0. \end{aligned}$$

Para $m = 3, 4, \ldots$, temos que,

$$\mathcal{U}_m^0 = -\sum_{j=0}^{m-1}(B_m^m)^{-1}B_j^m\mathcal{U}_j^0.$$

- Seja $k = 1, 2, \ldots$. Usando (III.2) vem

$$(x^s)^k\mathcal{B}_m = \alpha_m^{s,d}x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{m+1} + \beta_m^{s,d}x^{s(k-1)}\mathcal{B}_m + \gamma_m^{s,d}x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{m-1}.$$

Para $m = 0$ temos que,

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_0) = \alpha_0^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_1) + \beta_0^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_0),$$

i.e.,

$$\mathcal{U}_0^k = (B_0^0)^{-1} \times \left[\alpha_0^{s,d}B_1^1\mathcal{U}_1^{s(k-1)} + (\alpha_0^{s,d}B_0^1 + \beta_0^{s,d}B_0^0)\right]\mathcal{U}_0^{s(k-1)}.$$

Para $m = 1$ temos que,

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_1) = \alpha_1^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_2) + \beta_1^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_1) + \gamma_1^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_0),$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^k = (B_1^1)^{-1}&\left[\alpha_1^{s,d}B_2^2\mathcal{U}_2^{s(k-1)} + (\alpha_1^{s,d}B_1^2 + \beta_1^{s,d}B_1^1)\mathcal{U}_1^{s(k-1)}\right] \\ &+(B_1^1)^{-1}\left[(\alpha_1^{s,d}B_0^2 + \beta_1^{s,d}B_0^1 + \gamma_1^{s,d}B_0^0)\mathcal{U}_0^{s(k-1)} - B_0^1\mathcal{U}_0^k\right]. \end{aligned}$$

Para $m \leq k$, temos que,

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_m) = \alpha_m^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{m+1}) + \beta_m^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_m) + \gamma_m^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{m-1}),$$

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_m) = \alpha_m^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\sum_{j=0}^{m+1}B_j^{m+1}\mathcal{P}_j)$$
$$+\beta_m^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\sum_{j=0}^{m}B_j^{m}\mathcal{P}_j) + \gamma_m^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\sum_{j=0}^{m-1}B_j^{m-1}\mathcal{P}_j),$$

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_m) = \alpha_m^{s,d}\sum_{j=0}^{m+1}B_j^{m+1}\mathcal{U}_j^{k-1} + \beta_m^{s,d}\sum_{j=0}^{m}B_j^{m}\mathcal{U}_j^{k-1} + \gamma_m^{s,d}\sum_{j=0}^{m-1}B_j^{m-1}\mathcal{U}_j^{k-1},$$

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_m) = \sum_{j=0}^{m-1}(\alpha_m^{s,d}B_j^{m+1} + \beta_m^{s,d}B_j^{m} + \gamma_m^{s,d}B_j^{m-1})\mathcal{U}_j^{k-1}$$
$$+\alpha_m^{s,d}B_m^{m+1}\mathcal{U}_m^{k-1} + \alpha_m^{s,d}B_{m+1}^{m+1}\mathcal{U}_{m+1}^{k-1} + \beta_m^{s,d}B_m^{m}\mathcal{U}_m^{k-1},$$

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_m) = \sum_{j=0}^{m-1}(\alpha_m^{s,d}B_j^{m+1} + \beta_m^{s,d}B_j^{m} + \gamma_m^{s,d}B_j^{m-1})\mathcal{U}_j^{k-1}$$
$$+(\alpha_m^{s,d}B_m^{m+1} + \beta_m^{s,d}B_m^{m})\mathcal{U}_m^{k-1} + \alpha_m^{s,d}B_{m+1}^{m+1}\mathcal{U}_{m+1}^{k-1}.$$

Tendo em conta que,

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_m) = \mathcal{U}((x^s)^k\sum_{j=0}^{m}B_j^{m}\mathcal{P}_j) = B_m^m\mathcal{U}_m^k + \sum_{j=0}^{m-1}B_j^m\mathcal{U}_j^k,$$

vem

$$\mathcal{U}_m^k = (B_m^m)^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}(\alpha_m^{s,d}B_j^{m+1} + \beta_m^{s,d}B_j^{m} + \gamma_m^{s,d}B_j^{m-1})\mathcal{U}_j^{k-1}+$$
$$(B_m^m)^{-1}((\alpha_m^{s,d}B_m^{m+1} + \beta_m^{s,d}B_m^{m})\mathcal{U}_m^{k-1} + \alpha_m^{s,d}B_{m+1}^{m+1}\mathcal{U}_{m+1}^{k-1} - \sum_{j=0}^{m-1}B_j^m\mathcal{U}_j^k).$$

Para $m = k$ temos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_k) &= \alpha_k^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{k+1}) + \beta_k^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_k) + \gamma_k^{s,d}\mathcal{U}(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{k-1})\\
&= \gamma_k^{s,d}\gamma_{k-1}^{s,d}\cdots\gamma_1^{s,d}\mathcal{U}(\mathcal{B}_0)\\
&= \gamma_k^{s,d}\gamma_{k-1}^{s,d}\cdots\gamma_1^{s,d}B_0^0\mathcal{U}_0^0,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\mathcal{U}_k^k = (B_k^k)^{-1}(\gamma_k^{s,d}\gamma_{k-1}^{s,d}\cdots\gamma_1^{s,d}B_0^0\mathcal{U}_0^0 - \sum_{j=0}^{k-1}B_j^k\mathcal{U}_j^k).$$

Para $m > k$ temos que,

$$\mathcal{U}((x^s)^k\mathcal{B}_m) = 0_{sd\times sd},$$

i.e.,

$$\mathcal{U}_m^k = \sum_{j=0}^{m-1} -(B_m^m)^{-1}B_j^m\mathcal{U}_j^k.$$

Assim, os momentos associados ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ estão univocamente determinados a partir de (III.5) e usando o facto de B_m^m ser regular obtemos a regularidade do vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

Para mostrar a implicação $b) \Rightarrow c)$, comecemos por escrever a funcional linear vectorial $x^s\mathcal{L}_n$ em termos dos elementos da sucessão dual $\{\mathcal{L}_n\}$, i.e.,

$$x^s\mathcal{L}_n = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j^n \mathcal{L}_j \text{ onde } (\lambda_j^n)^T = (x^s\mathcal{L}_n)(\mathcal{B}_j) = \mathcal{L}_n(x^s\mathcal{B}_j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o vector de funcionais lineares $\mathcal{L}_n$ a ambos os membros da relação de recorrência a três termos, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n(x^s\mathcal{B}_j) &= \mathcal{L}_n(\alpha_j^{s,d}\mathcal{B}_{j+1} + \beta_j^{s,d}\mathcal{B}_j + \gamma_j^{s,d}\mathcal{B}_{j-1}) \\
&= \mathcal{L}_n(\alpha_j^{s,d}\mathcal{B}_{j+1}) + \mathcal{L}_n(\beta_j^{s,d}\mathcal{B}_j) + \mathcal{L}_n(\gamma_j^{s,d}\mathcal{B}_{j-1}) \\
&= \begin{cases} \alpha_{n-1}^{s,d}, & j = n-1 \\ \beta_n^{s,d}, & j = n \\ \gamma_{n+1}^{s,d}, & j = n+1 \\ 0_{sd\times sd}, & j \neq n-1, n, n+1, \end{cases}
\end{aligned}$$

i.e., $\lambda_{n-1}^n = (\alpha_{n-1}^{s,d})^T$, $\lambda_n^n = (\beta_n^{s,d})^T$ e $\lambda_{n+1}^n = (\gamma_{n+1})^T$, obtendo-se a relação de recorrência a três termos para a sucessão de funcionais lineares vectoriais $\{\mathcal{L}_n\}$ pretendida.

Por indução matemática, vamos mostrar que $\mathcal{L}_n = (G_n(x^s))^t\mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 0$, temos que, $\mathcal{L}_0 = ((\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1})^T\mathcal{U}$. Suponhamos agora que a propriedade é válida para $k = 1, \ldots, p$, i.e., $\mathcal{L}_k = (G_k(x^s))^T\mathcal{U}$ com grau $G_k = k$, $k = 1, \ldots, p$ e verifiquemos que é também válida para $k = p+1$, i.e., $\mathcal{L}_{p+1} = (G_{p+1}(x^s))^T\mathcal{U}$, $p \in \mathbb{N}$. Considerando a relação de recorrência a três termos (III.3) e tendo em conta a hipótese de indução, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p+1} = &((\gamma_{p+1}^{s,d})^T)^{-1} \\
&\times \left[(x^s I_{sd\times sd} - (\beta_p^{s,d})^T)(G_p(x^s))^T - (\alpha_{p-1}^{s,d})^t(G_{p-1}(x^s))^T\right]\mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{L}_{p+1} = (G_{p+1}(x^s))^T\mathcal{U}$, $p \in \mathbb{N}$, i.e, se a condição for verdadeira para $k = 1, \ldots, p$, também o é para $p+1$, mostrando-se a propriedade pretendida.

Mostremos agora a implicação $c) \Rightarrow b)$. Seja $x^s\mathcal{B}_m = \sum_{k=0}^{m+1} \eta_k^m \mathcal{B}_k$ onde $\eta_k^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}$. Aplicando o vector de funcionais lineares $\mathcal{L}_k$ a ambos os membros desta representação temos $\eta_k^m = (x^s\mathcal{L}_k)(\mathcal{B}_m)$. Aplicando a nossa hipótese, vem

$$\begin{aligned}
\eta_k^m &= ((\gamma_{k+1}^{s,d})^T\mathcal{L}_{k+1} + (\beta_k^{s,d})^T\mathcal{L}_k + (\alpha_{k-1}^{s,d})^T\mathcal{L}_{k-1})(\mathcal{B}_m) \\
&= \mathcal{L}_{k+1}(\mathcal{B}_m)\gamma_{k+1}^{s,d} + \mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{B}_m)\beta_k^{s,d} + \mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{B}_m)\alpha_{k-1}^{s,d} \\
&= \begin{cases} \alpha_m^{s,d}, & k = m+1 \\ \beta_m^{s,d}, & k = m \\ \gamma_m^{s,d}, & k = m-1 \\ 0_{sd\times sd}, & k \neq m-1, m, m+1, \end{cases}
\end{aligned}$$

logo,

$$x^s\mathcal{B}_m = \alpha_m^{s,d}\mathcal{B}_{m+1} + \beta_m^{s,d}\mathcal{B}_m + \gamma_m^{s,d}\mathcal{B}_{m-1},$$

como queríamos mostrar.

Vamos agora mostrar a implicação $c) \Rightarrow d)$. Pelo Teorema II.7 sabemos que $\mathcal{L}_n = (G_n(x^s))^T\mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, é o termo geral da sucessão dual de $\{\mathcal{B}_m\}$ ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. Deste modo, usando a regularidade do vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, podemos identificar de forma única a sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$, da alínea $c)$, como a sucessão ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$.

Mostremos a implicação $d) \Rightarrow e)$. Sendo $\{G_n\}$ uma sucessão livre de polinómios matriciais, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma única sucessão $(l_k^n) \subset \mathcal{M}_{sd\times sd}$, tal que,

$$x^s(G_n(x^s))^T = \sum_{k=0}^{n+1} l_k^n(G_k(x^s))^T.$$

Fazendo actuar $\mathcal{U}(\mathcal{P}_j)$, $j = 0, 1, \ldots$ a ambos os membros da igualdade anterior, vem

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(x^s\mathcal{P}_j) = (\sum_{k=0}^{n+1} l_k^n(G_k(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j),$$

i.e.,

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(x^s\mathcal{P}_j) = \sum_{k=0}^{n+1}((G_k(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)(l_k^n)^T.$$

Sendo,

$$x^s\mathcal{P}_j = \vartheta_1^j\mathcal{P}_{j+1} + \vartheta_2^j\mathcal{P}_j, \ \ \vartheta_i^j \in \mathcal{M}_{sd\times sd}, \tag{III.6}$$

vem,

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\vartheta_1^j\mathcal{P}_{j+1} + \vartheta_2^j\mathcal{P}_j) = \sum_{k=0}^{n+1}((G_k(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)(l_k^n)^T.$$

Tendo em conta a nossa hipótese, i.e., a sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$ é ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, verificamos que:

Para $j = 0$:

$$0_{sd\times sd} = ((G_0(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_0)(l_0^n)^T, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Sendo,

$$((G_0(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) = S_0 \text{ (matriz triangular inferior regular)},$$

vem, $l_0^n = 0_{sd\times sd}$.

Para $j = 1$:

$$0_{sd\times sd} = ((G_1(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_1)(l_1^n)^T, \quad n = 3, 4, \ldots .$$

Sendo,

$$((G_1(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_1) = S_1 \text{ (matriz triangular inferior regular)},$$

vem, $l_1^n = 0_{sd\times sd}$.

$$\vdots$$

Para $j = n-2$:

$$0_{sd\times sd} = ((G_{n-2}(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_{n-2})(l_{n-2}^n)^T.$$

Sendo,

$$((G_{n-2}(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_{n-2}) = S_{n-2} \text{ (matriz triangular inferior regular)},$$

vem, $l_{n-2}^n = 0_{sd\times sd}$.

Assim,

$$x^s(G_n(x^s))^T = l_{n+1}^n(G_{n+1}(x^s))^T + l_n^n(G_n(x^s))^T + l_{n-1}^n(G_{n-1}(x^s))^T, \tag{III.7}$$

i.e.,

$$x^sG_n(x^s) = G_{n+1}(x^s)(l_{n+1}^n)^T + G_n(x^s)(l_n^n)^T + G_{n-1}(x^s)(l_{n-1}^n)^T,$$

como queríamos mostrar. Vamos a seguir determinar os coeficientes matriciais l_{n-1}^n, l_n^n e l_{n+1}^n. Fazendo actuar $\mathcal{U}(\mathcal{P}_{n-1})$ a ambos os membros de (III.7) e tendo em conta que a sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}$ é ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, vem:

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(x^s\mathcal{P}_{n-1}) = l_{n-1}^nS_{n-1}.$$

Usando (III.6), vem

$$\vartheta_1^{n-1} S_n = l_{n-1}^n S_{n-1},$$

i.e.,

$$l_{n-1}^n = \vartheta_1^{n-1} S_n (S_{n-1})^{-1}.$$

De forma análoga fazendo actuar $\mathcal{U}(\mathcal{P}_n)$ a ambos os membros de (III.7), vem

$$((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(x^s \mathcal{P}_n) = l_n^n S_n + l_{n-1}^n ((G_{n-1}(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_n).$$

Usando (III.6), vem

$$((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\vartheta_1^n \mathcal{P}_{n+1} + \vartheta_2^n \mathcal{P}_n) = l_n^n S_n + l_{n-1}^n ((G_{n-1}(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_n),$$

i.e.,

$$l_n^n = \left[\vartheta_1^n ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1}) + \vartheta_2^n S_n\right] (S_n)^{-1} - \left[l_{n-1}^n ((G_{n-1}(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_n)\right] (S_n)^{-1}.$$

Finalmente, fazendo actuar $\mathcal{U}(\mathcal{P}_{n+1})$ a ambos os membros de (III.7), vem

$$\begin{aligned} ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(x^s \mathcal{P}_{n+1}) &= l_{n+1}^n S_{n+1} \\ &\quad + l_n^n ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1}) + l_{n-1}^n ((G_{n-1}(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1}). \end{aligned}$$

Usando (III.6), vem

$$\begin{aligned} ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\vartheta_1^{n+1} \mathcal{P}_{n+2} + \vartheta_2^{n+1} \mathcal{P}_{n+1}) &= l_{n+1}^n S_{n+1} \\ &\quad + l_n^n ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1}) + l_{n-1}^n ((G_{n-1}(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1}), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} l_{n+1}^n &= \left[\vartheta_1^{n+1} ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+2}) + \vartheta_2^{n+1} ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1})\right] (S_{n+1})^{-1} \\ &\quad - \left[l_n^n ((G_n(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1}) + l_{n-1}^n ((G_{n-1}(x^s))^T \mathcal{U})(\mathcal{P}_{n+1})\right] (S_{n+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos a implicação $e) \Rightarrow c)$. De (III.7) temos

$$x^s \mathcal{L}_n = l_{n+1}^n \mathcal{L}_{n+1} + l_n^n \mathcal{L}_n + l_{n-1}^n \mathcal{L}_{n-1} \text{ com } \mathcal{L}_n = (G_n(x^s))^t \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $l_{n+1}^n = (\gamma_{n+1}^{s,d})^T$, $l_n^n = (\beta_n^{s,d})^T$ e $l_{n-1}^n = (\alpha_{n-1}^{s,d})^T$. ∎

Observação . Em notação matricial a relação de recorrência a três termos do Teorema anterior, (III.2), é escrita por:

$$J \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m \\ \vdots \end{bmatrix} = x^s \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m \\ \vdots \end{bmatrix},$$

onde a matriz tridiagonal por blocos

$$J = \begin{bmatrix} \beta_0^{s,d} & \alpha_0^{s,d} & 0_{sd\times sd} & & & \\ \gamma_1^{s,d} & \beta_1^{s,d} & \alpha_1^{s,d} & 0_{sd\times sd} & & \\ 0_{sd\times sd} & \gamma_2^{s,d} & \beta_2^{s,d} & \alpha_2^{s,d} & 0_{sd\times sd} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{III.8}$$

é designada matriz de *Jacobi* por blocos.

