

(5.0) 1. Sucessões e séries de funções.

Faça uma exposição sobre este tema enquadrando-o na teoria geral de funções, apresentando definições, condições necessárias ou suficientes dos vários tipos de convergência.

---

(4.0) 2. Considere a sucessão real de termo geral

$$u_n = \frac{1 + 2\sqrt{2} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Enuncie o teorema de Stolz.
  - (b) Aplique o teorema de Stolz para calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .
  - (c) Dê uma interpretação do limite calculado em termos de um integral de uma função real de variável real.
- 

(4.0) 3. Considere a sucessão real, definida para cada  $v_0 \in \mathbb{R}^+$  por

$$v_{n+1} = \sqrt{v_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Determine uma expressão para  $v_n$  em termos da condição inicial  $v_0$ .
- (b) Tomando  $h = 1/2^n$ , expresse  $2^n(v_n - 1)$  em função de  $h$  e  $v_0$ .
- (c) Verifique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n(v_n - 1) = \ln v_0$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}^+$ .
- (d) Demostre a partir da igualdade obtida na alínea (c) que

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln a^m = m \ln a, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ e } m \in \mathbb{R}.$$

---

(2.0) 4. Determine a função geradora associada à sucessão real definida por

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

---