Aplicação de Alguns Processos Recorrentes à Teoria dos Polinómios Ortogonais

---

Amílcar Branquinho

Departamento de Matemática

Universidade de Coimbra

- Definição de sucessão recorrente. Aplicações à teoria de funções

- Caracterização das funções racionais

- Teorema de Poincaré.

- Uma extensão da fórmula de Lagrange

- Introdução à teoria algébrica das fracções contínuas

- Sucessões de polinómios ortogonais. Caracterizações

- Sucessões de polinómios ortogonais de Laguerre-Hahn

- Funções racionais de círculo fundamental

Definição de sucessão recorrente

- (u_n) t.q. $u_{n+k} = f(u_n, \ldots, u_{n+k-1})$
- (u_n) t.q. $u_{n+k} = \alpha_1 u_{n+k-1} + \cdots + \alpha_k u_n$

Função Logarítmo (Hurwitz)

- (u_n) t.q. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ e $u_0 > 0$

$$u_n = u_0^{1/2^n} \qquad h = 1/2^n \qquad u_n \to 1$$

$$\frac{u_0^h - 1}{h} = 2^n (u_n - 1)$$

- $\mathrm{L}\, u_0 = \lim_{h \to 0} \dfrac{u_0^h - 1}{h}$ (Definição)
- Deduza as propriedades da função logarítmo

Caracterização das funções racionais

$$p/q \quad \text{com} \quad \deg p < \deg q \quad \text{e} \quad q(0) \neq 0$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = u_0 + u_1 x + \cdots + u_n x^n + \ldots , \qquad |x| < r$$

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$q(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$u_0 = b_0$$

$$u_1 + a_1 u_0 = b_1$$

$$u_2 + a_1 u_1 + a_2 u_0 = b_2$$

$$u_{n+3} + a_1 u_{n+2} + a_2 u_{n+1} + a_3 u_n = 0$$

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1) \ldots (n+1)(\alpha x)^n$$

$$\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} = \frac{\lambda_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{\lambda_2}{1-\alpha_2 x} + \frac{\lambda_3}{1-\alpha_3 x}$$

Teorema de Liouville: Se a função $r_1 \exp(r_2)$ for elementarmente primitivável então $\int_{x_0}^{x} r_1(t) \exp(r_2(t))\, dt = r_3(x) \exp(r_2(t))$.

$$\int_0^x e^{t^2}\, dt = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2 \ldots 2}{1\, 3 \ldots (2n-1)} x^{2n+1}$$

e $$b_n = \frac{(-1)^n 2 \ldots 2}{1\, 3 \ldots (2n-1)}$$

não é recorrente de coeficientes constantes

Teorema de Poincaré:

$a_2(t)u(t+2) + a_1(t)u(t+1) + a_0(t)u(t) = 0$

$\lim_{t\to\infty} a_j(t) = a_j^0$ e a_j contínuas $t \geq 0$

$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ t.q. $a_2^0 \lambda^2 + a_1^0 \lambda + a_0^0 = 0$

Então $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{u(t+1)}{u(t)} = \lambda_1$ ou λ_2.

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge $|z| < \rho$ então

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n u(t+n)$ converge $|\lambda_1| < \rho$.

Ideia da Demonstração:

$$f(t+n) = \frac{u(t+n+1)}{u(t+n)} \text{ e } F(t+n) = \frac{f(t+n)-\lambda_1}{f(t+n)-\lambda_2}$$
$$F(t+n+1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{F(t+n)(1+\epsilon_1)+\epsilon_2}{1+\epsilon_3 F(t+n)+\epsilon_4}$$

Pode ver-se M, K com $M > 0$

$1 < K < |\lambda_1/\lambda_2|$, $t \gg 0$, $|X| < M$

então $\left|\dfrac{X(1+\epsilon_1)+\epsilon_2}{1+\epsilon_3 X+\epsilon_4}\right| < K|X|$