Retomamos o Exemplo II.2. Pelo teorema anterior a sucessão vectorial de polinómios, $\{\widehat{\mathcal{B}}_m\}$, ortogonal relativamente ao vector de funcionais lineares, $\mathcal{U}$, verifica uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd\times sd$ dada por:

$$\begin{aligned} x^s\widehat{\mathcal{B}}_m(x) = {} & (B_0^0)^{-1}\alpha_m^{s,d}B_0^0\,\widehat{\mathcal{B}}_{m+1}(x) \\ & +(B_0^0)^{-1}\beta_m^{s,d}B_0^0\,\widehat{\mathcal{B}}_m(x) + (B_0^0)^{-1}\gamma_m^{s,d}B_0^0\,\widehat{\mathcal{B}}_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

com $\widehat{\mathcal{B}}_0 = (B_0^0)^{-1}\,\mathcal{B}_0 = \mathcal{P}_0$ e $\widehat{\mathcal{B}}_{-1} = 0_{sd\times 1}$.

Notemos que sendo a sucessão vectorial de polinómios, $\{\widehat{\mathcal{B}}_m\}$, ortogonal relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, é ortogonal relativamente vector de funcionais lineares $((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1})^T\mathcal{U}$; e, consequentemente,

$$\begin{aligned} (((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1})^T\mathcal{U})(\widehat{\mathcal{B}}_0) &= (((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1})^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) \\ &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1} \\ &= I_{sd\times sd}. \end{aligned}$$

Da mesma forma retomando o Exemplo II.3, temos que a sucessão vectorial de polinómios $\{\breve{\mathcal{B}}_m\}$, ortogonal relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, verifica uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem

$sd \times sd$, dada por

$$x^s \breve{\mathcal{B}}_m(x) = (\Delta_m)^{-1} \alpha_m^{s,d} \Delta_{m+1} \breve{\mathcal{B}}_{m+1}(x) \\ +(\Delta_m)^{-1} \beta_m^{s,d} \Delta_m \breve{\mathcal{B}}_m(x) + (\Delta_m)^{-1} \gamma_m^{s,d} \Delta_{m-1} \breve{\mathcal{B}}_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \ldots$$

com $\breve{\mathcal{B}}_0 = (\Delta_0)^{-1} \mathcal{B}_0$ e $\breve{\mathcal{B}}_{-1} = 0_{sd \times 1}$.

Observação . No capítulo seguinte vamos necessitar da expressão do polinómio matricial G_2 na representação $\mathcal{L}_2 = (G_2(x^s))^T \mathcal{U}$. Da relação de recorrência a três termos (III.4), vem

$$G_2(x^s) = (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1} [(x^s I_{sd \times sd} - \beta_0^{s,d})(\gamma_1^{s,d})^{-1}(x^s I_{sd \times sd} - \beta_1^{s,d}) - \alpha_0^{s,d}](\gamma_2^{s,d})^{-1}.$$

2. Fórmula de Darboux-Christoffel e núcleo reprodutor

Vamos iniciar a secção, estabelecendo um resultado tipo Darboux-Christoffel para sucessões de polinómios ortogonais múltiplos de tipos I e II.

Teorema III.2. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular, $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a $\mathcal{U}$, e $\{G_m\}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente a $\mathcal{U}$. Então, as sucessões de polinómios $\{G_m\}$ e $\{\mathcal{B}_m\}$ verificam identidades tipo Darboux-Christoffel*

$$(x^s - z^s) \sum_{k=0}^{m} G_k(z^s) \mathcal{B}_k(x) = G_m(z^s) \alpha_m^{s,d} \mathcal{B}_{m+1}(x) - G_{m+1}(z^s) \gamma_{m+1}^{s,d} \mathcal{B}_m(x) \,, \tag{III.9}$$

e ainda,

$$G_{m+1}(x^s) \gamma_{m+1}^{s,d} \mathcal{B}_m(x) = G_m(x^s) \alpha_m^{s,d} \mathcal{B}_{m+1}(x), \tag{III.10}$$

$$\sum_{k=0}^{m} G_k(x^s) \mathcal{B}_k(x) = G'_{m+1}(x^s) \gamma_{m+1}^{s,d} \mathcal{B}_m(x) - G'_m(x^s) \alpha_m^{s,d} \mathcal{B}_{m+1}(x). \tag{III.11}$$

Demonstração. Pelo Teorema III.1 sabemos que os polinómios $\mathcal{B}_m$ e G_m verificam as relações de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dadas por:

$$x^s \mathcal{B}_m(x) = \alpha_m^{s,d} \mathcal{B}_{m+1}(x) + \beta_m^{s,d} \mathcal{B}_m(x) + \gamma_m^{s,d} \mathcal{B}_{m-1}(x), \quad m = 1, 2 \ldots \tag{III.12}$$

$$z^s G_m(z^s) = G_{m+1}(z^s) \gamma_{m+1}^{s,d} + G_m(z^s) \beta_m^{s,d} + G_{m-1}(z^s) \alpha_{m-1}^{s,d} \quad m = 1, 2 \ldots. \tag{III.13}$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros de (III.12) por $G_m(z^s)$ e multiplicando à direita ambos os membros de (III.13) por $\mathcal{B}_m(x)$, vem

$$x^s G_m(z^s) \mathcal{B}_m(x) = G_m(z^s) \alpha_m^{s,d} \mathcal{B}_{m+1}(x) + G_m(z^s) \beta_m^{s,d} \mathcal{B}_m(x) + G_m(z^s) \gamma_m^{s,d} \mathcal{B}_{m-1}(x),$$

$$z^s G_m(z^s)\mathcal{B}_m(x) = G_{m+1}(z^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x) + G_m(z^s)\beta_m^{s,d}\mathcal{B}_m(x) + G_{m-1}(z^s)\alpha_{m-1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x).$$

Subtraindo membro a membro de ambas as igualdades, temos que,

$$\begin{aligned}(x^s - z^s)G_m(z^s)\mathcal{B}_m(x) = &\left[G_m(z^s)\alpha_m^{s,d}\mathcal{B}_{m+1}(x) - G_{m-1}(z^s)\alpha_{m-1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x)\right] \\ &- \left[G_{m+1}(z^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x) - G_m(z^s)\gamma_m^{s,d}\mathcal{B}_{m-1}(x)\right] ,\end{aligned}$$

pelo que, se tem (III.9).

Para obter a fórmula (III.10) façamos $z = x$ na igualdade (III.9). Mostremos a fórmula (III.11). Para isso, comecemos por adicionar e subtrair

$$G_{m+1}(x^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x) - G_{m+1}(x^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x),$$

ao segundo membro da fórmula (III.9). Vem

$$\begin{aligned}(x^s - z^s)\sum_{k=0}^{m} G_k(z^s)\mathcal{B}_k(x) = &\, G_m(z^s)\alpha_m^{s,d}\mathcal{B}_{m+1}(x) - G_{m+1}(z^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x) \\ &+ G_{m+1}(x^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x) - G_{m+1}(x^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x)\,.\end{aligned}$$

Tendo em conta a fórmula (III.10), temos

$$\begin{aligned}(x^s - z^s)\sum_{k=0}^{m} G_k(z^s)\mathcal{B}_k(x) = &\left[G_m(z^s) - G_m(x^s)\right]\alpha_m^{s,d}\mathcal{B}_{m+1}(x) \\ &- \left[G_{m+1}(z^s) - G_{m+1}(x^s)\right]\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x)\,,\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} G_k(z^s)\mathcal{B}_k(x) = &-\frac{G_m(z^s) - G_m(x^s)}{z^s - x^s}\alpha_m^{s,d}\mathcal{B}_{m+1}(x) \\ &+ \frac{G_{m+1}(z^s) - G_{m+1}(x^s)}{z^s - x^s}\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x)\,.\end{aligned}$$

Considerando z a tender para x, vem

$$\sum_{k=0}^{m} G_k(x^s)\mathcal{B}_k(x) = G'_{m+1}(x^s)\gamma_{m+1}^{s,d}\mathcal{B}_m(x) - G'_m(x^s)\alpha_m^{s,d}\mathcal{B}_{m+1}(x),$$

como queríamos mostrar. ■

Definição III.1. Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular, $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a $\mathcal{U}$, e $\{G_m\}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente a $\mathcal{U}$. Denotamos por *polinómios núcleo:*

$$\mathbf{K}_m\left(z^s, x^s\right) = \sum_{k=0}^{m-1} G_k(z^s)V_k(x^{sd}),$$

onde V_m é o polinómio matricial de grau m dado por $\mathcal{B}_m(x) = V_m(x^{sd})\mathcal{P}_0(x)$.

TEOREMA III.3. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular, $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a $\mathcal{U}$, e $\{G_m\}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente a $\mathcal{U}$. Então, dado um polinómio vectorial $\pi \in \mathbb{P}^{sd}$, i.e.,*

$$\pi(x) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j^r\,\mathcal{B}_j(x), \quad \alpha_j^r \in \mathcal{M}_{sd\times sd}, \tag{III.14}$$

temos

$$\pi(x) = ((\mathbf{K}_{r+1}\left(z^s, x^s\right))^T\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{P}_0(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando (III.14), temos

$$\pi(x) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j^r\mathcal{B}_j(x) \text{ com } \alpha_j^r = \mathcal{L}_j(\pi(z)) = ((G_j(z^s))^T\mathcal{U}_z)(\pi(z)).$$

Assim,

$$\pi(x) = \sum_{j=0}^{r}((G_j(z^s))^T\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{B}_j(x).$$

Usando $\mathcal{B}_j(x) = V_j(x^{sd})\mathcal{P}_0(x)$ a igualdade anterior pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \sum_{j=0}^{r}((G_j(z^s))^T\mathcal{U}_z)(\pi(z))V_j(x^{sd})\mathcal{P}_0(x)\\
&= \sum_{j=0}^{r}(V_j(x^{sd}))^T((G_j(z^s))^T\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{P}_0(x)\\
&= ((\sum_{j=0}^{r} G_j(z^s)V_j(x^{sd}))^T\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{P}_0(x),
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

3. Função resolvente

DEFINIÇÃO III.2. O número real a é um *zero* do polinómio matricial, P_n, de grau n e ordem N definido em (II.4), se é um zero do polinómio $\det P_n$.

Considerando $P_n(t) = P_{n,n} + P_{n-1,n}t + P_{n-2,n}t^2 + \cdots + P_{0,n}t^n$ e tendo em conta a definição e as propriedades dos determinantes resulta que

$$\det P_n(t) = \det P_{0,n}t^{nN} + \text{termos de grau inferior}$$

e pelo Teorema Fundamental da Álgebra, concluímos que o polinómio matricial $P_n(t)$ tem exatamente nN zeros, considerando as suas multiplicidades. Ver [**48**].

TEOREMA III.4. *Seja* $\{G_n\}$ *uma sucessão de polinómios matriciais que satisfaz a relação a três termos* (III.4) *do Teorema III.1. Então, os valores próprios de* J_n, $n \in \mathbb{N}$, *de ordem* $(n+1)(sd) \times (n+1)(sd)$ *definido por,*

$$J_n = \begin{bmatrix} \beta_0^{s,d} & \alpha_0^{s,d} & & & \\ \gamma_1^{s,d} & \beta_1^{s,d} & \alpha_1^{s,d} & & \\ & \gamma_2^{s,d} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \alpha_{n-1}^{s,d} \\ & & & \gamma_n^{s,d} & \beta_n^{s,d} \end{bmatrix},$$

que contém os coeficientes matriciais da relação a três termos (III.2) *do Teorema III.1 coincidem com os zeros dos polinómios matriciais* G_{n+1}.

DEMONSTRAÇÃO. Reescrevendo matricialmente a relação a três termos (III.4) do Teorema III.1 obtemos a igualdade:

$$\begin{bmatrix} G_0(x^s) & \cdots & G_m(x^s) \end{bmatrix} J_m + \begin{bmatrix} 0_{sd\times sd} & \cdots & 0_{sd\times sd} & G_{m+1}(x^s)\gamma_{m+1}^{s,d} \end{bmatrix} = x^s \begin{bmatrix} G_0(x^s) & \cdots & G_m(x^s) \end{bmatrix}.$$

Assim os zeros dos polinómios matriciais G_{m+1}, $m \in \mathbb{N}$, ou seja, os zeros do polinómio $\det G_{m+1}$, são os valores próprios do operador J_m. ∎

Definição III.3. Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares. Definimos a *função matricial associada* a $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$, por

$$\mathcal{F}(z) := \mathcal{U}_x(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-x^s}) = \begin{bmatrix} v_x^1(\dfrac{1}{z-x^s}) & \cdots & v_x^{sd}(\dfrac{1}{z-x^s}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_x^1(\dfrac{x^{sd-1}}{z-x^s}) & \cdots & v_x^{sd}(\dfrac{x^{sd-1}}{z-x^s}) \end{bmatrix}. \tag{III.15}$$

Sendo,

$$\frac{1}{z-x^s} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^s}{z}\right)^k \text{ para } |x^s| < |z|,$$

temos que,

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{((x^s)^k\mathcal{U}_x)(\mathcal{P}_0(x))}{z^{k+1}}.$$

Teorema III.5. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares regular, $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios, ortogonal de tipo II relativamente a $\mathcal{U}$, e $\mathcal{R}$ a função resolvente associada ao operador linear definido pela matriz tridiagonal por blocos J dada em* (III.8)*, i.e.,*

$$\mathcal{R}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_0^t J^n e_0}{z^{n+1}},$$

onde $e_0 = \begin{bmatrix} I_{sd\times sd} & 0_{sd\times sd} & \cdots \end{bmatrix}^T$. *Então,*

$$\mathcal{R}(z) = B_0^0\,\mathcal{F}(z)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1}(B_0^0)^{-1},$$

onde B_0^0 é o coeficiente matricial em $\mathcal{B}_0 = B_0^0\,\mathcal{P}_0$.

