Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Complexa II
Frequência — 27/6/2000
Duração: 2h30m

(8.0) 1. Representação de Funções.

(a) Seja f uma função meromorfa com polos nos pontos a_n, $n \in \mathbb{N}$ e

$$0 < |a_1| < \cdots < |a_n| < \ldots$$

Mostre que se tem a representação

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{z - a_n} + \frac{b_n}{a_n} \right) .$$

(b) Mostre que

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Estabeleça as seguintes representações para as funções sin e cos:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2} \right)$$

(6.0) 2. Aplicações do Teorema de Rouché.

(a) Enucie o Teorema de Rouché.

(b) Deduza a fórmula de Lagrange e Gomes Teixeira:

$$\frac{\pi(\xi)}{\pi(a)F'(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_a^n(\pi(a)f^n(a))}{\pi(a)} \frac{u^n}{n!}$$

onde as funções $F(z) = z - a - uf(z)$ e π são analíticas numa vizinhança de $a \in \mathbb{C}$.

(c) Aplique a fórmula de Lagrange para calcular a função geradora dos polinómios de Chebychev,

$$T_n(z) = \sqrt{1 - z^2} D^n \left((1 - z^2)^n (1 - z^2)^{-1/2} \right) , \quad n = 0, 1, \ldots$$

---

v.s.f.f

(6.0) 3. Desenvolvimentos de Laurent.

(a) Dada uma função analítica f num anel $\rho_2 < |z| < \rho_1$, existem duas funções, uma, f_1, analítica em $|z| < \rho_1$, outra, f_2, analítica em $|z| > \rho_2$ tais que

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \rho_2 < |z| < \rho_1 \,.$$

Esta decomposição é única se impusermos que $\lim_{|z|\to\infty} f_2(z) = 0$.

(b) Mostre que se $z \neq 0$, então

$$\exp\left(\frac{\alpha}{2}(z - \frac{1}{z})\right) = J_0(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\alpha)\left(z^n + \frac{(-1)^n}{z^n}\right)$$

onde $J_n(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha\sin\theta)$, para $n = 0, 1, \ldots$.

Indicação: Verifique que,

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta - \alpha\sin\theta) = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

e $J_{-n}(\alpha) = J_n(\alpha)$, $n = 1, 2, \ldots$