Assim se existir $M > 0$ t.q. para $n > n_0$

$|F(t+n)| < M$ então

$$|F(t+n+1)| < K\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right||F(t+n)|$$

Logo $\lim\limits_{t\to\infty} F(t+n) = 0$

Caso contrário $\lim\limits_{t\to\infty} F(t+n) = \infty$

Uma extensão da fórmula de Lagrange

$$0 = \boxed{F(z) = (z-a)I - f(z)u}, \quad f \text{ analítica}$$

$$\tfrac{1}{m} = \max_\gamma \left|\tfrac{f(z)}{z-a}\right|$$

$$\left|\tfrac{F(z)-(z-a)I}{z-a}\right| = \left|\tfrac{f(z)}{z-a}\right| |u| < 1\,, \quad |u| < m$$

$$\zeta = \zeta(a,u)$$

$$\begin{aligned} G(\zeta)(F'(\zeta))^{-1} &= \mathrm{Res}(G(z)(F(z))^{-1};\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+} G(z)(F(z))^{-1}\,dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+} \frac{G(z)f^n(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(G(a))^{-1}G(\zeta)(F'(\zeta))^{-1} \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}(G(a))^{-1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\,(G(z)f^n(z)) \end{aligned}$$

Introdução à teoria das fracções contínuas

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}} = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k|}{|b_k} = R_n$$

$$R_n = \frac{A_n}{B_n} \qquad \text{Notação de Pringsheim}$$

$$(A_n)\,,\ (B_n)\ :\ V_n = b_n V_{n-1} + a_n V_{n-2}$$
$$(A_0 = b_0\,,\ A_1 = b_0 b_1 + a_1) \quad (B_0 = 1\,,\ B_1 = b_1)$$

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} -A_0 &= -b_0 \\ b_1 A_0 - A_1 &= -a_1 \\ a_2 A_0 + b_2 A_1 - A_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_n A_{n-2} + b_n A_{n-1} - A_n &= 0 \end{aligned} \qquad A_n = \begin{vmatrix} b_0 & -1 & & & \\ a_1 & b_1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & -1 \\ & & & a_n & b_n \end{vmatrix}$$

$$B_n = b_1 \begin{vmatrix} b_1 & -1 & & & \\ a_2 & b_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & -1 \\ & & & a_n & b_n \end{vmatrix}$$

$$a_n = -\frac{\begin{vmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{vmatrix}} \qquad b_n = \frac{\begin{vmatrix} A_n & A_{n-2} \\ B_n & B_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{vmatrix}}$$

Operações com fracções contínuas

$$b_n + \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{n+j}|}{|b_{n+j}} = R_m^{(n)} = \frac{A_m^{(n)}}{B_m^{(n)}}$$

$$R_{n+m} = \frac{A_{n-1}A_m^n + a_n A_{n-2} B_m^n}{B_{n-1}A_m^n + a_n B_{n-2} B_m^n}$$

$$\lim_{m\to\infty} R_{n+m} = R \qquad \lim_{m\to\infty} R_m^{(n)} = R^{(n)}$$

$$R = \frac{A_{n-1}R^{(n)} + a_n A_{n-2}}{B_{n-1}R^{(n)} + a_n B_{n-2}} \qquad R^{(n)} = \frac{B_{n-2}R - A_{n-2}}{B_{n-1}R - A_{n-1}}$$

Teorema de Favard (classe Blumenthal-Nevai)

Sucessão de Polinómis ortogonais: $\{P_n\}$ t.q.