Demonstração. Com vista a determinar o valor de $e_0^t J^n e_0$, $n \in \mathbb{N}$, consideremos a igualdade matricial,

$$J\begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = x^s\begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

da qual se obtém,

$$J^n \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = (x^s)^n \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{III.16}$$

Seja

$$(x^s)^n \mathcal{B}_m(x) = \sum_{j=m-n}^{m+n} \eta_{j,n}^m \mathcal{B}_j(x), \ \ \eta_{j,n}^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Em particular,

$$(x^s)^n \mathcal{B}_0(x) = \sum_{j=0}^{n} \eta_{j,n}^0 \mathcal{B}_j(x).$$

Por (III.16) $e_0^t J^n e_0$, $n \in \mathbb{N}$, é dado por $\eta_{0,n}^0$. Aplicando o vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$ a ambos os membros da igualdade anterior, vem

$$\eta_{0,n}^0 = ((x^s)^n \mathcal{U})(\mathcal{B}_0)(\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1}.$$

Usando $\mathcal{B}_0 = B_0^0 \mathcal{P}_0$, vem

$$\eta_{0,n}^0 = B_0^0((x^s)^n \mathcal{U})(\mathcal{P}_0)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1}(B_0^0)^{-1}.$$

Assim,

$$\mathcal{R}(z) = B_0^0 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x^s)^n \mathcal{U})(\mathcal{P}_0)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1}}{z^{n+1}} \right\} (B_0^0)^{-1},$$

ou ainda,

$$\mathcal{R}(z) = B_0^0 \mathcal{F}(z)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1}(B_0^0)^{-1},$$

como queríamos mostrar. ∎

4. Problemas de Hermite-Padé

Nesta secção propomo-nos a apresentar, uma reinterpretação dos problemas de aproximação de Hermite-Padé apresentados no Capítulo I, em termos de funções matriciais.

4.1. Problema de tipo I.

DEFINIÇÃO III.4. Seja $\{G_n\}$ uma sucessão livre de polinómios matriciais com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ e $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular. À sucessão de polinómios $\{G^{(1)}_{n-1}\}$ dada por

$$G^{(1)}_{n-1}(z) := (\frac{(G_n(z))^T - (G_n(x^s))^T}{z - x^s}\mathcal{U}_x)(\mathcal{P}_0(x)),$$

onde $\mathcal{U}_x$ representa a acção de $\mathcal{U}$ sobre a variável x, designamos *sucessão de polinómios associados* a $\{G_n\}$ e a $\mathcal{U}$.

TEOREMA III.6. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares regular, $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a $\mathcal{U}$, $\{G_n\}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente a $\mathcal{U}$. Então, a sucessão de polinómios associados a $\{G_n\}$, $\{G^{(1)}_{n-1}\}$, é definida pela relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dada por*

$$zG^{(1)}_{n-1}(z) = G^{(1)}_{n}(z)\gamma^{s,d}_{n+1} + G^{(1)}_{n-1}(z)\beta^{s,d}_{n} + G^{(1)}_{n-2}(z)\alpha^{s,d}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

com $G^{(1)}_{-1}(z) = 0_{sd\times sd}$ e $G^{(1)}_{0}(z)$ dado, onde $\gamma^{s,d}_{n+1}$, $\beta^{s,d}_{n}$ e $\alpha^{s,d}_{n-1}$ são os coeficientes da relação de recorrência a três termos que $\{G_n\}$ verifica.

DEMONSTRAÇÃO. Da hipótese do teorema, existem sucessões de matrizes em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, $(\alpha^{s,d}_{n-1}), (\beta^{s,d}_{n})$ e $(\gamma^{s,d}_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, com $\gamma^{s,d}_{n+1}$ matriz triangular superior e regular, tais que, os polinómios matriciais G_n são definidos pela relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dada por

$$x^s G_n(x^s) = G_{n+1}(x^s)\gamma^{s,d}_{n+1} + G_n(x^s)\beta^{s,d}_{n} + G_{n-1}\alpha^{s,d}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \text{(III.17)}$$

com

$$G_0(x^s) = (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1}$$
$$G_1(x^s) = (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1}(x^s I_{sd\times sd} - \beta^{s,d}_0)(\gamma^{s,d}_1)^{-1}.$$

Assim, de (III.17) vem

$$x^s(G_n(x^s))^T = (\gamma^{s,d}_{n+1})^T(G_{n+1}(x^s))^T + (\beta^{s,d}_{n})^T(G_n(x^s))^T + (\alpha^{s,d}_{n-1})^T(G_{n-1}(x^s))^T .$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $\mathcal{U}$, vem

$$x^s(G_n(x^s))^T\mathcal{U} = (\gamma^{s,d}_{n+1})^T(G_{n+1}(x^s))^T\mathcal{U}$$
$$+ (\beta^{s,d}_{n})^T(G_n(x^s))^T\mathcal{U} + (\alpha^{s,d}_{n-1})^T(G_{n-1}(x^s))^T\mathcal{U}. \qquad \text{(III.18)}$$

Substituindo x por z em (III.18) e subtraindo de (III.18), vem

$$\begin{aligned} z^s(G_n(z^s))^T\mathcal{U}-x^s(G_n(x^s))^T\mathcal{U} = (\gamma_{n+1}^{s,d})^T((G_{n+1}(z^s))^T - (G_{n+1}(x^s))^T)\mathcal{U} \\ + (\beta_n^{s,d})^T((G_n(z^s))^T - (G_n(x^s))^T)\mathcal{U} \\ + (\alpha_{n-1}^{s,d})^T((G_{n-1}(z^s))^T - (G_{n-1}(x^s))^T)\mathcal{U}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} (z^s - x^s)\frac{(G_n(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U} + z^s\frac{(G_n(z^s))^T-(G_n(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U} \\ = (\gamma_{n+1}^{s,d})^T\frac{(G_{n+1}(z^s))^T - (G_{n+1}(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U} \\ + (\beta_n^{s,d})^T\frac{(G_n(z^s))^T - (G_n(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U} \\ + (\alpha_{n-1}^{s,d})^T\frac{(G_{n-1}(z^s))^T - (G_{n-1}(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U}. \end{aligned}$$

Fazendo actuar ambos os membros sobre o polinómio vectorial $\mathcal{P}_0$, vem

$$\begin{aligned} ((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) + z^s\left(\frac{(G_n(z^s))^T-(G_n(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0) \\ = \left(\frac{(G_n(z^s))^T - (G_n(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0)\gamma_{n+1}^{s,d} \\ + \left(\frac{(G_n(z^s))^T - (G_n(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0)\beta_n^{s,d} \\ + \left(\frac{(G_{n-1}(z^s))^T - (G_{n-1}(x^s))^T}{z^s - x^s}\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0)\alpha_{n-1}^{s,d}. \end{aligned}$$

Sendo $\{\mathcal{L}_n\}$ a sucessão dual de $\{\mathcal{B}_m\}$, i.e., $\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, vem

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_0) = 0_{sd\times sd}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Tendo em conta que,

$$\mathcal{B}_0 = B_0^0\,\mathcal{P}_0,\ \ B_0^0 \in \mathcal{M}_{sd\times sd}\ \text{ e }\ \mathcal{L}_n = (G_n(x^s))^T\mathcal{U},$$

temos,

$$0_{sd\times sd} = \mathcal{L}_n(\mathcal{B}_0) = B_0^0(G_n^T(x)\mathcal{U})(\mathcal{P}_0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

i.e.,

$$((G_n(x))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) = 0_{sd\times sd}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Assim,

$$z^s(\frac{(G_n(z^s))^T-(G_n(x^s))^T}{z^s-x^s}\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) = \left(\frac{(G_n(z^s))^T-(G_n(x^s))^T}{z^s-x^s}\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0)\gamma_{n+1}^{s,d}$$
$$+\left(\frac{(G_n(z^s))^T-(G_n(x^s))^T}{z^s-x^s}\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0)\beta_n^{s,d}$$
$$+\left(\frac{(G_{n-1}(z^s))^T-(G_{n-1}(x^s))^T}{z^s-x^s}\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0)\alpha_{n-1}^{s,d},\ n=1,2,\ldots.$$

Finalmente, substituindo z^s por z, vem

$$zG_{n-1}^{(1)}(z) = (\gamma_{n+1}^{s,d})^T G_n^{(1)}(z) + (\beta_n^{s,d})^T G_{n-1}^{(1)}(z) + (\alpha_{n-1}^{s,d})^T G_{n-2}^{(1)}(z), \quad n=1,2,\ldots$$

com $G_{-1}^{(1)}(z) = 0_{sd\times sd}$ e $G_0^{(1)}(z)$ dado. ■

LEMA III.1. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares regular e $\{G_n\}$ uma sucessão livre de polinómios matriciais com coeficientes matriciais de ordem $sd\times sd$. Se $\{G_n\}$ é ortogonal de tipo I relativamente a $\mathcal{U}$, então para $m=0,1,\ldots,n-2$ e $l=0,1,\ldots,d-1$, vem*

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})((x^s)^l\mathcal{P}_m) = 0_{sd\times sd}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Os vectores de polinómios

$$(x^s)^l\mathcal{P}_m, \quad m=0,1,\ldots \ \text{ e } \ l=0,1,\ldots,d-1,$$

podem ser escritos por

$$(x^s)^l\mathcal{P}_m = \vartheta_1^m\mathcal{P}_m + \vartheta_2^m\mathcal{P}_{m+1}, \quad \vartheta_i^m \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Aplicando $(G_n(x^s))^t\mathcal{U}$ a ambos os membros da igualdade anterior, vem

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})((x^s)^l\mathcal{P}_m) = \vartheta_1^m((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_m) + \vartheta_2^m((G_n(x^s))^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m+1}).$$

Sendo $\mathcal{U}$ ortogonal de tipo I relativamente a $\{G_n\}$, vem

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U})((x^s)^l\mathcal{P}_m) = 0_{sd\times sd}, \quad m=0,1,\ldots,n-2,$$

como queríamos mostrar. ■

TEOREMA III.7. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular, $\{G_n\}$ uma sucessão livre de polinómios matriciais com coeficientes matriciais de ordem $sd\times sd$, $\{G_{n-1}^{(1)}\}$ a sucessão de polinómios associados, e $\mathcal{F}$ a função matricial definida* *em* (III.15). *Então,* $\{G_n\}$ *é ortogonal de tipo I relativamente ao vector de funcionais lineares* $\mathcal{U}$ *se, e somente se,*

$$\mathcal{F}(z)G_n(z) - G^{(1)}_{n-1}(z) = \sum_{m=n-1}^{\infty}\sum_{l=0}^{d-1}\frac{((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)((x^s)^l\mathcal{P}_m(x))}{z^{dm+l+1}}.$$

Demonstração. Tendo em conta a Definição III.4, vem

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{n-1}(z) &= (\frac{(G_n(z))^T - (G_n(x^s))^T}{z-x^s}\mathcal{U}_x)(\mathcal{P}_0(x)) \\ &= ((G_n(z))^T\mathcal{U}_x)\frac{(\mathcal{P}_0(x))}{z-x^s} - ((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)\frac{(\mathcal{P}_0(x))}{z-x^s} \\ &= \mathcal{F}(z)G_n(z) - ((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)\frac{(\mathcal{P}_0(x))}{z-x^s}. \end{aligned}$$

Sendo,

$$\frac{1}{z-x^s} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^s}{z}\right)^k, \quad |x^s| < |z|,$$

vem

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{n-1}(z) &= \mathcal{F}(z)G_n(z) - ((G_n(x^s))^t\mathcal{U}_x)(\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x^s}{z})^k\mathcal{P}_0(x)) \\ &= \mathcal{F}(z)G_n(z) - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)((x^s)^k\mathcal{P}_0(x))}{z^{k+1}} \\ &= \mathcal{F}(z)G_n(z) - \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{d-1}\frac{((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)((x^s)^l\mathcal{P}_m(x))}{z^{dm+l+1}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{F}(z)G_n(z) - G^{(1)}_{n-1}(z) = \sum_{m=n-1}^{\infty}\sum_{l=0}^{d-1}\frac{((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)((x^s)^l\mathcal{P}_m(x))}{z^{dm+l+1}},$$

se, e somente se, $\mathcal{U}$ é ortogonal de tipo I relativamente a $\{G_n\}$. ■

4.2. Problema de tipo II.

Definição III.5. Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios e $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares e regular. À sucessão de polinómios $\{\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}\}$ dada por

$$\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) := \mathcal{U}_x(\frac{V_m(z^d) - V_m(x^{sd})}{z-x^s}\,\mathcal{P}_0(x)),$$

onde $\mathcal{U}_x$ representa a acção de $\mathcal{U}$ sobre a variável x, designamos *sucessão de polinómios associados* a $\{\mathcal{B}_m\}$ e a $\mathcal{U}$.

TEOREMA III.8. *Seja* $\mathcal{U}$ *um vector de funcionais lineares e regular,* $\{\mathcal{B}_m\}$ *uma sucessão vectorial de polinómios,* $\{\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}\}$ *a sucessão de polinómios associados e* $\mathcal{F}$ *a função matricial definida em* (III.15). *Então,* $\{\mathcal{B}_m\}$ *é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares* $\mathcal{U}$ *se, e somente se,*

$$V_m(z^d)\mathcal{F}(z) - \mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{((x^s)^k \mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_m(x))}{z^{k+1}}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em conta a Definição III.5, vem

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) &= \mathcal{U}_x(\frac{V_m(z^d) - V_m(x^{sd})}{z - x^s}\,\mathcal{P}_0(x)) \\ &= V_m(z^d)\mathcal{F}(z) - \mathcal{U}_x(\frac{V_m(x^{sd})}{z - x^s}\,\mathcal{P}_0(x)),\end{aligned}$$

i.e.,

$$V_m(z^d)\mathcal{F}(z) - \mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) = \mathcal{U}_x(\frac{V_m(x^{sd})}{z - x^s}\,\mathcal{P}_0(x)).$$

Sendo,

$$\frac{1}{z - x^s} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^s}{z}\right)^k, \quad |x^s| < |z|,$$

vem,

$$V_m(z^d)\mathcal{F}(z) - \mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((x^s)^k \mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_m(x))}{z^{k+1}}.$$

Assim,

$$V_m(z^d)\mathcal{F}(z) - \mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{((x^s)^k \mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_m(x))}{z^{k+1}},$$

se, e somente se, a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ é ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. ∎

4.3. Medida complexa de ortogonalidade.

TEOREMA III.9. *Seja* $\mathcal{U}$ *um vector de funcionais lineares e regular,* $\{\mathcal{B}_m\}$ *uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II relativamente a* $\mathcal{U}$, $\{G_n\}$ *uma sucessão de polinómios matriciais ortogonal de tipo I relativamente a* $\mathcal{U}$, *e ainda a sucessão de vectores de funcionais lineares* $\{\mathcal{L}_n\}$ *dual de* $\{\mathcal{B}_m\}$. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) As sucessões $\{V_m\}$ *e* $\{G_n\}$ *são ortogonais relativamente à função matricial* $\mathcal{F}$ *definida em* (III.15), *i.e.,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z^d)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

b) As sucessões $\{\mathcal{B}_m\}$ e $\{G_n\}$, são tais que:

$$((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n,m\in\mathbb{N}.$$

Demonstração. Mostremos a implicação $a) \Rightarrow b)$. Tendo em conta que,

$$\begin{aligned}
V_m(z^d)\mathcal{F}(z)G_n(z) &= V_m(z^d)\mathcal{U}_x(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-x^s})G_n(z)\\
&= (\frac{V_m(z^d)\mathcal{P}_0(x)}{z-x^s})\mathcal{U}_x^T G_n(z)\\
&= (((G_n(z))^T\mathcal{U}_x)(\frac{V_m(z^d)\mathcal{P}_0(x)}{z-x^s})^T)^T\\
&= ((G_n(z))^T\mathcal{U}_x)(\frac{V_m(z^d)\mathcal{P}_0(x)}{z-x^s}),
\end{aligned}$$

vem,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z^d)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C((G_n(z))^T\mathcal{U}_x)(\frac{V_m(z^d)\mathcal{P}_0(x)}{z-x^s})dz.$$

