Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Análise Complexa II
Teste — 5/6/98

Duração: 3h30m

Observações: Os dois modelos de teste são:

- **I**, **II**, **III**, **IV**, **VI**;
- **I**, **III**, **IV**, **V**.

(5.0) I. Funções Analíticas

1. Seja F uma função complexa, definida em $D \times D$ onde D é um domínio de $\mathbb{C}$. Se F é analítica em D como função de cada uma das variáveis e $F(z, w) \equiv 0$ para $(z, w) \in E \times E$, onde o derivado de E é não vazio, então $F(z, w) \equiv 0$ sobre $D \times D$.

2. Seja $D = \mathbb{C} \backslash]-\infty, 1]$ e considere o ramo de $\sqrt{z^2 - 1}$ definido em D e que é positivo sobre $]1, \infty[$.

   (a) Mostre que $z + \sqrt{z^2 - 1}$ não intersecta a parte negativa do eixo real.

   (b) Mostre que $\log(z + \sqrt{z^2 - 1})$ é uma primitiva para $1/\sqrt{z^2 - 1}$.
   Indicação: Use a primeira questão.

   (c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$ onde γ é um caminho contido em D que une $-i$ a i.

3. Mostre que $F(w) = \displaystyle\iint_{|z| \leq 1} \frac{dx\, dy}{z - w}$ com $z = x + iy$ é analítica na região $\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < \infty\}$, e obtenha o seu desenvolvimento em série de potências numa vizinhança do infinito.

   Indicação: Verifique que F é diferenciável.

   Além disso, $\displaystyle\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$.

---

v.s.f.f.

(2.0) II. Representações Conformes

Seja f a seguinte função $w(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

1. Mostre que w é uma aplicação conforme do interior do disco unidade, i.e. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, num domínio da esfera de Riemann.
2. Identifique D e represente a imagem por w do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.
3. Determine a aplicação inversa de w.

(5.0) III. Aplicações do Teorema de Rouché

1. Mostre que $2z^5 + 6z - 1$ tem quatro raízes em $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Onde se encontra a quinta?
2. Deduza a fórmula de Lagrange:

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \pi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} D_a^n(\pi(a) f^n(a))$$

   onde as funções $F(z) = z - a - uf(z)$ e π são analíticas numa vizinhança de $a \in \mathbb{C}$.

3. Aplique a fórmula de Lagrange para calcular a função geradora dos polinómios de Legendre, $P_n(z) = \dfrac{D^n(z^2-1)}{2^n\, n!}$, $n = 0, 1, \ldots$.

(4.0) IV. Convergência Uniforme

1. Mostre que o espaço das funções meromorfas definidas num domínio de $\mathbb{C}$ é completo.
2. Sejam f uma função analítica em $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ e

$$f_n(z) = f(z/n)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

   Mostre que $\{f_n\}$ é normal em D se e somente se, f tiver em $0 \in \mathbb{C}$ um pólo ou uma singularidade removível.

   Indicação: Enuncie o Teorema de Hurwitz e defina singularidades removível e pólo.

---

v.s.f.f.

(6.0) V. Representação de Funções

1. Mostre que

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = e^{C}\,,\ \text{onde}\quad C = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)\right\}.$$

   Indicação: Verifique que $0 < \frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n^2}$.

2. Mostre que o produto infinto

$$\Gamma(z+1) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+z}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{z}$$

   converge absolutamente em $\mathbb{C}\backslash\{-1,-2,\dots\}$ e representa uma função meromorfa.

3. Mostre que Γ se pode representar na forma devida a Euler

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{z}}{z(z+1)\dots(z+n)}\,,\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}\,.$$

4. Prove que (representação de Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\,,\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\dots\}\,.$$

   onde C é a constante que aparece na primeira questão.

(4.0) VI. Funções Elípticas

1. Defina função elíptica.
2. No paralelogramo fundamental de uma função elíptica, o número de zeros e de pólos coincide.
3. Mostre que a função de Weierstrass é par.
4. Mostre que toda a função elíptica é uma função racional da função de Weierstrass e da derivada da função de Weierstrass.