$$P_{n+1}(z) = (z-\beta_n)P_n(z) - \gamma_n P_{n-1}(z).$$

$$z-\beta_n = b_{n+1} \text{ e } -\gamma_n = a_n$$

$$B_n = P_n(z)\,,\ A_n = P^{(1)}_{n-1}(z) \quad \text{[Associados]}$$

Classe Blumenthal-Nevai: $\beta_n \to b \quad \gamma_n \to c.$

Pelo Teorema de Poincaré em $|z-b| > c$

$$\frac{P^{(1)}_{n-1}(z)}{P_n(z)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \gamma_1 \dots \gamma_k}{P_k(z)P_{k+1}(z)} \rightrightarrows F(z)$$

$$F(z) = \frac{P^{(1)}_{n-1}(z)}{P_n(z)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_1 \dots \gamma_k}{P_k(z)P_{k+1}(z)}$$

Agora com $C = \{z \in \mathbf{C} : |z-b| = r\}$ e $r > |c|$

$$\int_C P_m P_n \frac{P^{(1)}_{n-1}}{P_n}\,dz = 0 \text{ e } \int_C \frac{P_n}{P_{n+1}}\,dz = 0$$

$$\int_C \frac{P_m P_n}{P_k P_{k+1}}\,dz = 0 \quad \begin{array}{c} 0 \le m \le n-1 \\ k = n, n+1, \dots \end{array}$$

$$\int_C P_m(z) P_n(z) F(z)\,dz = \gamma_1 \dots \gamma_n \delta_{n,m}$$

Fórmulas de Darboux-Christoffel

$$\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k(x)P_k(y) \quad r_k = \prod_{j=1}^{k} \gamma_j$$

$$P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k^2$$

$$P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1} = P_n^2 + \gamma_n(P'_nP_{n-1} - P'_{n-1}P_n)$$

$$P_n\{P'_{n+1} + \gamma_nP'_{n-1}\} - P'_n\{P_{n+1} + \gamma_nP_{n-1}\} = P_n^2$$

$$\left(\frac{P_{n+1} + \gamma_nP_{n-1}}{P_n}\right)' = 1$$

$$P_{n+1} + \gamma_nP_{n-1} = (x - \beta_n)P_n$$

$$F(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t}$$

$$F(z)P_n(z) = \int \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z-t}\, d\mu(t) + \int \frac{P_n(t)d\mu(t)}{z-t}$$

$$F(z)P_n(z) = P_{n-1}^{(1)}(z) + q_n(z)$$

Pode ver-se que $\{P_n\}$, $\{P_{n-1}^{(1)}\}$ e $\{q_n\}$ verificam a mesma relação de recorrência

---

$$P_{n+1}P_{n-1}^{(1)} - P_nP_n^{(1)} = -\prod_{j=1}^{n}\gamma_j = P_{n+1}q_n - P_nq_{n+1}$$

Sucessões de Laguerre-Hahn

F t.q. $AF' = BF^2 + CF + D$

$$\begin{aligned} &A((P_{n-1}^{(1)})'P_n - P_{n-1}^{(1)}P_n') - B(P_{n-1}^{(1)})^2 \\ &\quad -CP_{n-1}^{(1)}P_n - DP_n^2 = \Theta_n = P_n^2\{A(q_n/P_n)' \\ &\quad -2B(P_{n-1}^{(1)}/P_n)q_n/P_n - Cq_n/P_n - B(q_n/P_n)^2\} \end{aligned}$$

$$\frac{\Theta_n}{r_{n-1}}(P_nP_{n-2}^{(1)} - P_{n-1}P_{n-1}^{(1)}) = P_n\{(P_{n-1}^{(1)})' - DP_n\}$$

$$P_{n-1}^{(1)}\{-AP_n' - BP_{n-1}^{(1)} - CP_n\}$$

$$\begin{aligned} &P_{n-1}^{(1)}\{AP_n' + BP_{n-1}^{(1)} + CP_n - \frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-1}\} \\ &= \{(P_{n-1}^{(1)})' - DP_n - \frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-2}^{(1)}\}P_n \end{aligned}$$