Sendo G_n, V_n e $\mathcal{P}_0$ funções analíticas, temos pela fórmula do integral de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C((G_n(z))^T\mathcal{U}_x)(\frac{V_m(z^d)\mathcal{P}_0(x)}{z-x^s})dz = ((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)(V_m(x^{sd})\mathcal{P}_0(x)).$$

Usando a nossa hipótese, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z^d)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz &= ((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)(V_m(x^{sd})\mathcal{P}_0(x))\\
&= I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n,m\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Mostremos a implicação $b) \Rightarrow c)$. Tendo em conta que,

$$\mathcal{L}_n = (G_n(x^s))^T\mathcal{U} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_m(x) = V_m(x^{sd})\mathcal{P}_0(x),$$

vem,

$$\begin{aligned}
((G_n(x^s))^T\mathcal{U}_x)(V_m(x^{sd})\mathcal{P}_0(x)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z^d)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz\\
&= \mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m).
\end{aligned}$$

Sendo, $\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n,m\in\mathbb{N}$, vem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z^d)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n,m\in\mathbb{N},$$

como queríamos mostrar. ■

CAPÍTULO IV

Polinómios ortogonais múltiplos clássicos segundo Hahn

Como sabemos os polinómios ortogonais clássicos são habitualmente enumerados como os polinómios de Hermite, de Laguerre, de Jacobi e de Bessel. Segundo W. Hahn uma *sucessão de polinómios ortogonais diz-se clássica* se a sucessão dos polinómios derivados for ortogonal. Neste capítulo vamos começar por apresentar a noção de uma sucessão vectorial de polinómios ortogonal de tipo II clássica segundo Hahn. Posteriormente damos relações entre bases duais associadas a sucessões vectoriais de polinómios que vão ser úteis nos resultados a estabelecer neste capítulo. A partir deste momento estamos em condições de estabelecer um resultado de caracterização de uma sucessão de polinómios mónicos ortogonais múltiplos de tipo II para multi-índices quase-diagonais clássicos segundo Hahn, usando a equação funcional vectorial tipo Pearson. Este resultado permite obter outras caracterizações de uma sucessão de polinómios mónicos ortogonais múltiplos de tipo II para multi--índices quase-diagonais clássicos segundo Hahn, e ainda resultados relacionados com a caracterização de polinómios ortogonais múltiplos de tipo I para multi-índices quase-diagonais. Deste modo, obtemos resultados que contêm resultados de caracterizações de uma sucessão de polinómios mónicos ortogonais múltiplos de tipo II para multi-índices diagonais clássicos segundo Hahn, que podem ser consultados por exemplo nos trabalhos dos autores, J. Van Iseghem [**54**], P. Maroni [**43, 44**] e no trabalho dos autores K. Douak e P. Maroni [**22**]. Alguns dos resultados que obtemos generalizam ainda resultados obtidos pelos autores A.I. Aptekarev, A. Branquinho e W. Van Assche em [**4**].

Os resultados aqui descritos encontram-se em fase de preparação para submissão (cf. [**15**]).

1. Conceitos fundamentais

Definição IV.1. Sejam $v^j : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ funcionais lineares onde $j = 1, \ldots, sd$ e $\{B_m\}$ uma sucessão de polinómios mónicos. A sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$

onde $\mathcal{B}_m = [\ B_{sdm} \ \ \ldots \ \ B_{sd(m+1)-1}\ ]^T$, $m \in \mathbb{N}$, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U} = [\ v^1 \ \ \cdots \ \ v^{sd}\ ]^T$, é dita *clássica segundo Hahn*, se a sucessão vectorial de polinómios $\{\tilde{\mathcal{B}}_m\}$ onde

$$\tilde{\mathcal{B}}_m = \begin{bmatrix} \dfrac{B'_{sdm+1}}{sdm+1} & \cdots & \dfrac{B'_{sd(m+1)}}{sd(m+1)} \end{bmatrix}^T, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{IV.1}$$

é ortogonal de tipo II relativamente a um vector de funcionais lineares que designamos por $\widetilde{\mathcal{U}}$.

1.1. Sucessões duais. Seja $\{B_m\}$ uma sucessão de polinómios mónicos e $\{L_n\}$ a sua sucessão dual, i.e., $L_n(B_m) = \delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Como observámos no Capítulo II, sendo $\{\mathcal{B}_m\}$ a sucessão vectorial de polinómios associada, onde $\mathcal{B}_m = [B_{sdm} \cdots B_{sd(m+1)-1}]^T$, $m \in \mathbb{N}$, e $\{\mathcal{L}_n\}$ a sucessão de vectores de funcionais lineares onde

$$\mathcal{L}_n = [\ L_{sdn} \ \ \cdots \ \ L_{sd(n+1)-1}\ ]^T,$$

$n \in \mathbb{N}$, vem

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

i.e., $\{\mathcal{L}_n\}$ é a sucessão dual de $\{\mathcal{B}_m\}$.

Denotemos a sucessão de vectores de funcionais lineares $\{\mathcal{L}'_n\}$ como sendo a sucessão dual de $\{\mathcal{B}'_m\}$, i.e.,

$$\mathcal{L}'_n(\mathcal{B}'_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Seja $\{B'_{m+1}/(m+1)\}$ uma sucessão de polinómios mónicos e $\{L'_n\}$ a sua sucessão dual, i.e, $L'_n(B'_{m+1}/(m+1)) = \delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Sendo $\{\tilde{\mathcal{L}}_n\}$ uma sucessão de vectores de funcionais lineares onde $\tilde{\mathcal{L}}_n = [L'_{sdn} \cdots L'_{sd(n+1)-1}]^T$, $n \in \mathbb{N}$, vem

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\tilde{\mathcal{B}}_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

i.e., $\{\tilde{\mathcal{L}}_n\}$ é a sucessão dual de $\{\tilde{\mathcal{B}}_m\}$.

Considerando a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}^1_m\}$ onde

$$\mathcal{B}^1_m = [\ B_{sdm+1} \ \ \cdots \ \ B_{sd(m+1)}\ ]^T, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{IV.2}$$

e a sucessão de vectores de funcionais lineares $\{\mathcal{L}^1_n\}$ onde

$$\mathcal{L}^1_n = [\ L_{sdn+1} \ \ \cdots \ \ L_{sd(n+1)}\ ]^T, n \in \mathbb{N},$$

vem

$$\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_m^1) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

i.e., $\{\mathcal{L}_n^1\}$ é a sucessão dual de $\{\mathcal{B}_m^1\}$.

As sucessões de polinómios vectoriais $\{\mathcal{B}_m'\}$ e $\{\tilde{\mathcal{B}}_m\}$ estão relacionadas pelas seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_m &= \tilde{A}_m^0\,\mathcal{B}_{m+1}' + \tilde{A}_m^1\,\mathcal{B}_m' \\ \mathcal{B}_m' &= A_m^1\,\tilde{\mathcal{B}}_m + A_m^0\,\tilde{\mathcal{B}}_{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{IV.3}$$

onde para todo $m \in \mathbb{N}$ as matrizes pertencentes a $\mathcal{M}_{sd\times sd}$ acima representadas são dadas por:

$$\tilde{A}_m^0 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ \frac{1}{sd(m+1)} & & \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_m^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{sdm+1} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{sd(m+1)-1} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_m^1 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ sdm+1 & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & sd(m+1)-1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_m^0 = \begin{bmatrix} & sdm \\ & \\ & \end{bmatrix}.$$

Verificamos ainda que,

$$\tilde{\mathcal{B}}_m = d_m(\mathcal{B}_m^1)', \quad m \in \mathbb{N},$$

onde d_m é a matriz escalar dada por:

$$d_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{sdm+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{sd(m+1)} \end{bmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{IV.4}$$

1.2. Relações entre sucessões duais. Vamos apresentar algumas relações entre as sucessões duais atrás apresentadas:

• $\mathbf{D}\,\mathcal{L}_n' = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^n \mathcal{L}_j$ onde $(\alpha_j^n)^T = \mathbf{D}\,\mathcal{L}_n'(\mathcal{B}_j) = -\mathcal{L}_n'(\mathcal{B}_j') = -\delta_{n,j} I_{sd\times sd}$,

i.e.,

$$\mathbf{D}\,\mathcal{L}_n' = -\mathcal{L}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{IV.5}$$

• $\tilde{\mathcal{L}}_n = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^n \, \mathcal{L}'_j$ onde $(\alpha_j^n)^T = \tilde{\mathcal{L}}_n(\mathcal{B}'_j) = \tilde{\mathcal{L}}_n(A_j^1 \, \tilde{\mathcal{B}}_j + A_j^0 \, \tilde{\mathcal{B}}_{j-1})$,

i.e.,

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = (A_{n+1}^0)^T \, \mathcal{L}'_{n+1} + (A_n^1)^T \, \mathcal{L}'_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{IV.6}$$

• $\mathcal{L}'_n = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^n \, \tilde{\mathcal{L}}_j$ onde $(\alpha_j^n)^T = \mathcal{L}'_n(\tilde{\mathcal{B}}_j) = \mathcal{L}'_n(\tilde{A}_j^0 \, \mathcal{B}'_{j+1} + \tilde{A}_j^1 \, \mathcal{B}'_j)$,

i.e.,

$$\mathcal{L}'_n = (\tilde{A}_n^1)^T \, \tilde{\mathcal{L}}_n + (\tilde{A}_{n-1}^0)^T \, \tilde{\mathcal{L}}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

• Tendo em conta (IV.6), temos

$$\mathbf{D} \, \tilde{\mathcal{L}}_n = (A_{n+1}^0)^T \mathbf{D} \, \mathcal{L}'_{n+1} + (A_n^1)^T \mathbf{D} \, \mathcal{L}'_n,$$

ou ainda por (IV.5),

$$\mathbf{D} \, \tilde{\mathcal{L}}_n = -\left[(A_{n+1}^0)^T \, \mathcal{L}_{n+1} + (A_n^1)^T \, \mathcal{L}_n \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

• $\mathbf{D} \, \tilde{\mathcal{L}}_n = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^n \, \mathcal{L}_j^1$ onde $(\alpha_j^n)^T = \mathbf{D} \, \tilde{\mathcal{L}}_n(\mathcal{B}_j^1) = -\tilde{\mathcal{L}}_n((\mathcal{B}_j^1)')$.

• Tendo em conta que,

$$\tilde{\mathcal{L}}_n((\mathcal{B}_j^1)') = \tilde{\mathcal{L}}_n(d_j^{-1} \, \tilde{\mathcal{B}}_j) = d_n^{-1},$$

temos,

$$\mathbf{D} \, \tilde{\mathcal{L}}_n = -d_n^{-1} \, \mathcal{L}_n^1. \tag{IV.7}$$

• Usando,

$$\mathcal{L}_n^1 = [\ L_{sdn+1} \quad \cdots \quad L_{sd(n+1)}\ ]^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

vem,

$$\mathcal{L}_n^1 = A \, \mathcal{L}_n + B \, \mathcal{L}_{n+1}, \tag{IV.8}$$

onde,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3. Relação de recorrência. Vamos estabelecer um resultado que mostra que a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m^1\}$, ortogonal relativamente a um vector de funcionais lineares $\mathcal{U}^1$, verifica uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$, e portanto $\{\mathcal{L}_n^1\}$ verifica a relação de recorrência dual desta.

TEOREMA IV.1. *Seja $\{B_m\}$ uma sucessão de polinómios mónicos que verifica a relação de recorrência a $(s(d+1)+1)$-termos*

$$x^s B_n(x) = B_{n+s}(x) + \sum_{k=0}^{s(d+1)-1} a_{n+s-1-k}^{n+s-1} B_{n+s-1-k}(x), \quad n = sd, sd+1, \ldots .$$

onde $a_{n-sd}^{n+s-1} \neq 0$ e $B_0,\ B_1, \ldots, B_{sd-1}$ são dados. Então a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m^1\}$ dada em (IV.2) é definida pela relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$ dada por

$$x^s\, \mathcal{B}_m^1(x) = \alpha_{m,1}^{s,d}\, \mathcal{B}_{m+1}^1(x) + \beta_{m,1}^{s,d}\, \mathcal{B}_m^1(x) + \gamma_{m,1}^{s,d}\, \mathcal{B}_{m-1}^1(x) \tag{IV.9}$$

com $\mathcal{B}_{-1}^1(x) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. E, portanto, é ortogonal relativamente a uma funcional $\mathcal{U}^1$.

DEMONSTRAÇÃO. Substituindo n por $n+1$ na primeira igualdade matricial da demonstração do Teorema I.11, vem

$$x^s \begin{bmatrix} B_{n+1} \\ \vdots \\ B_{n+sd} \end{bmatrix} = \underline{\alpha}_{n+1}^{s,d} \begin{bmatrix} B_{n+1+sd} \\ \vdots \\ B_{n+2sd} \end{bmatrix} + \underline{\beta}_{n+1}^{s,d} \begin{bmatrix} B_{n+1} \\ \vdots \\ B_{n+sd} \end{bmatrix} + \underline{\gamma}_{n+1}^{s,d} \begin{bmatrix} B_{n+1-sd} \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}.$$

Fazendo $n = sdm$ obtemos a relação de recorrência a três termos para os vectores de polinómios $\{\mathcal{B}_m^1\}$, onde

$$\alpha_{m,1}^{s,d} = \underline{\alpha}_{sdm+1}^{s,d},\ \beta_{m,1}^{s,d} = \underline{\beta}_{sdm+1}^{s,d} \text{ e } \gamma_{m,1}^{s,d} = \underline{\gamma}_{sdm+1}^{s,d},$$

são os coeficientes matriciais de ordem $sd \times sd$. ■

2. Teorema de equivalência para a ortogonalidade de tipo II

TEOREMA IV.2. *Seja $\mathcal{U}$ um vector de funcionais lineares regular, $\{B_m\}$ uma sucessão de polinómios mónicos e a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ onde $\mathcal{B}_m = \begin{bmatrix} B_{sdm} & \cdots & B_{sd(m+1)-1} \end{bmatrix}^T$, $m \in \mathbb{N}$, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$ *é clássica segundo Hahn.*

b) Existem sucessões de matrizes em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, r^0_{m+1}, r^1_m *e* r^2_{m-1}, $m\in\mathbb{N}$, *tais que* $\{\mathcal{B}^1_m\}$ *é definida pela relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem* $sd\times sd$ *dada por*

$$sx^{s-1}d_m\,\mathcal{B}^1_m(x)=r^0_{m+1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{m+1}(x)+r^1_m\,\tilde{\mathcal{B}}_m(x)+r^2_{m-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{m-1}(x),\ m=1,2,\ldots \tag{IV.10}$$

com $\tilde{\mathcal{B}}_{-1}(x)=0_{sd\times 1}$, r^0_m, r^1_m, r^2_m *têm as estruturas de* $\alpha^{s,d}_m$, $\beta^{s,d}_m$, $\gamma^{s,d}_m$, *respectivamente e* d_m *é a matriz dada em* (IV.4).

c) A sucessão vectorial de polinómios $\{\tilde{\mathcal{B}}_m\}$, *é ortogonal de tipo II relativamente a um vector de funcionais lineares* $\widetilde{\mathcal{U}}$, *tal que*

$$sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}}=\Phi(x)\,\mathcal{U}, \tag{IV.11}$$

com, $\Phi(x)=\phi_0(x^s)^2+\phi_1x^s+\phi_2$, *onde as matrizes* ϕ_0 *e* ϕ_1 *são matrizes em* $\mathcal{M}_{sd\times sd}$ *e têm as estruturas das matrizes* $\alpha^{1,d}_m$ *e* $\beta^{1,d}_m$, *respectivamente.*

d) Existem polinómios matriciais Φ_1 *e* Ψ_1, *verificando a equação funcional vectorial tipo Pearson:*

$$\mathbf{D}\left(\Phi_1(x)\,\mathcal{U}\right)=\Psi_1(x)\mathcal{U}, \tag{IV.12}$$

com, $\Phi_1(x)=s^{-1}x\,\Phi(x)$ *e* $\Psi_1(x)=x^s\Psi(x)+\Phi(x)$, *onde,* $\Psi(x)=\psi_0x^s+\psi_1$, *onde as matrizes* ψ_0 *e* ψ_1 *são matrizes em* $\mathcal{M}_{sd\times sd}$ *e têm as estruturas das matrizes* $\alpha^{1,d}_m$ *e* $\beta^{1,d}_m$, *respectivamente.*

Esquema da demonstração: *a)* $\Leftrightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* $\Rightarrow$ *d)* $\Rightarrow$ *a)*

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos por demonstrar que *a)* $\Leftrightarrow$ *b)*. Pelo Teorema IV.1 sabemos que a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}^1_m\}$ verifica uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de ordem $sd\times sd$ do tipo (IV.9). Derivando ambos os membros de (IV.9), obtemos:

$$sx^{s-1}\,\mathcal{B}^1_m=\alpha^{s,d}_{m,1}\,(\mathcal{B}^1_{m+1})'+\beta^{s,d}_{m,1}\,(\mathcal{B}^1_m)'+\gamma^{s,d}_{m,1}\,(\mathcal{B}^1_{m-1})'-x^s(\mathcal{B}^1_m)',\ m\in\mathbb{N}.$$

Temos assim,

$$\begin{aligned}sx^{s-1}\,\mathcal{B}^1_m=&\,\alpha^{s,d}_{m,1}d^{-1}_{m+1}d_{m+1}(\mathcal{B}^1_{m+1})'+\beta^{s,d}_{m,1}d^{-1}_m d_m(\mathcal{B}^1_m)'\\&+\gamma^{s,d}_{m,1}d^{-1}_{m-1}d_{m-1}(\mathcal{B}^1_{m-1})'-x^s(\mathcal{B}^1_m)',\quad m\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

i.e.,

$$sx^{s-1}\,\mathcal{B}_m^1 = \alpha_{m,1}^{s,d} d_{m+1}^{-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{m+1} + \beta_{m,1}^{s,d} d_m^{-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_m + \gamma_{m,1}^{s,d} d_{m-1}^{-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{m-1} - x^s (\mathcal{B}_m^1)',\ m \in \mathbb{N}.$$

Multiplicando ambos os membros por d_m vem, para todo o $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &sx^{s-1} d_m\,\mathcal{B}_m^1 \\ &\quad = d_m \alpha_{m,1}^{s,d} d_{m+1}^{-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{m+1} + d_m \beta_{m,1}^{s,d} d_m^{-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_m + d_m \gamma_{m,1}^{s,d} d_{m-1}^{-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{m-1} - x^s\,\tilde{\mathcal{B}}_m\,. \end{aligned} \tag{IV.13}$$

Consideramos a representação

$$sx^{s-1} d_m\,\mathcal{B}_m^1 = \sum_{k=0}^{m+1} r_k^{m+1-k}\,\tilde{\mathcal{B}}_k, \quad r_k^{m+1-k} \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Substituindo em (IV.13), vem

$$\begin{aligned} x^s\,\tilde{\mathcal{B}}_m = {} & (d_m \alpha_{m,1}^{s,d} d_{m+1}^{-1} - r_{m+1}^0)\,\tilde{\mathcal{B}}_{m+1} + (d_m \beta_{m,1}^{s,d} d_m^{-1} - r_m^1)\,\tilde{\mathcal{B}}_m \\ & + (d_m \gamma_{m,1}^{s,d} d_{m-1}^{-1} - r_{m-1}^2)\,\tilde{\mathcal{B}}_{m-1} - \sum_{k=0}^{m-2} r_k^{m+1-k}\,\tilde{\mathcal{B}}_k\,. \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Assim $\{\tilde{\mathcal{B}}_m\}$ é ortogonal de tipo II se, e somente se, $r_k^{m+1-k} = 0_{sd\times sd}$, $k = 0, \ldots, m-2$ e $d_m \gamma_{m,1}^{s,d} d_{m-1}^{-1} - r_{m-1}^2$ é triangular superior e regular, como queríamos mostrar.

Usando (IV.14) temos que $d_m \alpha_{m,1}^{s,d} d_{m+1}^{-1} - r_{m+1}^0$, $d_m \beta_{m,1}^{s,d} d_m^{-1} - r_m^1$ e $d_m \gamma_{m,1}^{s,d} d_{m-1}^{-1} - r_{m-1}^2$ têm as estruturas de $\alpha_m^{s,d}$, $\beta_m^{s,d}$ e $\gamma_m^{s,d}$, respectivamente. Assim, r_m^0, r_m^1 e r_m^2 têm também as estruturas de $\alpha_m^{s,d}$, $\beta_m^{s,d}$ e $\gamma_m^{s,d}$, respectivamente. Esta informação vai ser útil ao longo da demonstração deste teorema.

Para demonstrar a implicação $b) \Rightarrow c)$, comecemos por multiplicar ambos os membros de (IV.10) por d_m^{-1}, i.e.,

$$sx^{s-1}\,\mathcal{B}_m^1 = d_m^{-1} r_{m+1}^0\,\tilde{\mathcal{B}}_{m+1} + d_m^{-1} r_m^1\,\tilde{\mathcal{B}}_m + d_m^{-1} r_m^2\,\tilde{\mathcal{B}}_{m-1}. \tag{IV.15}$$

Vamos escrever o vector de funcionais lineares vectoriais $sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}}$ em termos dos elementos da sucessão dual $\{\mathcal{L}_j^1\}$ de $\{\mathcal{B}_m^1\}$, i.e.,

$$sx^{s-1}\,\widetilde{\mathcal{U}} = \sum_{j=0}^{\infty} l_j\,\mathcal{L}_j^1 \ \text{ onde } \ (l_j)^T = \widetilde{\mathcal{U}}(sx^{s-1}\,\mathcal{B}_j^1), \ \ j \in \mathbb{N}. \tag{IV.16}$$

Tendo em conta (IV.15), e que a sucessão vectorial de polinómios $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}$, é ortogonal de tipo II relativamente $\widetilde{\mathcal{U}}$, temos que,

$$\begin{aligned} (l_m)^T &= \widetilde{\mathcal{U}}(sx^{s-1}\,\mathcal{B}_m^1) \\ &= d_m^{-1} r_{m+1}^0 \widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_{m+1}) + d_m^{-1} r_m^1 \widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_m) + d_m^{-1} r_m^2 \widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_{m-1}) \\ &= 0_{sd\times sd}, \;\; m = 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Assim, a representação (IV.16), toma a forma,

$$sx^{s-1}\,\widetilde{\mathcal{U}} = l_0\,\mathcal{L}_0^1 + \, l_1 \mathcal{L}_1^1.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} (l_0)^T &= \widetilde{\mathcal{U}}(sx^{s-1}\,\mathcal{B}_0^1) = d_0^{-1} r_0^1 \widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0) \\ (l_1)^T &= \widetilde{\mathcal{U}}(sx^{s-1}\,\mathcal{B}_1^1) = d_1^{-1} r_1^2 \widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0). \end{aligned}$$

Assim,

$$sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_0^1)^T (d_0^{-1})^T \mathcal{L}_0^1 + (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T\,\mathcal{L}_1^1. \tag{IV.17}$$

Por (IV.8), temos que,

$$\mathcal{L}_0^1 = A\,\mathcal{L}_0 + B\,\mathcal{L}_1 \;\;\text{e}\;\;\; \mathcal{L}_1^1 = A\,\mathcal{L}_1 + B\,\mathcal{L}_2,$$

logo,

$$\begin{aligned} sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}} &= (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_0^1)^T (d_0^{-1})^T A\,\mathcal{L}_0 \\ &\quad + (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T \left[(r_0^1)^T (d_0^{-1})^T B + (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T A\right]\,\mathcal{L}_1 + (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T B\,\mathcal{L}_2\,. \end{aligned}$$

Pelo Teorema III.1, temos que,

$$\mathcal{L}_0 = (G_0(x^s))^T\,\mathcal{U} \;\;,\;\; \mathcal{L}_1 = (G_1(x^s))^T\,\mathcal{U} \;\;\text{e}\;\; \mathcal{L}_2 = (G_2(x^s))^T\,\mathcal{U},$$

onde,

$$\begin{aligned} G_0(x^s) &= (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1} \\ G_1(x^s) &= (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1}(x^s I_{sd\times sd} - \beta_0^{s,d})(\gamma_1^{s,d})^{-1} \\ G_2(x^s) &= (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-1}\left[(x^s I_{sd\times sd} - \beta_0^{s,d})(\gamma_1^{s,d})^{-1}(x^s I_{sd\times sd} - \beta_1^{s,d}) - \alpha_0^{s,d}\right](\gamma_2^{s,d})^{-1}\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$sx^{s-1}\,\widetilde{\mathcal{U}} = \Phi(x)\mathcal{U}, \tag{IV.18}$$

onde Φ é um polinómio matricial da forma $\Phi(x) = \phi_0(x^s)^2 + \phi_1 x^s + \phi_2$, onde,

$$\begin{aligned}
&\phi_0 = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T B (\gamma_2^{s,d})^{-T} (\gamma_1^{s,d})^{-T} (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T} \\
&\phi_1 = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T \left[(r_0^1)^T (d_0^{-1})^T B + (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T A\right] (\gamma_1^{s,d})^{-T} (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T} \\
&-(\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T B (\gamma_2^{s,d})^{-T} \left[(\gamma_1^{s,d})^{-1} \beta_1^{s,d} + \beta_0^{s,d} (\gamma_1^{s,d})^{-1}\right]^T \\
&\quad \times (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T} \\
&\phi_2 = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_0^1)^t (d_0^{-1})^T A (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T} \\
&-(\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T \left[(r_0^1)^T (d_0^{-1})^T B + (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T A\right] (\gamma_1^{s,d})^{-T} (\beta_0^{s,d})^T (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T} \\
&+(\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T B (\gamma_2^{s,d})^{-T} \left[\beta_0^{s,d} (\gamma_1^{s,d})^{-1} \beta_1^{s,d} - \alpha_0^{s,d}\right]^T (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T}.
\end{aligned}$$

Como conhecemos as estruturas das matrizes intervenientes em ϕ_0 e ϕ_1, verificamos que estas têm as estruturas das matrizes $\alpha_m^{1,d}$ e $\beta_m^{1,d}$, respectivamente.

Para demonstrar a implicação $c) \Rightarrow d)$ comecemos por escrever o vector de funcionais lineares vectoriais $\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}}$ em termos dos elementos da sucessão dual $\{\mathcal{L}_n\}$ de $\{\mathcal{B}_m\}$, i.e.,

$$\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \, \mathcal{L}_j, \quad (\varepsilon_j)^T = \mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}_j), \quad j \in \mathbb{N},$$

onde,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_j)^T &= \mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}_j) = -\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}'_j) \\
&= -\widetilde{\mathcal{U}}(A_j^1 \, \tilde{\mathcal{B}}_j + A_j^0 \, \tilde{\mathcal{B}}_{j-1}) \text{ por (IV.3)} \\
&= 0_{sd\times sd}, \; j = 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = -(\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}'_0))^T \, \mathcal{L}_0 - (\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}'_1))^T \, \mathcal{L}_1.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}'_0) &= \widetilde{\mathcal{U}}(A_0^1 \, \tilde{\mathcal{B}}_0) = A_0^1 \widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0) \\
\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}'_1) &= \widetilde{\mathcal{U}}(A_1^1 \, \tilde{\mathcal{B}}_1 + A_1^0 \, \tilde{\mathcal{B}}_0) = A_1^0 \widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0),
\end{aligned}$$

tendo-se,

$$\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = -(\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T ((A_0^1)^T \, \mathcal{L}_0 + (A_1^0)^t \, \mathcal{L}_1).$$

Como anteriormente, i.e., tendo em conta as representações dos vectores de funcionais lineares vectoriais $\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{L}_1$, vem

$$\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = \Psi(x)\mathcal{U}, \tag{IV.19}$$

com,

$$\Psi(x) = \psi_0 x^s + \psi_1,$$

onde,

$$\psi_0 = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (A_1^0)^T (\gamma_1^{s,d})^{-T} (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T}$$
$$\psi_1 = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (-(A_0^1)^T + (A_1^0)^T (\gamma_1^{s,d})^{-T} (\beta_0^{s,d})^T)(\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^{-T}.$$

De forma análoga ao caso anterior, i.e., sabendo as estruturas das matrizes intervenientes em ψ_0 e ψ_1, verificamos que têm as suas estruturas de $\alpha_m^{1,d}$ e $\beta_m^{1,d}$, respectivamente.

Multiplicando ambos os membros de (IV.19) por x^s, vem, $x^s \mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = x^s \Psi(x)\mathcal{U}$. Tendo em atenção que, $x^s \mathbf{D}\,\widetilde{\mathcal{U}} = \mathbf{D}\,(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) - sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}}$ e $x^s\widetilde{\mathcal{U}} = s^{-1}x\Phi(x)\mathcal{U}$ por (IV.18), temos que, $\mathbf{D}\,(\Phi_1(x)\mathcal{U}) = \Psi_1(x)\mathcal{U}$, onde $\Phi_1(x) = s^{-1}x\Phi(x)$ e $\Psi_1(x) = x^s\Psi(x) + \Phi(x)$.