Algumas caracterizações

$$\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n^2}\times \quad AP_n' + BP_{n-1}^{(1)} + CP_n - \frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-1} = \Omega_n P_n$$

$$\frac{1}{P_n}\times \quad A(P_{n-1}^{(1)})' - DP_n - \frac{\Theta_n}{r_{n-1}}P_{n-2}^{(1)} = \Omega_n P_{n-1}^{(1)}$$

$$A\left(\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n}\right)' = B\left(\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n}\right)^2 + C\left(\frac{P_{n-1}^{(1)}}{P_n}\right) + D + \boxed{\frac{\Theta_n}{P_n^2} \longrightarrow 0}$$

$$AIY_n' = A_n Y_n + B_n Y_{n-1}$$

$$Y_n = [P_n \ P_{n-1}^{(1)}]^t \ A_n = \begin{pmatrix} \Omega_n - C & -B \\ D & \Omega_n \end{pmatrix} \ B_n = \frac{\Theta_n}{r_{n-1}} I$$

$$Y_{n+1} - (x-\beta_n)IY_n + \gamma_n I Y_{n-1} = O_{2\times 1}$$

$$A^2 I Y_n'' = C_n Y_n + D_n Y_{n-1}$$

Assim $\{Y_n\}$ verifica uma equação diferencial de segunda ordem

$$A^2 B_n Y_n'' - AD_n Y_n' + (A_n D_n - C_n B_n) Y_n = 0$$

Sucessões semi-clássicas

$$f_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} \quad \begin{cases} f_n + \dfrac{\gamma_n}{f_{n-1}} = x - \beta_n \\ A_n f_n' = B_n f_n^2 + C_n f_n + D_n \end{cases}$$

– –

$$A_{n+1} = A_n \quad B_{n+1} = \gamma_{n+1} D_n$$
$$C_{n+1} = -2(x - \beta_{n+1})D_n - C_n$$
$$\gamma_{n+1} D_{n+1} = A_n + B_n + (x - \beta_{n+1})C_n + (x - \beta_{n+1})^2 D_n$$

– –

$$\phi A_n P_n'' + B_n P_n' + C_n P_n = 0$$
$$Y_n = [P_n \;\; P_n']^t \text{ t.q. } Y_n' = L_n Y_n$$
$$Y_n = P_n Y_{n-1} \text{ i.e. } \begin{matrix} E_{n+1} P_{n+1}' = a_n P_{n+1} + b_n P_n \\ E_n P_n' = c_n P_{n+1} + d_n P_n \end{matrix}$$

– –

$$E_{n+1} E_n \left(\frac{P_{n+1}'}{P_n} - \frac{P_{n+1} P_n'}{P_n^2} \right) = -c_n f_n^2 + (a_n + d_n) f_n + b_n$$

– –

$$f_n' = \frac{P_{n+1}'}{P_n} - \frac{P_{n+1} P_n'}{P_n^2}$$

Funções racionais de círculo fundamental

$$w = A\frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad A\,,\,\alpha\,,\,\beta \in \mathbf{R}$$

— —

conservar o eixo real

- Conservar os semi-planos inferior e superior
- Permutar os semiplanos inferior e superior

— —

$$z_1 = R(z)$$

os seus zeros são reais e simples

— —

os seus polos são reais e simples

— —

figuras

Carcterização e estabilidade

Condição necessária e suficiente: $R(z)-h = 0$ tem raizes reais e distintas se $h \in \mathbf{R}$

Estabilidade: Seja

$$R(z) = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^n + \cdots + b_n} = \frac{T(z)}{S(z)}$$

uma fracção de termos enterlaçados

- Se P for uma polinómio com zeros reais então $\dfrac{a_0 P(z) + \cdots + b_n P^{(n)}(z)}{b_0 P(z) + \cdots + b_n P^{(n)}(z)}$ é de termos enterlaçados

- $\dfrac{T'(z)}{S'(z)}, \ldots, \dfrac{T^{(k)}(z)}{S^{(k)}(z)}$ são de termos enterlaçados

- Se L for de termos enterlaçados então $L \circ R$ é também de termos enterlaçados