Finalmente, mostremos a implicação $d) \Rightarrow a)$. Para isso, mostramos que a sucessão vectorial de polinómios $\{\tilde{\mathcal{B}}_m\}$, é ortogonal de tipo II relativamente a $\widetilde{\mathcal{U}}$, i.e, $((x^s)^k \widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = \Delta_m \, \delta_{k,m}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, tal que, $sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}} = \Phi(x)\mathcal{U}$ e $\mathbf{D}\,(\Phi_1(x)\mathcal{U}) = \Psi_1(x)\mathcal{U}$ onde, $\Phi_1(x) = s^{-1}x\Phi(x)$ e $\Psi_1(x) = x^s\Psi(x) + \Phi(x)$. Notemos que

$$\begin{aligned}
((x^s)^k \widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) &= ((x^s)^{k-1}(s^{-1}x\,\Phi\mathcal{U}))(\tilde{\mathcal{B}}_m) \\
&= ((x^s)^{k-1}(s^{-1}x\Phi\mathcal{U}))(\tilde{A}_m^0\,\mathcal{B}'_{m+1} + \tilde{A}_m^1\,\mathcal{B}'_m) \\
&= \tilde{A}_m^0(s^{-1}x\Phi\mathcal{U})((x^s)^{k-1}\,\mathcal{B}'_{m+1}) + \tilde{A}_m^1(s^{-1}x\Phi\mathcal{U})((x^s)^{k-1}\,\mathcal{B}'_m) \\
&= \tilde{A}_m^0(s^{-1}x\Phi\mathcal{U})(((x^s)^{k-1}\,\mathcal{B}_{m+1})' - s(k-1)x^{s(k-1)-1}\,\mathcal{B}_{m+1}) \\
&+ \tilde{A}_m^1(s^{-1}x\Phi\mathcal{U})(((x^s)^{k-1}\,\mathcal{B}_m)' - s(k-1)x^{s(k-1)-1}\,\mathcal{B}_m).
\end{aligned}$$

Tendo em conta a nossa hipótese temos que,

$$\begin{aligned}
((x^s)^k\widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = &-\tilde{A}_m^0(\Psi_1\mathcal{U})((x^s)^{k-1}\,\mathcal{B}_{m+1}) - (k-1)\tilde{A}_m^0(x\Phi\mathcal{U})(x^{s(k-1)-1}\,\mathcal{B}_{m+1}) \\
&- \tilde{A}_m^1(\Psi_1\mathcal{U})((x^s)^{k-1}\,\mathcal{B}_m) - (k-1)\tilde{A}_m^1(x\Phi\mathcal{U})(x^{s(k-1)-1}\,\mathcal{B}_m)\,.
\end{aligned}$$

Sendo,

$$\Psi_1 = (\psi_0 + \phi_0)x^{2s} + (\psi_1 + \phi_1)x^s + \phi_2, \ \text{ e } \ x\Phi = \phi_0 x^{2s+1} + \phi_1 x^{s+1} + \phi_2 x,$$

vem,

$$\begin{aligned}
((x^s)^k\widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = &-\tilde{A}_m^0(((\psi_0 + \phi_0)x^{2s})\mathcal{U})(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{m+1}) \\
&- \tilde{A}_m^0(((\psi_1 + \phi_1)x^s + \phi_2)\mathcal{U})(x^{s(k-1)}\mathcal{B}_{m+1}) \\
&- (k-1)\tilde{A}_m^0((\phi_0 x^{2s+1} + \phi_1 x^{s+1} + \phi_2 x)\mathcal{U})(x^{s(k-1)-1}\,\mathcal{B}_{m+1})
\end{aligned}$$

$$- \tilde{A}^1_m(((\psi_0 + \phi_0)x^{2s})\,\mathcal{U})(x^{s(k-1)}\,\mathcal{B}_m) - \tilde{A}^1_m(((\psi_1 + \phi_1)x^s + \phi_2)\,\mathcal{U})(x^{s(k-1)}\,\mathcal{B}_m)$$
$$- (k-1)\tilde{A}^1_m((\phi_0 x^{2s+1} + \phi_1 x^{s+1} + \phi_2 x)\,\mathcal{U})(x^{s(k-1)-1}\,\mathcal{B}_m)\,,$$

i.e,

$$\begin{aligned}
((x^s)^k\widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = & -\tilde{A}^0_m\left[((x^s)^{k+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m+1})(\psi_0)^T + ((x^s)^k\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m+1})(\psi_1)^T\right] \\
& -k\tilde{A}^0_m\left[((x^s)^{k+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m+1})(\phi_0)^T + ((x^s)^k\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m+1})(\phi_1)^T\right] \\
& -k\tilde{A}^0_m((x^s)^{k-1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m+1})(\phi_2)^T \\
& -\tilde{A}^1_m\left[((x^s)^{k+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\psi_0)^T + ((x^s)^k\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\psi_1)^T\right] \\
& -k\tilde{A}^1_m\left[((x^s)^{k+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\phi_0)^T + ((x^s)^k\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\phi_1)^T\right] \\
& -k\tilde{A}^1_m((x^s)^{k-1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\phi_2)^T.
\end{aligned}$$

Sendo a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}$, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}$, e sabendo qual a estrutura das matrizes intervenientes acima, vem:

$$((x^k)^s\widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = 0_{sd\times sd}, k = 0, 1, \ldots, m-2$$

$$((x^s)^{m-1}\widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = -\tilde{A}^1_m((x^s)^m\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)\left[(\psi_0)^T - (m-1)(\phi_0)^T\right] = 0_{sd\times sd}$$

$$\begin{aligned}
((x^s)^m\widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = & -\tilde{A}^0_m((x^s)^{m+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m+1})(\psi_0)^T - m\tilde{A}^0_m d_m^{-1}((x^s)^{m+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m+1})(\phi_0)^T \\
& - \tilde{A}^1_m((x^s)^{m+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\psi_0)^T - \tilde{A}^1_m((x^s)^m\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\psi_1)^T \\
& - m\tilde{A}^1_m((x^s)^{m+1}\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\phi_0)^T - m\tilde{A}^1_m((x^s)^m\,\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)(\phi_1)^T \\
= & \ \Delta_m \ \text{(matriz triangular superior e regular).}
\end{aligned}$$

Mostrámos assim que,

$$((x^s)^k\widetilde{\mathcal{U}})(\tilde{\mathcal{B}}_m) = \Delta_m\,\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \ldots,\ m, \quad m \in \mathbb{N},$$

mostrando-se o pretendido e terminando a demonstração deste teorema. ∎

Corolário IV.1. *Considere-se $s = 1$ no enunciado do teorema anterior. Então a sucessão $\{\mathcal{B}_n\}$ é clássica tipo Hahn se, e somente se, a funcional de ortogonalidade, $\mathcal{U}$, verifica a equação funcional vectorial tipo Pearson,*

$$\mathbf{D}\,(\Phi(x)\mathcal{U}) = \Psi(x)\mathcal{U}\,.$$

Demonstração. A demonstração é análoga à apresentada no teorema anterior, tendo em conta que quando $s = 1$ em (IV.11) temos $\widetilde{\mathcal{U}} = \Phi(x)\mathcal{U}$ onde $\Phi(x) = \phi_0 x^2 + \phi_1 x + \phi_2$ com $\phi_i \in \mathcal{M}_{d\times d}$. Agora por (IV.19), i.e., $\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = \Psi(x)\mathcal{U}$ onde

$\Psi(x) = \psi_0 x + \psi_1$ com $\psi_i \in \mathcal{M}_{d\times d}$, temos que, $\mathbf{D}\left(\Phi(x)\mathcal{U}\right) = \Psi(x)\mathcal{U}$, como queríamos mostrar. ∎

Teorema IV.3. *Sejam $\{\mathcal{B}_n\}$ uma sucessão livre de polinómios vectoriais, e $\{\mathcal{B}_n^1\}$, $\{\tilde{\mathcal{B}}_n\}$, definidas respectivamente por* (IV.2) *e* (IV.1)*, com sucessões duais, $\{\mathcal{L}_n^1\}$, $\{\tilde{\mathcal{L}}_n\}$. Então, $\{\mathcal{B}_n\}$ é clássica tipo Hahn se, e somente se, existem sucessões de matrizes em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, (s_n^1), (s_n^2) e (s_n^3), $n \in \mathbb{N}$, com s_n^3 matriz inferior e regular, tais que,*

$$sx^{s-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = s_n^3\,\mathcal{L}_{n+1}^1 + s_n^2\,\mathcal{L}_n^1 + s_n^1\,\mathcal{L}_{n-1}^1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Pelos Teoremas III.1 e IV.1, existem sucessões de matrizes em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$, $(\gamma_{n+1,1}^{s,d})$, $(\beta_{n,1}^{s,d})$ e $(\alpha_{n-1,1}^{s,d})$, $n \in \mathbb{N}$, com $\gamma_{n+1,1}^{s,d}$ matriz triangular superior e regular, tais que para $n = 1, 2, \ldots$, $\{\mathcal{L}_n^1\}$ é definida pela relação de recorrência a três termos

$$x^s\,\mathcal{L}_n^1 = (\gamma_{n+1,1}^{s,d})^T\,\mathcal{L}_{n+1}^1 + (\beta_{n,1}^{s,d})^T\,\mathcal{L}_n^1 + (\alpha_{n-1,1}^{s,d})^T\,\mathcal{L}_{n-1}^1.$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros da igualdade por d_n^{-1} e usando (IV.7), i.e ., $\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = -d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1$, $n \in \mathbb{N}$, vem

$$-x^s\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = d_n^{-1}(\gamma_{n+1,1}^{s,d})^T\,\mathcal{L}_{n+1}^1 + d_n^{-1}(\beta_{n,1}^{s,d})^T\,\mathcal{L}_n^1 + d_n^{-1}(\alpha_{n-1,1}^{s,d})^T\,\mathcal{L}_{n-1}^1,$$

i.e.,

$$x^s\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = d_n^{-1}(\gamma_{n+1,1}^{s,d})^T d_{n+1}\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n+1} + d_n^{-1}(\beta_{n,1}^{s,d})^T d_n\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n + d_n^{-1}(\alpha_{n-1,1}^{s,d})^T d_{n-1}\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n-1}.$$

Sendo,

$$x^s\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = \mathbf{D}\,(x^s\,\tilde{\mathcal{L}}_n) - sx^{s-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

temos,

$$\begin{aligned} sx^{s-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = &-d_n^{-1}(\gamma_{n+1,1}^{s,d})^T d_{n+1}\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n+1} - d_n^{-1}(\beta_{n,1}^{s,d})^T d_n\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n \\ &-d_n^{-1}(\alpha_{n-1,1}^{s,d})^T d_{n-1}\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n-1} + \mathbf{D}\,(x^s\,\tilde{\mathcal{L}}_n), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} sx^{s-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = \mathbf{D}\,[&-d_n^{-1}(\gamma_{n+1,1}^{s,d})^T d_{n+1}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n+1} - d_n^{-1}(\beta_{n,1}^{s,d})^T d_n\,\tilde{\mathcal{L}}_n \\ &-d_n^{-1}(\alpha_{n-1,1}^{s,d})^T d_{n-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n-1} + x^s\,\tilde{\mathcal{L}}_n]. \end{aligned}$$

Assim, $\{\tilde{\mathcal{L}}_n\}$ verifica uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais do tipo:

$$x^s\,\tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{\gamma}_{n+1}^{s,d})^T\,\tilde{\mathcal{L}}_{n+1} + (\tilde{\beta}_n^{s,d})^T\,\tilde{\mathcal{L}}_n + (\tilde{\alpha}_{n-1}^{s,d})^T\,\tilde{\mathcal{L}}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

se, e somente se,

$$sx^{s-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = \left[-d_n^{-1}(\gamma_{n+1,1}^{s,d})^T d_{n+1} + (\tilde{\gamma}_{n+1}^{s,d})^T\right] \mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n+1}$$
$$+ \left[-d_n^{-1}(\beta_{n,1}^{s,d})^T d_n + (\tilde{\beta}_n^{s,d})^T\right] \mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n + \left[-d_n^{-1}(\alpha_{n-1,1}^{s,d})^T d_{n-1} + (\tilde{\alpha}_{n-1}^{s,d})^T\right] \mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_{n-1}\,,$$

i.e.,

$$sx^{s-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = s_n^3\,\mathcal{L}_{n+1}^1 + s_n^2\,\mathcal{L}_n^1 + s_n^1\,\mathcal{L}_{n-1}^1, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde,

$$\begin{aligned} s_n^3 &= d_n^{-1}(\gamma_{n+1,1}^{s,d})^T - (\tilde{\gamma}_{n+1}^{s,d})^T d_{n+1} \\ s_n^2 &= d_n^{-1}(\beta_{n,1}^{s,d})^T - (\tilde{\beta}_n^{s,d})^T d_n^{-1} \\ s_n^1 &= d_n^{-1}(\alpha_{n-1,1}^{s,d})^T - (\tilde{\alpha}_{n-1}^{s,d})^T d_{n-1}^{-1}\,, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração do teorema. ∎

3. Teorema de equivalência para a ortogonalidade de tipo I

Vamos obter fórmulas que vão ser úteis na demonstração de um resultado a apresentar. Para deduzir a primeira fórmula vamos usar (IV.17) do Teorema IV.2, i.e.,

$$sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_0^1)^T (d_0^{-1})^T\,\mathcal{L}_0^1 + (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T\,\mathcal{L}_1^1.$$

Considerando a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m^1\}$, ortogonal de tipo II relativamente a um vector de funcionais lineares $\mathcal{U}^1$, pelo Teorema III.1, vem

$$\mathcal{L}_0^1 = (G_0^1)^T\,\mathcal{U}^1 \;\text{ e }\; \mathcal{L}_1^1 = (G_1^1)^T\,\mathcal{U}^1.$$

Por substituição na fórmula anterior, vem

$$sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}} = \tilde{\Phi}_1(x)\mathcal{U}^1, \tag{IV.20}$$

onde $\widetilde{\Phi}_1$ é um polinómio matricial de grau 1 definido por:

$$\tilde{\Phi}_1(x) = (\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T \left[(r_0^1)^T (d_0^{-1})^T (G_0^1)^T + (r_1^2)^T (d_1^{-1})^T (G_1^1)^T\right].$$

Com vista à obtenção de uma fórmula que descreva $\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}}$, em termos dos elementos da sucessão dual $\{\mathcal{L}_n^1\}$ de $\{\mathcal{B}_m^1\}$, i.e.,

$$\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j\,\mathcal{L}_j^1, \quad (\varepsilon_j)^T = \mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}_j^1), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Sendo,

$$(\varepsilon_j)^T = \mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}_j^1) = -\widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}_j^1)' = -\widetilde{\mathcal{U}}(d_j^{-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_j) = -d_0^{-1}\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0)\,,$$

vem,

$$\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = -(\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T(d_0^{-1})^T\,\mathcal{L}_0^1,$$

i.e.,

$$\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = \Psi(x)\mathcal{U}^1, \tag{IV.21}$$

onde,

$$\Psi(x) = -(\widetilde{\mathcal{U}}(\tilde{\mathcal{B}}_0))^T(d_0^{-1})^T(G_0^1)^T.$$

Multiplicando ambos os membros de (IV.21) por x^s, vem

$$x^s\,\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = x^s\Psi(x)\mathcal{U}^1.$$

Usando,

$$x^s\,\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = D(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) - sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}},$$

vem,

$$\mathbf{D}\,(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) = x^s\Psi(x)\mathcal{U}^1 + sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}}.$$

Por fim por (IV.20) temos,

$$\mathbf{D}\,(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) = x^s\Psi(x)\mathcal{U}^1 + \tilde{\Phi}_1(x)\mathcal{U}^1,$$

ou ainda,

$$\mathbf{D}\,(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) = \tilde{\Psi}(x)\mathcal{U}^1,$$

onde, $\tilde{\Psi}(x) = x^s\Psi(x) + \tilde{\Phi}_1(x)$.

TEOREMA IV.4. *Sejam $\{\mathcal{B}_n\}$ uma sucessão livre de polinómios vectoriais, e $\{\mathcal{B}_n^1\}$, $\{\tilde{\mathcal{B}}_n\}$, definidas respectivamente por* (IV.2) *e* (IV.1)*, com sucessões duais, $\{\mathcal{L}_n^1\}$, $\{\tilde{\mathcal{L}}_n\}$. Se $\{\mathcal{B}_n\}$ é clássica tipo Hahn, então as sucessões de polinómios matriciais $\{\tilde{G}_n\}$ e $\{G_n^1\}$ definidas por:*

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}} \;\; e \;\; \mathcal{L}_n^1 = (G_n^1)^T\,\mathcal{U}^1, \;\; n \in \mathbb{N},$$

são tais que,

$$(\tilde{\Phi}_1)^T\tilde{G}_n = G_{n+1}^1(s_n^0)^T + G_n^1(s_n^1)^T + G_{n-1}^1(s_n^2)^T, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{IV.22}$$

onde,

$$(s_n^0)^T = d_{n+1}^{-1}r_n^2 \;\;,\;\; (s_n^1)^T = d_n^{-1}r_n^1 \;\;,\;\; (s_n^2)^T = d_{n-1}^{-1}r_n^0,$$

e

$$\begin{aligned} & s^{-1}x(\tilde{\Phi}_1)^T(\tilde{G}_n)' + ((\tilde{\Psi})^T - (\tilde{\Phi}_1)^T)\tilde{G}_n \\ & \qquad = -G^1_{n+1}(l^0_n)^T - G^1_n(l^1_n)^T - G^1_{n-1}(l^2_n)^T, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{IV.23}$$

onde,

$$(l^0_n)^T = -d_n^{-1}\gamma^{s,d}_{n+1,1} \;\; , \;\; (l^1_n)^T = -d_n^{-1}\beta^{s,d}_{n,1} \;\; e \;\; (l^2_n)^T = -d_n^{-1}\alpha^{s,d}_{n-1,1}.$$

Demonstração. Comecemos por mostrar a fórmula (IV.22). Consideremos a representação:

$$(\tilde{G}_n)^T\tilde{\Phi}_1 = \sum_{k=0}^{n+1} s_n^{n+1-k}(G^1_k)^T, \quad s_n^{n+1-k} \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Fazendo actuar $\mathcal{U}^1(\mathcal{B}^1_j)$ a ambos os membros da igualdade anterior, vem

$$((\tilde{G}_n)^T\tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}^1_j) = (\sum_{k=0}^{n+1} s_n^{n+1-k}(G^1_k)^t\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}^1_j).$$

Sendo $\mathcal{L}^1_n = (G^1_n(x^s))^T\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{L}^1_n(\mathcal{B}^1_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, vem

$$((\widetilde{G}_n)^T\tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}^1_j) = (s_n^{n+1-j})^T.$$

Como $sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}} = \tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1$ e $\tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}}$, $n \in \mathbb{N}$, vem

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(sx^{s-1}\,\mathcal{B}^1_j) = (s_n^{n+1-j})^T.$$

Usando (IV.10) do Teorema IV.2 e $\tilde{\mathcal{L}}_n(\tilde{\mathcal{B}}_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, vem

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}_n(d_j^{-1}r^0_{j+1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{j+1} + d_j^{-1}r^1_j\,\tilde{\mathcal{B}}_j + d_j^{-1}r^2_{j-1}\,\tilde{\mathcal{B}}_{j-1}) \\ & \qquad = \begin{cases} d_{n-1}^{-1}r^0_n, & j = n-1 \\ d_n^{-1}r^1_n, & j = n \\ d_{n+1}^{-1}r^2_n, & j = n+1 \\ 0_{sd\times sd}, & j \neq n-1, n, n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$(\tilde{\Phi}_1)^T\tilde{G}_n = G^1_{n+1}(s^0_n)^T + G^1_n(s^1_n)^T + G^1_{n-1}(s^2_n)^T,$$

onde,

$$(s^2_n)^T = d_{n-1}^{-1}r^0_n, \;\; , \;\; (s^1_n)^T = d_n^{-1}r^1_n \;\; \text{e} \;\; (s^0_n)^T = d_{n+1}^{-1}r^2_n,$$

como queríamos mostrar.

Mostremos (IV.23). Consideremos a representação:

$$s^{-1}x((\tilde{G}_n)')^T\tilde{\Phi}_1 + (\tilde{G}_n)^T(\tilde{\Psi}-\tilde{\Phi}_1) = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T, \quad l_n^{n+1-k} \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Multiplicando à direita ambos os membros da igualdade anterior pelo vector de funcionais vectoriais $\mathcal{U}^1$, vem

$$s^{-1}x((\tilde{G}_n)')^T\tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1 + (\tilde{G}_n)^T\tilde{\Psi}\,\mathcal{U}^1 - (\tilde{G}_n)^T\tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1 = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\,\mathcal{U}^1.$$

Sendo $sx^{s-1}\widetilde{\mathcal{U}} = \tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1$ e $\mathbf{D}\,(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) = \tilde{\Psi}\,\mathcal{U}^1$, vem

$$((\tilde{G}_n)')^T(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) + (\tilde{G}_n)^T\mathbf{D}\,(x^s\widetilde{\mathcal{U}}) - sx^{s-1}(\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}} = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\,\mathcal{U}^1,$$

i.e.,

$$\mathbf{D}\,((\tilde{G}_n)^T(x^s\widetilde{\mathcal{U}})) - sx^{s-1}(\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}} = (\sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T)\,\mathcal{U}^1.$$

Usando $\tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}}$, $n \in \mathbb{N}$, vem

$$\mathbf{D}\,(x^s\,\tilde{\mathcal{L}}_n) - sx^{s-1}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\,\mathcal{U}^1,$$

i.e.,

$$x^s\,\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\,\mathcal{U}^1.$$

Sendo $\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = -d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1$ por (IV.7), vem

$$-x^s d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1 = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\,\mathcal{U}^1.$$

Fazendo actuar ambos os membros da igualdade anterior sobre um polinómio vectorial $\mathcal{B}_j^1$, vem

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1(x^s\,\mathcal{B}_j^1) = (\sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\,\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}_j^1).$$

Sendo $\mathcal{L}_n^1 = (G_n^1(x^s))^T\,\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_m^1) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, vem

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1(x^s\,\mathcal{B}_j^1) = (l_n^{n+1-j})^T.$$

Sendo a sucessão vectorial de polinómios $\{\mathcal{B}_m^1\}$, ortogonal de tipo II relativamente ao vector de funcionais lineares $\mathcal{U}^1$, vem

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1(\alpha_{j,1}^{s,d}\,\mathcal{B}_{j+1}^1 + \beta_{j,1}^{s,d}\,\mathcal{B}_j^1 + \gamma_{j,1}^{s,d}\,\mathcal{B}_{j-1}^1) = (l_n^{n+1-j})^T.$$

Usando $\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_m^1) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, vem

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1(\alpha_{j,1}^{s,d}\,\mathcal{B}_{j+1}^1 + \beta_{j,1}^{s,d}\,\mathcal{B}_j^1 + \gamma_{j,1}^{s,d}\,\mathcal{B}_{j-1}^1) = \begin{cases} -d_n^{-1}\alpha_{n-1,1}^{s,d} & \text{se } \; j = n-1 \\ -d_n^{-1}\beta_{n,1}^{s,d} & \text{se } \; j = n \\ -d_n^{-1}\gamma_{n+1,1}^{s,d} & \text{se } \; j = n+1, \end{cases}$$

e portanto,

$$s^{-1}x(\tilde{\Phi}_1)^T(\tilde{G}_n)' + ((\tilde{\Psi})^T - (\tilde{\Phi}_1)^T)\tilde{G}_n = -G_{n+1}^1(l_n^0)^T - G_n^1(l_n^1)^T - G_{n-1}^1(l_n^2)^T,$$

onde,

$$(l_n^0)^T = -d_n^{-1}\gamma_{n+1,1}^{s,d} \;\;,\;\; (l_n^1)^T = -d_n^{-1}\beta_{n,1}^{s,d} \;\text{ e }\; (l_n^2)^T = -d_n^{-1}\alpha_{n-1,1}^{s,d},$$

como queríamos mostrar. ■

Observação . Tendo em conta (IV.22) constatamos que obtivemos uma fórmula de estrutura que envolve os polinómios matriciais $\tilde{G}_n$ e G_n^1. Da mesma forma considerando (IV.23) vemos que obtivemos uma fórmula de estrutura que envolve a derivada dos polinómios matriciais $\tilde{G}_n$ e os polinómios matriciais G_n^1.

Vejamos agora a forma que as fórmulas (IV.22) e (IV.23) tomam no caso particular de $s = 1$.

Corolário IV.2. *Considere-se $s = 1$ no enunciado do teorema anterior. Se a sucessão $\{\mathcal{B}_n\}$ é clássica tipo Hahn, então as sucessões de polinómios matriciais $\{\tilde{G}_n\}$ e $\{G_n^1\}$ definidas por:*

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}} \;\; e \;\; \mathcal{L}_n^1 = (G_n^1)^T\,\mathcal{U}^1, \;\; n \in \mathbb{N},$$

são tais que,

$$(\tilde{\Phi}_1)^T\tilde{G}_n = G_{n+1}^1(s_n^0)^T + G_n^1(s_n^1)^T + G_{n-1}^1(s_n^2)^T, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{IV.24}$$

onde,

$$(s_n^0)^T = d_{n+1}^{-1}r_n^2 \;\;,\;\; (s_n^1)^T = d_n^{-1}r_n^1 \;\; e \;\; (s_n^2)^T = d_{n-1}^{-1}r_n^0,$$

e,

$$(\tilde{\Phi}_1)^T(\tilde{G}_n)' + (\Psi)^T\tilde{G}_n = -G_n^1 d_n^{-1}, \;\; n = 1, 2, \ldots. \tag{IV.25}$$

Demonstração. Comecemos por mostrar a fórmula (IV.24). Consideremos a representação:

$$(\tilde{G}_n)^T\tilde{\Phi}_1 = \sum_{k=0}^{n+1} s_n^{n+1-k}(G_k^1)^T, \quad s_n^{n+1-k} \in \mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Fazendo actuar $\mathcal{U}^1(\mathcal{B}_j^1)$ a ambos os membros da igualdade anterior, vem

$$((\tilde{G}_n)^T\tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}_j^1) = (\sum_{k=0}^{n+1} s_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}_j^1).$$

Sendo $\mathcal{L}_n^1 = (G_n^1(x^s))^T\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_m^1) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n,m\in\mathbb{N}$, vem

$$((\tilde{G}_n)^T\tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}_j^1) = (s_n^{n+1-j})^T.$$

Como para $s=1$, $\widetilde{\mathcal{U}} = \tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1$, vem

$$((\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}})(\mathcal{B}_j^1) = (s_n^{n+1-j})^T.$$

Usando $\tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}}$, $n\in\mathbb{N}$, vem

$$\tilde{\mathcal{L}}_n(\mathcal{B}_j^1) = (s_n^{n+1-j})^T.$$

Considerando (IV.10) do Teorema IV.2 e $\tilde{\mathcal{L}}_n(\tilde{\mathcal{B}}_m) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n,m\in\mathbb{N}$, vem

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_n(d_j^{-1}r_{j+1}^0\,\tilde{\mathcal{B}}_{j+1} + d_j^{-1}r_j^1\,\tilde{\mathcal{B}}_j + d_j^{-1}r_{j-1}^2\,\tilde{\mathcal{B}}_{j-1})&\\ = \begin{cases} d_{n-1}^{-1}r_n^0, & j=n-1\\ d_n^{-1}r_n^1, & j=n\\ d_{n+1}^{-1}r_n^2, & j=n+1\\ 0_{sd\times sd}, & j\neq n-1,n,n+1.\end{cases}&\end{aligned}$$

Assim,

$$(\tilde{\Phi}_1)^T\tilde{G}_n = G_{n+1}^1(s_n^0)^T + G_n^1(s_n^1)^T + G_{n-1}^1(s_n^2)^T,$$

onde,

$$(s_n^0)^T = d_{n+1}^{-1}r_n^2 \ , \ (s_n^1)^T = d_n^{-1}r_n^1 \ \text{ e } \ (s_n^2)^T = d_{n-1}^{-1}r_n^0,$$

como pretendíamos mostrar.

Mostremos (IV.25). Consideremos a representação:

$$((\tilde{G}_n)')^T\tilde{\Phi}_1 + (\tilde{G}_n)^T\Psi = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T, \quad l_n^{n+1-k}\in\mathcal{M}_{sd\times sd}.$$

Multiplicando à direita ambos os membros da igualdade anterior pelo vector de funcionais lineares $\mathcal{U}^1$, vem

$$((\tilde{G}_n)')^T\tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1 + (\tilde{G}_n)^T\Psi\mathcal{U}^1 = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\mathcal{U}^1.$$

Como para $s=1$ vem $\widetilde{\mathcal{U}} = \tilde{\Phi}_1\mathcal{U}^1$ e por (IV.21) temos $\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = \Psi\mathcal{U}^1$, vem

$$((\tilde{G}_n)')^T\widetilde{\mathcal{U}} + (\tilde{G}_n)^T\mathbf{D}\widetilde{\mathcal{U}} = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\mathcal{U}^1,$$

i.e.,

$$\mathbf{D}\left((\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\mathcal{U}^1.$$

Sendo $\tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{G}_n)^T\widetilde{\mathcal{U}}$, $n \in \mathbb{N}$, vem

$$\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\mathcal{U}^1.$$

Sendo $\mathbf{D}\,\tilde{\mathcal{L}}_n = -d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1$ por (IV.7), vem

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1 = \sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\mathcal{U}^1.$$

Fazendo actuar ambos os membros sobre um polinómio vectorial $\mathcal{B}_j^1$, vem

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_j^1) = (\sum_{k=0}^{n+1} l_n^{n+1-k}(G_k^1)^T\mathcal{U}^1)(\mathcal{B}_j^1).$$

Sendo $\mathcal{L}_n^1 = (G_n^1(x^s))^T\mathcal{U}^1$ e $\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_m^1) = I_{sd\times sd}\,\delta_{n,m}$, $n,m \in \mathbb{N}$, vem

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_j^1) = (l_n^{n+1-j})^T.$$

Por outro lado,

$$-d_n^{-1}\,\mathcal{L}_n^1(\mathcal{B}_j^1) = \begin{cases} -d_n^{-1}, & j=n \\ 0_{sd\times sd}, & j\neq n \end{cases}$$

logo,

$$(\tilde{\Phi}_1)^T(\tilde{G}_n)' + (\Psi)^T\widetilde{G}_n = -G_n^1 d_n^{-1},$$

como queríamos mostrar. ■

Como consequência deste corolário estabelecemos o seguinte resultado.

Corolário IV.3. *Considere-se $s = 1$ no enunciado do teorema anterior. Se a sucessão $\{\mathcal{B}_n\}$ é clássica tipo Hahn, então:*

$$\begin{cases} (s_n^0)^T = \gamma_{n+1}^{1,d} d_n^{-1} - d_{n+1}^{-1} \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d} \\ (s_n^1)^T = \beta_n^{1,d} d_n^{-1} - d_n^{-1} \widetilde{\beta}_n^{1,d} \\ (s_n^2)^T = \gamma_{n+1}^{1,d} d_n^{-1} - d_{n+1}^{-1} \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d} \end{cases}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{IV.26}$$

Demonstração. Pelo Teorema III.1, existem polinómios matriciais G_n^1 e $\tilde{G}_n$, tais que

$$\mathcal{L}_n^1 = (G_n^1)^T \mathcal{U}^1 \text{ e } \tilde{\mathcal{L}}_n = (\tilde{G}_n)^T \widetilde{\mathcal{U}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

que verificam, respectivamente, para $n = 1, 2, \ldots$ as relações de recorrência a três termos:

$$xG_n^1 = G_{n-1}^1 \alpha_{n-1}^{1,d} + G_n^1 \beta_n^{1,d} + G_{n+1}^1 \gamma_{n+1}^{1,d} \tag{IV.27}$$

e

$$x\tilde{G}_n = \tilde{G}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1}^{1,d} + \tilde{G}_n \tilde{\beta}_n^{1,d} + \tilde{G}_{n+1} \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d}. \tag{IV.28}$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros de (IV.28) por $(\Psi)^T$, vem

$$0_{d\times d} = -x(\Psi)^T \tilde{G}_n + (\Psi)^T \tilde{G}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1}^{1,d} + (\Psi)^T \tilde{G}_n \tilde{\beta}_n^{1,d} + (\Psi)^T \tilde{G}_{n+1} \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d}. \tag{IV.29}$$

Derivando ambos os membros de (IV.28), vem

$$\tilde{G}_n = -x(\tilde{G}_n)' + (\tilde{G}_{n-1})' \tilde{\alpha}_{n-1}^{1,d} + (\tilde{G}_n)' \tilde{\beta}_n^{1,d} + (\tilde{G}_{n+1})' \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d}.$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros por $(\tilde{\Phi}_1)^T$, vem

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi}_1)^T \tilde{G}_n = -x(\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_n)' + (\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_{n-1})' \tilde{\alpha}_{n-1}^{1,d} \\ + (\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_n)' \tilde{\beta}_n^{1,d} + (\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_{n+1})' \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d} \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Adicionando membro a membro das igualdades (IV.29) e (IV.30), vem

$$\begin{aligned} (\tilde{\Phi}_1)^T \tilde{G}_n = & -x(\Psi)^T \tilde{G}_n + (\Psi)^T \tilde{G}_{n-1} \tilde{\alpha}_{n-1}^{1,d} + (\Psi)^T \tilde{G}_n \tilde{\beta}_n^{1,d} + (\Psi)^T \tilde{G}_{n+1} \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d} \\ & - x(\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_n)' + (\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_{n-1})' \tilde{\alpha}_{n-1}^{1,d} + (\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_n)' \tilde{\beta}_n^{1,d} + (\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_{n+1})' \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d}. \end{aligned}$$

Por (IV.25) do corolário anterior, i.e.,

$$(\Psi)^T \tilde{G}_n = -(\tilde{\Phi}_1)^T (\tilde{G}_n)' - G_n^1 d_n^{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

vem,

$$(\tilde{\Phi}_1)^T \tilde{G}_n = xG_n^1 d_n^{-1} - G_{n-1}^1 d_{n-1}^{-1} \tilde{\alpha}_{n-1}^{1,d} - G_n^1 d_n^{-1} \tilde{\beta}_n^{1,d} - G_{n+1}^1 d_{n+1}^{-1} \tilde{\gamma}_{n+1}^{1,d}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Por (IV.24) do Corolário anterior e (IV.27), vem

$$G^1_{n+1}(s^0_n)^T + G^1_n(s^1_n)^T + G^1_{n-1}(s^2_n)^T = G^1_{n+1}\left[\gamma^{1,d}_{n+1}d^{-1}_n - d^{-1}_{n+1}\tilde{\gamma}^{1,d}_{n+1}\right]$$
$$+ G^1_n\left[\beta^{1,d}_n d^{-1}_n - d^{-1}_n\tilde{\beta}^{1,d}_n\right] + G^1_{n-1}\left[\alpha^{1,d}_{n-1}d^{-1}_n - d^{-1}_{n-1}\tilde{\alpha}^{1,d}_{n-1}\right], \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Sendo $\{G^1_n\}$ uma família livre de polinómios, obtemos as relações entre os coeficientes matriciais (IV.26). ■

4. Comparação de resultados

No Capítulo I apresentámos alguns resultados relacionados com a caracterização de sucessões de polinómios ortogonais clássicos segundo Hahn para multi-índices diagonais que podemos encontrar em [**43**]. Usando o Corolário IV.1 e o Teorema IV.2 vamos apresentar dois resultados que são extensões da implicação $b) \Rightarrow b')$ do Teorema I.7. Ambos os resultados dão-nos uma condição necessária para que se tenha uma sucessão de polinómios mónicos ortogonal clássica segundo Hahn.

Teorema IV.5. *Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios clássica segundo Hahn onde $s = 1, 2, 3, \ldots$. Então, existe um polinómio ϕ de grau $(sd(s+1)+s)$ e um polinómio matricial $\tilde{\Psi}$ com coeficientes de ordem $sd \times sd$, tais que*

$$\mathbf{D}\left(\phi(x)\,\mathcal{U}\right) = \tilde{\Psi}(x)\,\mathcal{U}. \tag{IV.31}$$

Demonstração. Sendo $\{\mathcal{B}_m\}$ clássica segundo Hahn, pelo Teorema IV.2 existem polinómios matriciais Φ_1 e Ψ_1 com coeficientes de ordem $sd \times sd$ verificando uma equação funcional vectorial *tipo Pearson*

$$\mathbf{D}\left(\Phi_1(x)\,\mathcal{U}\right) = \Psi_1(x)\,\mathcal{U}.$$

Multiplicando ambos os membros pela adjunta do polinómio matricial Φ_1, i.e., por $\mathrm{adj}(\Phi_1)$, vem

$$\mathrm{adj}(\Phi_1)\,\mathbf{D}\,\Phi_1\,\mathcal{U} + \mathrm{adj}(\Phi_1)\Phi_1\mathbf{D}\,\mathcal{U} = \mathrm{adj}(\Phi_1)\Psi_1\,\mathcal{U}\,.$$

Somando e subtraindo $(\mathrm{adj}(\Phi_1))'\Phi_1\,\mathcal{U}$ no primeiro membro, vem

$$\mathrm{adj}(\Phi_1)(\Phi_1)'\,\mathcal{U} + \mathrm{adj}(\Phi_1)\Phi_1\mathbf{D}\,\mathcal{U} + (\mathrm{adj}(\Phi_1))'\Phi_1\,\mathcal{U} - (\mathrm{adj}(\Phi_1))'\Phi_1\,\mathcal{U} = \mathrm{adj}(\Phi_1)\Psi_1\,\mathcal{U}\,.$$

i.e.,

$$\mathbf{D}\left(\mathrm{adj}(\Phi_1)\Phi_1\,\mathcal{U}\right) = \left(\mathrm{adj}(\Phi_1)\Psi_1 + (\mathrm{adj}(\Phi_1))'\Phi_1\right)\mathcal{U}\,.$$

Assim,

$$\mathbf{D}\left(\det(\Phi_1)\,\mathcal{U}\right) = \left(\mathrm{adj}(\Phi_1)\Psi_1 + (\mathrm{adj}(\Phi_1))'\Phi_1\right)\mathcal{U}.$$

Denotando por, $\phi = \det(\Phi_1)$ e $\widetilde{\Psi} = (\mathrm{adj}(\Phi_1)\Psi_1 + (\mathrm{adj}(\Phi_1))'\Phi_1)$, temos, $\mathbf{D}\,(\phi\mathcal{U}) = \tilde{\Psi}\mathcal{U}$. Resta mostrar que o polinómio ϕ tem grau $sd(s+1)+s$. De facto, sendo

$$\phi = \det(\Phi_1) = \det(s^{-1}(\phi_0 x^{2s+1} + \phi_1 x^{s+1} + \phi_2 x))\,,$$

e como ϕ_0, ϕ_1 em $\mathcal{M}_{sd\times sd}$ têm as estruturas de $\alpha_m^{s,d}$, $\beta_m^{s,d}$, respectivamente, temos que grau (ϕ) =grau $(\det(\Phi_1)) = sd(s+1)+s$. ■

Corolário IV.4. *Seja $\{\mathcal{B}_m\}$ uma sucessão vectorial de polinómios clássica segundo Hahn, com $s=1$. Então, existe um polinómio ϕ de grau $d+1$ e um polinómio matricial $\tilde{\Psi}$ com coeficientes matriciais de ordem $d\times d$, tais que*

$$\mathbf{D}\,(\phi(x)\mathcal{U}) = \tilde{\Psi}(x)\mathcal{U}. \tag{IV.32}$$

Observação . Os autores, A.I. Aptekarev, A. Branquinho e W. Van Assche em [**4**] estudam polinómios ortogonais múltiplos relativamente a um conjunto de $d = 2,3,\ldots$ funções peso, $\{w^1,\ldots,w^d\}$, satizfazendo uma equação funcional *tipo Pearson* do tipo:

$$(\phi(z)w_j(z))' = \psi_j(z)w_j(z), \quad j=1,\ldots,d \tag{IV.33}$$

onde ϕ e ψ_j são coeficientes polinomiais. Em notação matricial (IV.33) toma a forma:

$$\left(\begin{bmatrix} \phi & & \\ & \ddots & \\ & & \phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix}\right)' = \begin{bmatrix} \psi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix},$$

que é um caso particular das equações funcionais vectoriais tipo *Pearson* (IV.31) e (IV.32), apresentadas nos resultados atrás estabelecidos, na medida em que neste caso temos uma matriz diagonal no segundo membro. Em particular, as funções peso w_j, $j=1,\ldots,d$, associadas aos polinómios ortogonais múltiplos *clássicos* que verificam a equação (IV.33) e o coeficiente polinomial ϕ, constam na tabela 1. Assim, os polinómios ortogonais múltiplos clássicos satizfazem uma equação funcional vectorial tipo *Pearson,* que é um caso particular das equações funcionais vectoriais tipo *Pearson* (IV.31) e (IV.32). Os autores atrás referidos mostram em [**4**] que estes polinómios ortogonais múltiplos *clássicos* podem ser definidos por uma *fórmula do tipo Rodrigues.*

ϕ	$\{w_k\}_{k=1}^d$	Caso
z^2	$z^{\alpha_k}\exp(\gamma/z)$	Bessel
$z(z-1)$	$z^{\alpha_k}(z-1)^{\alpha}$	Jacobi-Piñeiro
z	$z^{\alpha_k}\exp(\beta z)$	Laguerre I
z	$z^{\alpha}\exp(\beta_k z)$	Laguerre II
1	$\exp(\delta/2z^2+\beta_k z)$	Hermite

TABELA 1. Clássicos múltiplos

Bibliografia

[1] W.A. Al-Salam, *Characterization theorems for orthogonal polynomials*, In Orthogonal polynomials: Theory and Practise (P. Nevai, ed.), Nato-ASI Series C, **294**, Kluwer, Dordrecht, (1990) 1-24.

[2] W.A. Al-Salam e T. S. Chihara, *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), no. 1, 65-70.

[3] A.I. Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998) 423-447.

[4] A.I. Aptekarev, A. Branquinho e W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3887-3914.

[5] Arvesú, J. Coussement e W. Van Assche, *Some discrete multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **153** (2003) no. 1-2, 19-45.

[6] A. Baptista, *Uma abordagem à Teoria Analítica de Números: Das Fracções Contínuas aos aproximantes de Padé*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, Dept. de Matemática, Coimbra, Portugal, 2004.

[7] B. Beckermann, J. Coussement, W. Van Assche, *Multiple Wilson and Jacobi-Piñeiro polynomials*, J. Approx. Theory **132** (2005) no. 2, 155–181.

[8] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme*, Math. Zeit. **29** (1929) 730-736.

[9] A. Branquinho, *Polinómios Ortogonais e Funcionais de Momentos: Problemas Inversos*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, Dept. de Matemática, Coimbra, Portugal, 1993.

[10] A. Branquinho, *Problemas Inversos na Teoria dos Polinómios Ortogonais*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1996.

[11] A. Branquinho, *A note on semi-classical orthogonal polynomials*, Bull. Belg. Math. Soc. **3** (1996) 1-12.

[12] A. Branquinho, J. Bustamante, A. Foulquié Moreno e G. López Lagomasino, *Normal indices in Nikishin systems*, J. Approx. Theory **124** (2003) no. 2, 254–262.

[13] A. Branquinho, L. Cotrim e A. Foulquié Moreno, *Matrix interpretation of multiple orthogonality* (em preparação).

[14] A. Branquinho, L. Cotrim e A. Foulquié Moreno, *Algebraic theory of multiple orthogonal polynomials* (em preparação).

[15] A. Branquinho, L. Cotrim e A. Foulquié Moreno, *Hahn's classical multiple orthogonal polynomials* (em preparação).

[16] J. Bustamante e G. López Lagomasino, *Hermite-Padé approximation for Nikishin Systems of analytic functions*, Russian Acad. Sci. Sb. Math. **77** (1994) 367-384.

[17] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[18] E. Coussement e W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials associated with the modified Bessel functions of the first kind*, Constr. Approx. **19** (2003) no. 2, 237-263.

[19] J. Coussement e W. Van Assche, *Gaussian quadrature for multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **178** (2005) 131-145.

[20] J. Coussement e W. Van Assche, *Differential equations for multiple orthogonal polynomials with respect to classical weights: raising and lowering operators*, J. Phys. A **39** (2006) no. 13, 3311-3318.

[21] E. Daems e A.B.J. Kuijlaars, *A Christoffel-Darboux formula for multiple orthogonal polynomials*, J. Approx. Th. **130** (2004) 190-202.

[22] K. Douak e P. Maroni, *Une caractérisation des polynômes d-orthogonaux classiques*, J. Approx. Th. **82** (1995) 177-204.

[23] K. Douak, *The relation of the d-orthogonal polynomials to the Appell polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **70** (1996) 279-295.

[24] K. Douak e P. Maroni, *On d-orthogonal Tchebychev polynomials I*, Appl. Num. Math. **24** (1997) 23-53.

[25] K. Douak e P. Maroni, *On d-orthogonal Tchebychev polynomials II*, *Methods Appl. Anal.* **4** (1997) 404-429.

[26] K. Driver e H. Stahl, *Normality in Nikishin systems*, Indag. Math., N. S., **5** (1994) 161-187.

[27] A.J. Durán, *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Th. **74** (1993) 83-109.

[28] A.J. Durán e P. Lopez-Rodriguez, *Orthogonal matrix polynomials: zeros and Bluementhals's theorem*. J. Approx. Th. **84** (1996) 96-118.

[29] W.D. Evans, L.L. Littlejohn e F. Marcellán, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995) 446-467.

[30] J. Favard, *Sur les polynômes de Tchebicheff*, C. R. Acad. Sci. Paris **200** (1935) 2052-2053.

[31] U. Fidalgo Prieto e G. López Lagomasino, *On perfect Nikishin systems*, Comput. Math. and Function Theory **2** (2002) no. 2, 415-426.

[32] J.V. Gonçalves, *Sur la formule de Rodrigues*, Port. Math. **4** (1943) no. 1, 52-64.

[33] J.V. Gonçalves, *Sur une formule de recurrence*, Port. Math. **3** (1942) no. 3, 222-233.

[34] W. Hahn, *Über differentialgleichungen für orthogonalpolynome*, Monat. Math. **95** (1983) 269-274.

[35] M.E.H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **98**, Cambridge University Press, 2005.

[36] D. Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, The Carus Mathematical Monographs **6**, Math. Assoc. Amer., 1941.

[37] V. Kaliaguine, *The operator moment problem, vector continued fractions and an explicit form of the Favard theorem for vector orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995) no. 1-3, 181-193.

[38] A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin, *Introduction to Real Analysis*, Dover, New York, 1970.

[39] A.B.J. Kuijlaars e K.T-R McLaughlin, *A Riemann-Hilbert problem for biorthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **178** (2005) 313-320.

[40] D.W. Lee, *Difference equations for discrete classical multiple orthogonal polynomials*, J. Approx. Th. **150** (2008) no. 2, 132-152.

[41] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales semi-clássicos: Una aproximacion constructiva*, Em Actas V Simposium Polinomios Ortogonales (Vigo) (A. CACHAFEIRO and E. GODOY, eds.), 1988, 100-123.

[42] F. Marcellán, A. Branquinho e J. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: A functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994) no.3, 283-303.

[43] P. Maroni, *Semi-classical character and finite-type relations between polynomial sequences*, Applied Numerical Mathematics **31** (1999) 295-330.

[44] P. Maroni, *Two-dimensional orthogonal polynomials, their associated sets and the co-recursive sets*, Numer. Algorithms **3** (1992) 299-312.

[45] P.J. McCarthy, *Characterizations of classical polynomials*, Port. Math. **20** (1961) no. 1, 47-52.

[46] E.M. Nikishin and V.N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Transl. Math. Monographs, **92**, Amer. Math. Soc. Providence RI, 1991.

[47] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill Iternational Editions, Madrid, 1987, Thir Ed.

[48] A. Santos, *Polinómios Ortogonais Clássicos Matriciais*, Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro, Dept. de Matemática Aveiro. Portugal, 2002.

[49] V.N. Sorokin e J. Van Iseghem, *Algebraic Aspects of matrix orthogonality for vector polynomials*, J. Approx. Th. **90** (1997) 97-116.

[50] W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials*, Capítulo 23 em Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable", M.E.H. Ismail, Cambridge University Press, 2005.

[51] W. Van Assche, *Analytic number theory and approximation*, Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials (A. Branquinho e A.P. Foulquié Moreno, eds.), Nova Science Publishers, 2007, 211-243.

[52] W. Van Assche e E. Coussement, *Some classical multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001) 317-347.

[53] J. Van Iseghem, *Vector orthogonal relactions, vector QD-algorithm*, J. Comput. Appl. Math. **19** (1987) 141-150.

[54] J. Van Iseghem, *Synthèse des présentations des polynômes orthogonaux classiques extensions*, Pub. IRMA, Lille, **16** (1998) no. II.